<u>חדו"א 1 - תרגיל 2</u>

הערה כללית : על־מנת לפתור את מרבית התרגילים מומלץ להסתמך על תכונות הרציונליים כ"שדה סדור" (חוק החילוף, פילוג וכו').

1. הוכיחו כי
   (א) לכל N טבעי $N! \leq (\frac{N+1}{2})^N$.
   (ב) לכל $a,b,c>0$ מתקיים $\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq 3\sqrt{2}$.
   מתי מתקיים שיוויון?
   (ג) לכל $a_1,...,a_N$ אי־שליליים $\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N {a_k}^2}{N}} \geq \frac{\sum_{k=1}^N a_k}{N}$

סימון: לכל $q \in \mathbb{Q}$ נסמן את החתך המתאים ע"י $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$.

2. יהי $b \in \mathbb{Q}$ ויהי α חתך, בדקו כי על־פי ההגדרות:
   (א) אם $b \in \alpha$ אז $b^* < \alpha$.
   (ב) אם $b \notin \alpha$ אז $b^* \geq \alpha$.
   (ג) אם α אי־רציונלי ו־ $b \notin \alpha$ אז $b^* > \alpha$.
3. יהיו α,β,γ חתכים המקיימים: $\alpha < \beta$. הוכיחו כי $\alpha+\gamma < \beta+\gamma$.
   הסיקו כי אם $\alpha < \beta, \gamma < \delta$ אז $\alpha+\gamma < \beta+\delta$ (ניתן לחבר אי שוויונים).
4. הוכיחו כי אין מספר רציונאלי המקיים $x^3 = 7$.
5. הוכיחו כי עבור משפחה של חתכים $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימים $\forall\ i\ \alpha_i < \beta$ (כאשר β גם חתך), האיחוד $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ הנו חתך. האם התנאי $\forall\ i\ \alpha_i < \beta$ הכרחי להוכחה? הוכיחו בלי או תנו דוגמא נגדית.
6. הוכיחו כי עבור חתכים α,β,γ מתקיים
   (א) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$
   (ב) $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$
7. הוכיחו כי אם $\alpha,\beta > 0^*$ אז גם $\alpha \cdot \beta > 0^*$
8. הוכיחו כי אם עבור חתכים $0 < \alpha,\beta,\gamma$ מתקיים $\beta < \gamma$ ו־ $\alpha < \beta$, אז $\alpha < \gamma$.