סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 2 - חדו"א 1

1. הוכיחו כי פונקצית דיריכלה (Dirichlet) המוגדרת ע"י

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

מחזורית, איך אין לה מחזור קטן ביותר.

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f זוגית, ו־g אי־זוגית אז $f \cdot g$ אי־זוגית. מה לגבי $f+g$?

(ב) הפונקציה $\sqrt[n]{1-x^n}$ הפיכה עבור $x \in [0,1]$.

(ג) אם f עולה, g יורדת, אז $f \circ g$ יורדת.

3. ★ תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[-a,a]$. הוכיחו כי קיימות פונקציה זוגית f_1 ופונקציה אי־זוגית f_2 יחידות כך ש־ $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ לכל $x \in [-a,a]$.

הדרכה: הניחו כי קיימות f_1, f_2 כנ"ל והסתכלו על $f(x)$ ו־ $f(-x)$. קבלו מערכת משוואות עבור $f_1(x), f_2(x)$ ופתרו אותה.

4. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו האם הן חסומות מלעיל/מלרע. כמו כן, חשבו sup, inf, ומצאו max, min במידה והם קיימים, או הראו מדוע הם אינם קיימים

(א) $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, |, n \in \mathbb{N}\}$.

(ב) $B = \{\frac{n-1}{n+1}\cos(\frac{2n\pi}{3}), |, n \in \mathbb{N}\}$

(ג) $C = \{x^2 + x + 1, |, x \in (0,\infty)\}$

(ד) ★ $D = \{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, |, n \in \mathbb{N}\}$, כאשר $\lfloor m \rfloor$ הוא החלק השלם של m.

5. $A, B \subset \mathbb{R}_+$ (קבוצות של מספרים אי־שליליים) חסומות מלמעלה. הוכיחו כי

$$sup(A \times B) = sup(A) \cdot sup(B)$$

כאשר $A \times B = \{x \cdot y |\, x \in A,\, y \in B\}$.

6. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש־ $A \subseteq B$. הוכיחו כי

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

7. תהיינה f, g פונקציות חסומות בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי

$$\sup_{a \leq x \leq b} \big(f(x) + g(x)\big) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x) + \sup_{a \leq x \leq b} g(x)$$

והראו (ע"י דוגמא) כי ייתכן שאין שיוויון.

הערה: הסופרמום של $f : A \to B$ מוגדר על ידי: $\sup f := \sup\{f(x) | x \in A\}$.

8. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. <u>הוכיחו או הפריכו</u> את הטענות הבאות:

(א) "אם ל־ A אין איבר מקסימלי אז A קבוצה אינסופית (בעלת אינסוף איברים)".

(ב) "אם A אינסופית ללא איבר מינימלי אז A איננה חסומה".

(ג) "אם A, B חסומות ו־ $\sup A = \inf B$ אז $A \cap B$ מכילה בדיוק איבר אחד".

(ד) "אם A, B חסומות ו־ $A \cap B = \emptyset$ (כלומר A, B זרות) אז $\sup A \neq \sup B$".

(ה) "אם $A \subset B$ ו $|A| = \infty$, $|B \setminus A| = \infty$ אזי $\sup B > \sup A$".

הערה: אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה, אחרת יש להפריך אותה ע"י מתן דוגמא נגדית.

9. נתונה הקבוצה: $A = \{(1+\frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. הוכיחו כי $2 < \sup A < 3$. האם קיים מקסימום לקבוצה A? אפשר להשתמש ברמזים הבאים:

(א) חשבו תחילה את הסכום: $\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{2^k}$.

(ב) הראו כי לכל $k \geq 2$ מתקיים $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

(ג) הראו כי: $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq 2\frac{11}{12}$.

(ד) כעת באמצעות נוסחאת הבינום הראו: $(1+\frac{1}{n})^n < \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$

(ה) הראו כי $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{2n})^{2n}$ והעזרו בכך כדי לקבוע עם יש מקסימום.

10. מצאו ביטוי התלוי ב־ n ושאינו מכיל את הסימנים $\prod, \sum$ עבור:

(א) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$

(ב) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$

(ג) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

(ד) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k}$

11. ★ ★ הוכיחו את אי־שיוויון צ'בישב: נתונים מספרים חיוביים המקיימים $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ וגם $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. אזי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

רמז: פתחו את הביטוי $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)$.