סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 3 - חדו"א-1

1. תהי $\{a_n\}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמא נגדית את הטענות הבאת:

א) אם קיים מספר ממשי A ומספר טבעי M כך שלכל $n>M$ טבעי ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$ אזי לסדרה יש גבול.

ב) אם לכל מספר x ממשי מקיים $\varepsilon>0$ וגם N טבעי כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $|a_n - x| < \varepsilon$, אזי הסדרה מתכנסת.

2. יהי $a_n = n^{(-1)^n}$. הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}$ איננה חסומה אך גם לא שואפת ל- ∞.

3. הוכיחו לפי הגדרת הגבול (כלומר בשפת "$\varepsilon - N$"):

א) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$;

ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - \cos(n)} - n = 0$;

ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{\sqrt[3]{n}} = 0$;

4. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי הסדרות הבאות אינן מתכנסות:

א) $a_n = \frac{n}{n+1}(1+\cos(\pi n))$;

ב) $a_n = (-1)^n + \frac{3}{n}$;

ג) $a_{3k} = 0$; $a_{3k+1} = 1$; $a_{3k+2} = 2$.

**5. האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$? נמק את תשובתך היטב!

6. א) תהי $\{a_n\}$ סדרה עבורה קיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha$ לכל n.

הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

ב) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (רמז: השתמשו בסעיף א').

ג) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ לכל n. האם בהכרח מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

ד) יהי a ממשי כלשהו ו- $|h| < 1$. נסמן $a_n = n^a h^n$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(הדרכה: השתמשו בסעיף ג').

7. חשבו $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר:

א) $a_n = \frac{1000n}{n^2-2}$;

ב) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$;

ג) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+1}$;

ד) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$;

ה) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$; ו) $a_n = \frac{n!}{(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(2n)}$;

** ז) $a_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}$; ח) $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n^3+n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$;

ט) $a_n = \frac{2^n+3^n}{3\times2^{n+1}+2\times3^{n-1}}$; * י) $a_n = (n^5-2n+7)^{\frac{1}{n+2}}$;

8. א) נתון ש- $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a$. האם בהכרח קיים $\lim_{n\to\infty} a_n$?

ב) נניח ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$. הוכיחו שהסדרה : $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$

מתכנסת וגבולה שווה ל- a .

ג) נתון ש- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$. האם בהכרח לפחות אחת מהסדרות $\{b_n\}$, $\{a_n\}$ שואפת ל- 0 ?

ד) *(i)* נתון: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(ii) מה יתכן במקרה (i) ש - $a = 0$? תנו דוגמאות.

9. הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) קיימת סדרה $\{a_n\}$ כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ וכן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 0$.

ב) אם $(a_{n+1}^2 - a_n^2) \to 0$ וגם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ אזי קיים גבול $\lim_{n\to\infty} a_n$.

ב ה צ ל ח ה !