

חדו"א 1א - תרגיל בית מס' 5

1. הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:

$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = 3 \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$$

2. פיתרו את השאלות הבאות:

(א) נתונה סדרה $\{a_n\}$ כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, וסדרה חיובית $\{b_k\}$ המקיימת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \infty. \quad \text{הוכיחו כי: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n b_k} \right) = a$$

(ב) הוכיחו את הגרסא הבאה של משפט שטולץ: תהי $\{x_n\}$ סדרה כלשהי ותהי $\{y_n\}$ סדרה עולה ממש כך ש $y_n \rightarrow \infty$ ובנוסף קיים הגבול במובן הרחב: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$. אזי מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \infty$

3. חשבו בעזרת משפט שטולץ (Stolz) את הגבולות הבאים:

$$(א) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(ב) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad \text{לכל } p \in \mathbb{N}$$

$$(ג) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) \quad \star \text{ לכל } p \in \mathbb{N}$$

$$(ד) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \quad \text{כאשר } a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \text{ עבור } n \rightarrow \infty$$

$$(ה) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + 2b_2 + \dots + n b_n}{n^3} \quad \text{כאשר } \{b_n\} \text{ סדרה המקיימת: } \frac{b_n}{n} \rightarrow B \text{ כאשר } n \rightarrow \infty$$

$$(ו) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor 1^2 \alpha \rfloor + \lfloor 2^2 \alpha \rfloor + \dots + \lfloor n^2 \alpha \rfloor}{n^3} \quad \text{כאשר } \alpha \in \mathbb{R}$$

4. \star תהי סדרה חסומה המקיימת: $a_{n+1} \geq a_n - 2^{-n}$ לכל n . הראו כי הסדרה מתכנסת.

5. יהי a גבול חלקי של סדרה מונוטונית $\{a_n\}$. הוכיחו כי $a_n \rightarrow a$ כאשר $n \rightarrow \infty$.

6. תהי סדרה $\{a_n\}$ ונגדיר סדרה $\{b_n\}$ באופן הבא: $b_n = \sqrt[n]{a_n}$. הוכיחו כי לשתי הסדרות יש את אותם הגבולות החלקיים.

7. מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות: (חשבו בנוסף את \limsup ו \liminf):

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ even} \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \left(2 + \frac{3}{n}\right) \quad (\text{ב})$$

$$a_n = 1 + n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} + (-1)^n \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}{2 + \sin\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)} \quad (\text{ד})$$

8. ★ תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n = 0$. הראו כי קבוצת הגבולות החלקיים

$$\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right]$$

שלה היא הקטע

9. תהי $M \subset \mathbb{R}$ קבוצה סופית ולא ריקה. תנו דוגמא לסדרה כך ש M היא קבוצת הגבולות החלקיים שלה.

10. תהיינה $\{x_n\}, \{y_n\}$ סדרות חסומות. הוכיחו את הטענות הבאות:

$$-\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \quad (\text{א})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\text{ב})$$

11. הוכיחו כי אם תתי-הסדרות $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}, \{a_{3n}\}$ של סדרה $\{a_n\}$ מתכנסות, אזי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת.

12. ★ תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1} - a_n| < 2$ לכל n , $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 1$ ו $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 4$. הוכיחו כי לסדרה $\{a_n\}$ לפחות שלושה גבולות חלקיים.

13. הוכיחו את הטענות הבאות או מצאו דוגמא נגדית:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{אזי} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{אזי} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a \quad (\text{ב})$$

סדרה חיובית. אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \quad \text{אזי} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a \quad (\text{ג})$$

סדרה חיובית. אם

(ד) לכל סדרה לא חסומה קיים גבול במובן הרחב.