סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 6 ־ חדו"א 1

1. הוכיחו כי הסידרה $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ אינה מתכנסת (לגבול סופי).

2. (א) הוכיחו בעזרת קריטריון Cauchy כי אם $\{a_n\}$ מתכנסת אז $\lim_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n) = 0$.

   (ב) האם הטענה ההפוכה נכונה, כלומר האם מכך ש־ $\lim_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n) = 0$ נובע כי $\{a_n\}$ מתכנסת ?

3. תהי $\{a_n\}$ סידרה המקיימת $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{9}{10}|a_n - a_{n-1}|$ לכל n. הוכיחו כי הסידרה מתכנסת. אם היה נתון רק ש־ $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ לכל n, האם הסדרה בהכרח מתכנסת?

4. בדקו האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

   (א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}$ כאשר $k, m \in \mathbb{N}$

   (ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (<u>רמז:</u> היעזרו באי־שיוויון עבור $n!$ מהתרגול)

   (ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{(2/n)}}$

   (ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו $a, b > 0$. (<u>הערה:</u> התשובה תלויה בערכי a, b).

   (ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)^{\alpha}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$

   (ז) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$, כאשר $\alpha > 0$.

   (ח) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^{\alpha}}$ כאשר $\alpha > 0$ ($\log\log n = \log(\log(n))$).

5. נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ המקיימים לכל $n \ge n_0$: $\frac{b_{n+1}}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$. הראו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

6. בידקו האם הטורים הבאים מתכנסים: (<u>רמז:</u> היעזרו בשאלה 5)

(א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ (ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$

7. נתון כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי מתכנס.

(א) הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(ב) הראו כי הכיוון ההפוך איננו נכון באופן כללי.

(ג) נתון כי a_n סדרה מונוטונית, הראו כי הכיוון ההפוך נכון.

8. נתון כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי מתבדר. בכל אחד מהסעיפים קיבעו האם הטור הנתון מתכנס/מתבדר/ההתכנסות תלויה בסדרה a_n.

(א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

(ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$

(ג) ★ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n a_n}$

9. נתון כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי (כלומר $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$). נגדיר $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ ו $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

(א) הראו כי הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ ו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ מתבדרים.

(ב) נגדיר $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_n$, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_n$. הראו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$.

10. בידקו האם הטורים הבאים מתבדרים/מתכנסים/מתכנסים בהחלט:

(א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/3 \rfloor}}{n}$

(ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n^2}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{a^{n^2}}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$

(ה) $\bigstar$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

11. נתון טור חיובי מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. כמו כן נשתמש בסימון $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$. בשאלה זו נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\beta}}$ מתכנס לכל $\beta>1$.

(א) הראו מדוע מספיק להוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n\cdot S_n^{\frac{1}{k}}}$ מתכנס לכל $k\in\mathbb{N}$.

(ב) באמצעות הזהות $x^k-y^k=(x-y)\left(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+xy^{k-2}+y^{k-1}\right)$ הראו כי מתקיים אי־השיוויון:

$$S_n^{\frac{1}{k}}-S_{n-1}^{\frac{1}{k}}\geq\frac{S_n-S_{n-1}}{kS_n^{\frac{k-1}{k}}}$$

<u>הערה:</u> היעזרו במונוטוניות של הסדרה S_n.

(ג) הסיקו כי $\sum_{n=1}^{m}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n\cdot S_n^{\frac{1}{k}}}\leq k\left(\frac{1}{a_1^{\frac{1}{k}}}-\frac{1}{S_m^{\frac{1}{k}}}\right)$ והראו שהטור בסעיף א' מתכנס.

12. $\bigstar$ בתרגיל זה נגדיר חזקות ממשיות.

(א) נוכיח כי אם $a>0$ ו־$\{h_n\}\subset\mathbb{Q}$ כך ש־$h_n\to 0$, אז $a^{h_n}\to 1$.

(ב) נקבע $x\in\mathbb{R}$, ונגדיר $A=\{r\in\mathbb{Q}|\ r\leq x\}$, $B=\{s\in\mathbb{Q}|\ s\geq x\}$. הוכיחו שלכל $a>0$, $\sup a^A=\inf a^B$. כאן $a^A:=\{a^r|\ r\in A\}$.

(ג) נגדיר $a^x:=\sup a^A$. הוכיחו כי אם $q_n\to x$, $q_n\in\mathbb{Q}$, אזי $a^{x_n}\to a^x$.

(ד) הוכיחו ש־ $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ וש־ $(a^x)^y=a^{xy}$.