

תרגיל מס' 8 חדון"א - 1

1. הוכיחו או הפריחו:

- (א) אם $f(x)$ ו $g(x)$ אינן רציפות בנק' x_0 אזי בהכרח:
 (a) $f(x) + g(x)$; (b) $f(x)g(x)$ גם אינן רציפות בנק' x_0 .
 (ב) אם $f(x) \in C(x_0)$ ו- $g(x)$ אינה רציפה בנק' x_0 אזי בהכרח:
 (a) $f(x) + g(x)$; (b) $f(x)g(x)$ גם אינן רציפות בנק' x_0 .

2. קבעו את תחומי הרציפות מיינו את נקודות אי-הרציפות של פונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & x \neq -2 \\ A, & x = 2 \end{cases} ; & \text{ב) } f(x) &= \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} ; \\ \text{ג) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} ; & \text{ד) } f(x) &= \begin{cases} \sin(x) \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} ; \\ \text{ה) } f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} ; & \text{ו) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

3. נתון שפונקציה $f(x) \in C[0; \infty)$. נתון גם ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = M < \infty$. הוכיחו ש-
 $f(x)$ חסומה ב- $[0, \infty)$.

4. נאמר שפונקציה $f(x)$ מקימת את תנאי ליפשיץ ($f(x) \in Lip(K)$) אם $\forall x_1, x_2$ מתקיים

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \text{ עבור מספר קבוע } K \in \mathbb{R}_+$$

(א) אם $f(x) \in Lip(K)$. הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה בתחום הגדרה שלה.

(ב) אם $f(x) \in Lip(K)$ ו- $0 < K < 1$ אז לכל $x_0 \in D_f$ הסדרה $f(x_n) = x_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, m \dots$) מתכנסת למספר $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. הוכיחו גם שנקודה A היא

נקודת שבת של $f(x)$ (כלומר $f(A) = A$).

5. נתונה $f(x) \in C[a, b]$. נתון גם שקיים מספר $A: f(x) > A$ לכל $a \leq x \leq b$.

הוכיחו שקיים $c > 0$ שמתקיים אי-השוויון $f(x) > A + c$

6. נתון ש- $f(x) \in C(\mathbb{R})$. הוכיחו שלמשוואה $f(f(x)) = x$ קיים פתרון אם ורק אם

יש פתרון למשוואה $f(x) = x$.

(א) הוכיחו שלמשוואה: $x^7 + 3x^2 - 2 = 0$ יש שורש בקטע $[0, 1]$.

(ב) הוכיחו שלכל פולינום ממשי בעל דרגה אי-זוגית קיים שורש ממשי.

8. ידוע ש- $f(x) = g(x) : \forall x \in Q$ והפונקציות $f, g \in C(R)$. הוכיחו שלכל $x \in R$ מתקיים

$$f(x) = g(x)$$

9. נתון ש- $f(x) \in C(Q)$. האם בהכרח קיימת $g(x) \in C(R)$ כך ש- $f(x) = g(x) : \forall x \in Q$?

10. מצאו כל הפונקציות הרציפות בכל R המקיימות את המשוואה: $\forall x_1, x_2 \in R$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$$

11. א) $f(x)$ רציפה ב- R ומחזורית בעלת מחזור T . הוכיחו שקיימות שתי נקודות x_1, x_2 כך ש-

$$|x_1 - x_2| = \frac{T}{2} \text{ ו- } f(x_1) = f(x_2)$$

ב*) נתון ש- $f(x) \in C[0,1]$ ו- $f(0) = f(1)$. הוכיחו שלכל $n \in N$ קיימות שתי נקודות

$$x_1, x_2 \text{ כך ש- } |x_1 - x_2| = \frac{1}{n} \text{ ו- } f(x_1) = f(x_2)$$

12. האם פונקציות הבאות רציפות במידה שווה (במ"ש) בתחום נתון:

א) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, $x \in [-1,1]$; ב) $f(x) = \ln x$, $x \in (0,1)$

ג) $f(x) = \arctan x$, $x \in R$; ד) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

ה) $f(x) = x + \frac{x}{x+1}$, $x > 0$; ו) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in R$

13. נתון שפונקציות $f(x)$ and $g(x)$ הן רציפות במ"ש בתחום R . הוכיחו או הפריכו:

א) $f(x) + g(x)$ רציפה במ"ש.

ב) $f(x) * g(x)$ רציפה במ"ש.

14. א) $f(x) \in C(R)$ ונתון גם ש- $f(x)$ מחזורית. הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במ"ש.

ב) $f(x) \in C(R)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L < \infty$. הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במ"ש.

15*. (המשך של השאלה 9) אם $f(x) \in C(Q \cap [a, b])$. הוכיחו שקיימת $g(x) \in C[a, b]$ כך ש-

$$f(x) = g(x) \text{ לכל } x \in Q \cap [a, b] \text{ אם ורק אם } f(x) \text{ רציפה במ"ש.}$$

ב ה צ ל ח ה !