חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 9

1. עבור אילו ערכי α, β הפונקציה הבאה רציפה:

$$f(x) = \begin{cases} (1+\alpha x)^{\frac{\alpha}{x}} & , x > 0 \\ \beta & , x = 0 \\ e\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) & , x < 0 \end{cases}$$

2. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש $f(a) > 0 > f(b)$. נסמן

$$A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \geq 0\}$$

(א) הוכיחו כי A חסומה ולא ריקה. הסיקו כי קיים $s = \sup A$.

(ב) הראו כי $f(s) = 0$.

(ג) הסיקו את משפט ערך הביניים.

3. חיקרו רציפות במ"ש של הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

(א) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ בתחום $(0,1)$

(ב) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ בתחום $(0,\infty)$

(ג) $f(x) = x \sin x$ בתחום $(0,\infty)$

4. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) נתון כי $f : [0,1] \to [0,1]$ פונקציה רציפה, אזי קיימת ל f נקודת שבת. כלומר קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך ש $f(x_0) = x_0$.

(ב) אם f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$ כך ש $f(x) \in \mathbb{Q}$ לכל $x \in \mathbb{R}$ אזי f קבועה.

(ג) נתונה פונקציה רציפה $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, אזי לכל n נקודות $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ קיימת נקודה $x \in (a,b)$ כך ש

$$f(x) = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

5. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) נתון כי $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה במ"ש, אזי אם $\{x_m\}$ היא סדרת קושי כך ש $x_m\in A$ אזי הסדרה $\{f(x_m)\}$ היא גם סדרת קושי.

(ב) ★ נניח כי $A\subset\mathbb{R}$ תת־קבוצה חסומה. נתונה פונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת כי לכל סדרת קושי $\{x_m\}$ כך ש $x_m\in A$ מתקיים כי $\{f(x_m)\}$ היא גם סדרת קושי. הראו כי f רציפה במ"ש ב A. הראו כי התנאי ש A קבוצה חסומה הוא הכרחי.

6. הוכיחו כי אם f מחזורית ורציפה אזי היא מקבלת מינימום ומקסימום ב $\mathbb{R}$.

7. ★ יהיו a,b,c מספרים חיוביים. ו $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ מספרים ממשיים. הוכיחו כי למשוואה:

$$\frac{a}{x-\lambda_1}+\frac{b}{x-\lambda_2}+\frac{c}{x-\lambda_3}=0$$

ישנם בדיוק שני פתרונות. אחד בקטע (λ_1,λ_2) והשני בקטע (λ_2,λ_3).

8. הוכיחו כי לכל סדרה חסומה $\{x_n\}$ ופונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים:

(א) $$\limsup_{n\to\infty}f(x_n)\geq f\left(\limsup_{n\to\infty}x_n\right)$$

(ב) $$\liminf_{n\to\infty}f(x_n)\leq f\left(\liminf_{n\to\infty}x_n\right)$$

(ג) אם f מונוטונית עולה אזי יש שיוויון בסעיפים א' וב'.

9. הוכיחו כי למשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון:

(א) $(1-x)\cos x=\sin x$ כאשר $x\in(0,1)$

(ב) $|P(x)|=e^x$ כאשר $P(x)$ פולינום (שאינו 0) ו $x\in\mathbb{R}$.

10. הוכיחו כי יש שתי נקודות על קו המשווה בהן הטמפרטורה זהה.
<u>הערה:</u> ניתן להניח כי פונקציית הטמפרטורה רציפה.

11. הוכיחו את משפט ויירשטראס הכללי:
A קבוצה סגורה וחסומה. פונקציה f רציפה בקבוצה A הינה חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.
<u>הערה:</u> קבוצה A היא סגורה אם לכל סדרה $\{x_n\}$ עם ערכים ב A כך ש $x_n\to x$ מתקיים כי $x\in A$.