תרגיל 3: הראה כי אי-השוויון

$$\left(\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right)(-x)^{n+1}\le 0$$

מתקיים לכל $n>0$ ו- $x>-1$.

פיתרון:

נשים לב כי הפונקציה $f(x)=\ln(1+x)$ גזירה אינסוף פעמים ולכן קיים לה קירוב טיילור מכל סדר $n>0$.

נחשב את הנגזרת ה- k-ית של $f(x)=\ln(1+x)$:

עבור $k=1$ מתקיים $f'(x)=\frac{1}{x+1}$.

עבור $k=2$ מתקיים $f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$.

עבור $k=3$ מתקיים $f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$.

וכיוון ש- $\left(\frac{1}{(x+1)^{k-1}}\right)'=-\frac{k-1}{x^k}$ נקבל באינדוקציה עבור k כללי את הנוסחא הבאה:

$$f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'=\left((-1)^k\frac{(k-2)!}{(x+1)^{k-1}}\right)'=(-1)^k(k-2)!\left(\frac{1}{(x+1)^{k-1}}\right)=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$$

בפרט, מתקיים $f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}(k-1)!$ ולכן פולינום טיילור מסדר n של $f(x)=\ln(1+x)$ סביב אפס הוא

$$T_{n,0}(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

לפי נוסחאת טיילור, נקבל:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+R_n(x)$$

כאשר $R_n(x)$ שארית לגראנג' מסדר n (קיימת, כי כאמור הפונקציה גזירה אינסוף פעמים בתחום הגדרתה) . לפיכך הביטוי באי-השוויון הוא למעשה

$$\left(\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right)(-x)^{n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+R_n(x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right)(-x)^{n+1}=$$

$$= (R_n(x))(-x)^{n+1} = (-1)^{n+1} R_n(x) x^{n+1}$$

לפי הגדרה, שארית לגראנג' מקיימת

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{(1+c)^n} x^{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^n}$$

כאשר c מספר כלשהוא בין 0 ל- x. ולכן

$$(-1)^{n+1} R_n(x) x^{n+1} = (-1)^{n+1}(-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)(1+c)^n} x^{n+1} x^{n+1} = (-1)^{2n+3} \frac{1}{(n+1)(1+c)^n} (x^2)^{n+1}$$

נשים לב כי זהו בהכרח מספר שלילי. זאת כיוון ש-

$(x^2)^{n+1} \geq 0$ - כיוון שזוהי חזקה של מספר חיובי

$\frac{1}{(1+c)^n} \geq 0$ - כיוון שכאמור $c > -1$ (מספר בין 0 ל- x ו- $x > -1$)

ולבסוף $(-1)^{2n+3} = -1 < 0$.

לכן קיבלנו

$$R_n(x)(-x)^{n+1} = (-1)^{2n+3} \frac{1}{(n+1)(1+c)^n} (x^2)^{n+1} \leq 0$$

כמכפלה של שני מספרים חיוביים במספר שלילי – כדרוש.

שאלה 4: (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) נתונה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ונגזרתה רציפה. נתונה גם $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. הראו כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+g(x))-f(g(x))}{x}=f'(0)$$

פתרון

f גזירה בקטע שבין $g(x)$ ל- $x+g(x)$, לכן ע"פ משפט לגרנג' קיימת נקודה c_x בין $g(x)$ ל- $x+g(x)$ כך ש-

$$\frac{f(x+g(x))-f(g(x))}{(x+g(x))-g(x)}=f'(c_x).$$

מנתון, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, לכן גם $\lim_{x\to 0}(x+g(x))=0$, וע"פ משפט הסנדויץ' גם $\lim_{x\to 0} c_x=0$. משום ש f' רציפה, $\lim_{x\to 0} f'(c_x)=f'(0)$.

בסה"כ קיבלנו:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+g(x))-f(g(x))}{x}=\lim_{x\to 0} f'(c_x)=f'(0)$$

מ.ש.ל

(ב) (10 נקודות) נתונה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה $x_0=0$. נתונה גם $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $|g(x)|\le|x|$. הראו כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+g(x))-f(g(x))}{x}=f'(0)$$

פתרון

נשים לב ש - $f(y)=f(0)+f'(0)y+R(y)$ כאשר $\lim_{y\to 0}\frac{R(y)}{y}=0$

(מהגדרת הנגזרת = נוסחת פיאנו לשארית של פיתוח טיילור מסדר 1),

לכן

$$\frac{f(x+g(x))-f(g(x))}{x}=$$

$$=\frac{1}{x}\left(f(0)+f'(0)(x+g(x))+R(x+g(x))-f(0)-f'(0)g(x)-R(g(x))\right)$$

$$= f'(0) + \frac{1}{x}\left(R(g(x)) + R(x + g(x))\right)$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\left(R(g(x)) + R(x + g(x))\right)\right| \le \lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)}{x}\frac{R(g(x))}{g(x)}\right| + \lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)+x}{x}\frac{R(g(x)+x)}{g(x)+x}\right|$$

$$\le \lim_{x\to 0}\left|\frac{R(g(x))}{g(x)}\right| + 2\lim_{x\to 0}\left|\frac{R(g(x)+x)}{g(x)+x}\right| = 0$$

הגבול מימין קיים לכן גם הגבול משמאל, ע"פ משפט הסנדויץ'.

מ.ש.ל

שאלה 5. תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n| \le 1/2$ לכל n. נתון כי 2008 ו־ 2009 הם גבולות חלקיים שלה, הוכיחו כי ל־ $\{a_n\}$ לפחות שלושה גבולות חלקיים.

פתרון. נניח בשלילה כי ל־ $\{a_n\}$ יש רק שני גבולות חלקיים.
אזי, קיים N כך שלכל $n \ge N$ מתקיים $a_n \notin [2008+\frac{1}{4}, 2009-\frac{1}{4}]$: אחרת, יהיו אינסוף איברים של הסדרה בקטע הנ"ל ולכן לפי משפט בולצנו־ויירשטרס קיימת תת־סדרה המתכנסת לגבול חלקי נוסף בקטע בסתירה להנחה שלנו.
נבחר $k > N$ כך ש־ $a_k > 2009-\frac{1}{4}$: אכן קיים k כזה מכיוון ש־ 2009 הוא גבול חלקי של הסדרה, ובכל סביבה שלו יש אינסוף איברים של $\{a_n\}$.
נגדיר $j := \min\{n > k : a_n < 2008+\frac{1}{4}\}$: אכן קיים j כזה מכיוון ש־ 2008 הוא גבול חלקי של הסדרה (אחרת, יש מספר סופי של איברים בסביבה של 2008 בסתירה להנחה שלנו).
לכן על פי הבנייה קבלנו: $a_j < 2008+\frac{1}{4}$, $a_{j-1} \ge 2008+\frac{1}{4}$.
אבל $a_{j-1} \ge 2009-\frac{1}{4}$ ולכן

$$a_{j-1}-a_j \ge 2009-\frac{1}{4}-2008+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

בסתירה לנתון בשאלה. לכן ההנחה אינה נכונה, כלומר ל־ $\{a_n\}$ קיים גבול חלקי נוסף.

פתרון שאלה 6

1. אם $a=b$ כל הביטויים מתאפסים ומתקבל שוויון. בהנתן כי $a>b>0$ נפעיל משפט לגרנג' בקטע $[b,a]$ ונקבל:

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b=\frac{1}{c}(a-b)$$

כאשר $a<c<b$. מכך נובע כנדרש:

$$\frac{a-b}{a}\leq\ln\frac{a}{b}\leq\frac{a-b}{b}$$

אם $b>a$ נשתמש בכך ש $\ln\frac{a}{b}=-\ln\frac{b}{a}$ ומהמקרה הקודם נקבל:

$$\frac{b-a}{b}\leq\ln\frac{b}{a}\leq\frac{b-a}{a}\Longrightarrow\frac{a-b}{a}\leq-\ln\frac{b}{a}\leq\frac{a-b}{b}$$

2. על מנת להראות כי $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{j}-\ln\left(\frac{j+1}{j}\right)\right]$ מתכנס נשתמש בסעיף הראשון:

$$0=\frac{1}{j}-\frac{1}{j}\leq\frac{1}{j}-\ln\left(\frac{j+1}{j}\right)\leq\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}$$

כלומר מדובר בטור חיובי ומקריטריון השוואה הטור מתכנס שכן הטור הטלסקופי $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right]$ מתכנס.

3. נשתמש בסעיף הקודם:

$$\ln n-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\ln(j+1)-\ln j\right]-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{j+1}{j}\right)-\frac{1}{j}\right]-\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{j}-\ln\left(\frac{j+1}{j}\right)\right]=-\gamma$$

הקבוע γ מכונה קבוע אוילר. הקבוע הוגדר לראשונה על ידי המתמטיקאי השוויצרי לאונרד אוילר במאמר אשר פורסם בשנת 1735. אוילר השתמש בסימון C עבור הקבוע, וחישב בראשונה את ערכו בדיוק של 6 ספרות אחרי הנקודה. בשנת 1761 הוא הרחיב את החישוב, ופרסם אותו בדיוק של 16 ספרות אחרי הנקודה. בשנת 1790, הציע המתמטיקאי האיטלקי לורנצו מסקרוני את סימון הקבוע באות γוניסה להרחיב את ערכו של הקבוע עד ל-32 ספרות אחרי הנקודה, אם כי חישובים מאוחרים יותר גילו כי מסקרוני שגה בחישוב הספרה ה-20 אחרי הנקודה. כפי שנאמר, לא ידוע האם קבוע אוילר הוא מספר רציונלי או לא.

פתרון שאלה 7:

(א) נגדיר:

$$-\alpha = \{-q \in \mathbb{Q}; q^* > \alpha\}.$$

נוכיח שהגדרנו חתך.

- $-\alpha$ אינה הקבוצה הריקה: מכיוון ש־ α חתך, קיים מספר רציונלי $q \notin \alpha$. אזי $\alpha \geq q^* > (q+1)^*$, ולכן $-(q+1) \in -\alpha$. מכאן ש־ $-\alpha$ לא ריקה.
- $-\alpha \neq \mathbb{Q}$: יהי $q \in \alpha$ (קיים כזה, כי α לא ריקה). אזי $q^* \leq \alpha$ ולכן $-q \notin -\alpha$.
- $-\alpha$ היא קרן שמאלית: יהיו $r < q$ מספרים רציונלים עם $q \in -\alpha$. אזי $(-r)^* > (-q)^* > \alpha$, ולכן גם $r \in -\alpha$.
- אין איבר מקסימלי ב־ $-\alpha$: יהי $q \in -\alpha$. אזי $\alpha < (-q)^*$ ולכן $\alpha \subsetneq (-q)^*$. יהי $r \in (-q)^* \setminus \alpha$, ויהי $s \in (-q)^*$ מספר גדול יותר מ־ r. אזי $s < -q$ וגם $s^* > r^* \geq \alpha$. מכאן ש־ $-s \in -\alpha$ מקיים $q < -s$. לכן q אינו איבר מקסימלי.

(ב) יהיו $x \in -\alpha, y \in \alpha$. אזי $(-x)^* > \alpha > y^*$, לכן $-x > y$, כלומר $x + y < 0$. מכאן ש־

$$(-\alpha) + \alpha = \{x + y; x \in -\alpha, y \in \alpha\} \subseteq 0^*.$$

נותר להוכיח את ההכלה ההפוכה. יהי $z \in 0^*$, כלומר $z < 0$. מכיוון ש־ α חתך, מצפיפות הרציונלים קיים $q \in \alpha$ שמקיים $q - z \notin \alpha$ (איך נמצא כזה x? נתחיל מ־ $q_0 \in \alpha$ כלשהו. נביט בסדרה החשבונית העולה $q_0, q_0 - z, q_0 - 2z, q_0 - 3z, \ldots$. לא ייתכן שכל איברי הסדרה נמצאים ב־ α, החל ממקום מסויים איברי הסדרה לא שייכים לחתך α. המספר q המבוקש הוא האיבר האחרון בסדרה שעדיין שייך ל־ α). עתה, נבחר $x \in \alpha > q$. אזי $\alpha \geq (q-z)^* > (x-z)^*$ ולכן $y = z - x \in -\alpha$. לסיכום, מצאנו $x \in \alpha, y \in -\alpha$ שמקיימים $z \in x + y$. לכן $z \in (-\alpha) + \alpha$.