<u>חדו"א 1 - פתרון בוחן האמצע</u>

19 בדצמבר 2008

1. הוכח בכיתה.

2. הוכח בכיתה.

3. (א) יהיו $\alpha,\beta\subset\mathbb{Q}$ חתכים. מכפלתם מוגדרת באופן הבא: כאשר מתקיים $\alpha\geq 0^*,\beta\geq 0^*$ נגדיר:

$$\alpha\cdot\beta=\{a\cdot b\,;\,a\in\alpha,b\in\beta,\,a\geq 0,b\geq 0\}\cup 0^*$$

נגדיר את הכפל בשאר המקרים בהסתמך על המקרה בו שני החתכים חיוביים:

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}-|\alpha|\cdot|\beta| & \alpha\geq 0^*,\beta<0^*\\ -|\alpha|\cdot|\beta| & \alpha<0^*,\beta\geq 0^*\\ |\alpha|\cdot|\beta| & \alpha<0^*,\beta<0^*\end{cases}$$

(ב) נסמן $\beta=\{2q;q\in\alpha\}$. נוכיח ראשית ש־ $2^*\cdot\alpha\subseteq\beta$. יהי $x\in 2^*\cdot\alpha$. כלומר,

$$x\in 0^*\cup\{a\cdot b\,;\,0\leq a\in\alpha,0\leq b\in 2^*\}.$$

אם $x\in 0^*$ אז $x<0$ וכמובן שגם $x/2<0$. נתון לנו ש־ $0^*<\alpha$, לכן $x/2\in\alpha$, ומכאן ש־ $x=2\cdot(x/2)\in\beta$.
אם $x\notin 0^*$ אז בהכרח $x\in\{a\cdot b\,;\,0\leq a\in\alpha,0\leq b\in 2^*\}$. כלומר, קיימים מספרים רציונלים אי־שליליים $a\in\alpha,b\in 2^*$ כך ש־ $x=ab$. מהגדרת החתך 2^* ברור ש־ $0\leq b<2$. מכיוון ש־ $a\geq 0$, אנו מסיקים ש־ $ab/2<a$. מצד שני $a\in\alpha$, ו־ α הוא חתך ובפרט α הוא קרן שמאלית. לכן $ab/2\in\alpha$, ו־

$$x=ab=2\cdot\frac{ab}{2}\in\{2q;q\in\alpha\}=\beta.$$

הוכחנו ש־ $2^* \cdot \alpha \subseteq \alpha$. נוכיח עתה ש־ $\beta \subseteq 2^* \cdot \alpha$. יהי $x \in \beta$. אם $x < 0$, אז $x \in 0^*$ ומהגדרת הכפל $x \in 2^* \cdot \alpha$. נותר לדון במקרה $x \geq 0$. נשים לב ש־ $x/2 \in \alpha$. מכיוון ש־ α חתך, אין בו איבר מקסימלי. כלומר, קיים $y \in \alpha$ שמקיים $y > x/2$. מכאן ש־ $2 < x/y$, כלומר $x/y \in 2^*$. מכיוון ש־ $0 \leq x/y \in 2^*$ ו־ $0 \leq y \in \alpha$, קיבלנו ש־

$$x = \frac{x}{y} \cdot y \in 2^* \cdot \alpha$$

הוכחנו ש־ $\beta \subseteq 2^* \cdot \alpha$. בפסקא הקודמת הראנו ש־ $2^* \cdot \alpha \subseteq \alpha$. לכן $\beta = 2^* \cdot \alpha$.

4. (א) נתון כי a_{2n}, a_{2n+1}, a_{5n} תתי סדרות מתכנסות של a_n. נוכיח כי a_n סדרה מתכנסת. נסמן:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = b$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{5n} = c$$

נשים לב כי a_{10n} הינה תת סידרה של a_{2n} ושל a_{5n}. כמו כן עבור סדרה מתכנסת ידוע כי כל תתי הסדרות שלה מתכנסות לאותו הגבול. לכן:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{10n} = \lim_{n\to\infty} a_{5n} = c \implies a = c$$

בנוסף a_{10n+5} הינה תת סידרה של a_{2n+1} ושל a_{5n}. ולכן מתקיים:

$$b = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{10n+5} = \lim_{n\to\infty} a_{5n} = c \implies b = c$$

ולכן $a = b = c$. כלומר כל תתי הסדרות הנ"ל מתכנסות לאותו גבול. כיוון שאיחוד האינדקסים של תתי הסדרות הנ"ל הינו כל $\mathbb{N}$ אז מכך שגבולן של כל תתי הסדרות הללו זהה אפשר להסיק ש a_n מתכנסת. למי שלא השתכנע אז לפי הגדרה:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a \implies \forall \varepsilon_1 > 0\, \exists N_1\, \forall n > N_1\, |a_{2n} - a| < \varepsilon_1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \implies \forall \varepsilon_2 > 0\, \exists N_2\, \forall n > N_2\, |a_{2n+1} - a| < \varepsilon_2$$

נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - a| < \varepsilon$.
נבחר $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ ו־ $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$. עבור $n > N$ נחלק לשני מקרים. אם $n = 2k$:

$$|a_n - a| = |a_{2k} - a| < \varepsilon_1 = \varepsilon$$

ואם $n = 2k + 1$ אז:

$$|a_n - a| = |a_{2k+1} - a| < \varepsilon_2 = \varepsilon$$

כיוון שכל אינדקס n הוא באחת משתי צורות אלו ההוכחה הושלמה.

(ב) נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$b_1 > 0,\ b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 1}{b_n} = b_n + \frac{1}{b_n}$$

נראה כי הסידרה מתכנסת במובן הרחב לאינסוף כלומר: $\lim b_n = +\infty$.
נוכיח כי b_n מונוטונית עולה וחיובית, באינדוקציה:

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{b_1} > b_1 > 0$$

<u>הערה</u>: למעשה $b_2 > 1$ כי נשים לב ש$\frac{1}{b_1} > 1 \implies b_1 < 1$. עתה צעד האינדוקציה:

$$b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 1}{b_n} > \frac{b_n^2}{b_n} = \ b_n > \cdots > b_1 > 0$$

כלומר הסידרה b_n מונוטונית עולה וחיובית. **מכך שזו סידרה מונוטונית קיים לה גבול במובן הרחב לפי משפט מהכיתה.**

נניח תחילה כי קיים גבול סופי לסידרה, כלומר: $\exists \lim b_n = L$. אם כך קיים גם גבול סופי לכל תת סידרה שלה והוא אותו גבול ולכן: $\lim b_{n+1} = L$.
מיכוון שהסדרה עולה וחיובית, בהכרח $L \geq b_1 > 0$. ולכן מאריתמטיקה של גבולות נוכל לחשב:

$$L = \lim b_{n+1} = \lim(\frac{b_n^2 + 1}{b_n}) = \frac{\lim^2 b_n + 1}{\lim b_n} = \frac{L^2 + 1}{L} = L + \frac{1}{L}$$

$$L = L + \frac{1}{L} \implies 0 = \frac{1}{L}$$

בסתירה לכך ש־ L הוא מספר סופי. לכן לא ייתכן שקיים לסדרה גבול סופי. מכיוון שהסדרה עולה ומתכנסת במובן הרחב, בהכרח מתקיים $\lim b_n = +\infty$.