פתרונות חלקיים לתרגיל 11

14 בינואר 2011

1. א.

$$f(x)=\begin{cases}x+\sin 2x & \sin 2x\ge 0\\ x-\sin 2x & \sin 2x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}1+2\cos 2x & \sin 2x\ge 0\\ 1-2\cos 2x & \sin 2x<0\end{cases}$$

לכן $f'(x)>0$ אם ורק אם $\sin 2x\ge 0$ וגם $\cos 2x>-0.5$, או $\sin 2x<0$ וגם $\cos 2x<0.5$. זה קורה אם ורק אם $2x\in[2\pi k,2\pi k+\pi]$ וגם $2x\in\left(2\pi k-\frac{2}{3}\pi,2\pi k+\frac{2}{3}\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$ או $2x\in(2\pi k-\pi,2\pi k)$ וגם $2x\in\left(2\pi k+\frac{\pi}{3},2\pi k+\frac{5\pi}{3}\right)$, וזה קורה אם ורק אם $x\in\left[\pi k,\pi k+\frac{\pi}{3}\right)$ או $x\in\left(\pi k+\frac{\pi}{2},\pi k+\frac{5\pi}{6}\right)$. לכן f עולה ממש בתחומים $x\in\left[\frac{\pi}{2}k,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k\right]$ (מרציפות אפשר לרשום קטעים סגורים), ומנימוק דומה יורדת ממש בתחומים המשלימים.

ב. $f(x)=\frac{(x-2)^2}{e^x}$, $f'(x)=\frac{2(x-2)e^x-(x-2)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(x-2)(2-(x-2))}{e^{2x}}=\frac{(x-2)(4-x)}{e^x}$. $f'(x)=0$ אם ורק אם $x=2,x=4$. $f'(x)>0$ אם ורק אם $2<x<4$, $f'(x)<0$ אם ורק אם $x>4$ או $x<2$, לכן f עולה ממש ב- $[2,4]$ (מרציפות אפשר לרשום קטעים סגורים), ויורדת ממש ב- $(-\infty,2]$, $[4,\infty)$.

ג. $f'(x)=-\sin(\frac{\pi}{x})\cdot\frac{-1}{x^2}=\sin(\frac{\pi}{x})\frac{1}{x^2}$. לכן $f'(x)>0$ אם ורק אם $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)>0$ אם ורק אם $\frac{\pi}{x}\in(2\pi k,2\pi k+\pi)$ אם ורק אם $x\in\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$ (k שלם שונה מאפס). אם $k=0$ זה מתקיים אם ורק אם $x>1$, לכן סה"כ הפונקציה עולה ממש ב- $[1,\infty)$ וב- $k\neq 0$ $\left[\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right]$, ובקטעים המשלימים היא יורדת ממש.

2. א. f מוגדרת לכל $x\ge 1$, וגזירה לכל $x>1$. $f'(x)=3x^2\sqrt{x-1}+\frac{x^3}{2\sqrt{x-1}}=\frac{x^2(7x-6)}{2\sqrt{x-1}}$, וביטוי זה גדול מ- 0 לכל $x>1$, לכן f עולה ממש ב- $(1,\infty)$, והיא רציפה ב- 1, לכן היא עולה ממש ב- $[1,\infty)$ ו- $x=1$ נקודת מינימום גלובאלית.

ב. f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$. $f'(x)=\cos x-\sin x$. $f'(x)=0$ אם ורק אם $\tan x=1$ אם ורק אם $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\,(k\in\mathbb{Z})$. $f''(x)=-\sin x-\cos x$ ורואים כי בנקודות החשודות עבור k זוגי הנגזרת השניה שלילית, ועבור k אי־זוגי חיובית. לכן $\frac{\pi}{4}+\pi k$ נקודת מינימום עבור k אי־זוגי, ומקסימום עבור k זוגי.

ג. f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & x<1\,or\,x>3\\ -(x^2-4x+3) & 1\le x\le 3\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x<1\,or\,x>3\\ 4-2x & 1<x<3\end{cases}$$

$f'(x)=0$ אם ורק אם $x=2$, $f''(2)=-2<0$, לכן $x=2$ נקודת מקסימום מקומי. צריך לראות מה קורה בנקודות שבהן f אינה גזירה, כלומר $1,3$. בנקודות אלה $f(1)=f(3)=0$, אבל תמיד $f(x)\geq 0$, לכן אלו נקודות מינימום גלובאליות של f.

3. א. $f(x)=2^x-3^x=e^{\log 2\cdot x}+e^{\log 3\cdot x}$. $f'(x)=\log 2\cdot 2^x+\log 3\cdot 3^x$. $f'(x)=0$ אם ורק אם $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{\log 3}{\log 2}$ אם ורק אם $e^{\log\left(\frac{2}{3}\right)x}=e^{\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)}$ אם ורק אם $x=\frac{\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}$. נסמן ב- x_0 את הנקודה האחרונה. $f(-2)=2^{-2}-3^{-2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$. $f(5)=2^5-3^5=32-243=-211$. מכיוון ש- $f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ומכיוון ש- f רציפה על הקטע הסגור, המקסימום מתקבל בהכרח, והוא מתקבל בפנים הקטע, וממשפט פרמה הנגזרת בו חייבת להתאפס, לכן מסיקים שהמקסימום הגלובאלי הינו x_0. לבסוף, 5 נק' מינימום גלובאלי.

ג. $f'(x)=2\sin x\cos x-3\sin x\cos^2 x=\sin x\cos x(2-3\cos x)$, ובתחום הנתון $f'(x)=0$ אם ורק אם $x=0$ או $x=\frac{\pi}{2}$ או $x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$. סה"כ הנקודות החשודות הן אלה + הקצוות, כלומר: $0,\frac{\pi}{2},\arccos\left(\frac{2}{3}\right),2$. נציב: $f(0)=1,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,f(2)\approx 0.755$ (את הקירוב האחרון אפשר לקבל באמצעות אי־שוויונים על $\sin,\cos$ הנובעים ממשפט קושי). $f\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{5}{9}+\frac{8}{27}=\frac{23}{27}$, לכן 0 ו- $\frac{\pi}{2}$ נק' מקסימום גלובאלי, ו- 2 נקודת מינימום גלובאלי.

4. א. נפעיל את משפט קושי על $\cos x-1+\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^4}{24}$, ונקבל:

$$\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}-0}{\frac{x^4}{24}-0}=\frac{-\sin\xi+\xi}{\frac{\xi^3}{6}}<1$$

כאשר את הא"ש ראינו בתרגול עבור ξ חיובי, חישבו מה קורה במקרה שהוא שלילי. נעביר אגפים ונקבל $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ($\forall x\neq 0$).

ב. נפעיל את משפט קושי על $\sin x-x+\frac{x^3}{6}$, $\frac{x^5}{120}$ ונקבל:

$$\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}-0}{\frac{x^5}{120}-0}=\frac{\cos\xi-1+\frac{\xi^2}{2}}{\frac{\xi^4}{24}}<1$$

כאשר הא"ש הוא מהסעיף הקודם. נעביר אגפים ונקבל $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ ($\forall x>0$).

5. א. הא"ש שקול ל- $(x^2+1)\arctan x-x>0$ $\forall x>0$. נגדיר $f(x)=(x^2+1)\arctan x-x$. אזי $f'(x)=\frac{x^2+1}{1+x^2}+2x\arctan x-1=2x\arctan x>0$ לכל $x>0$. לכן f עולה ב- $(0,\infty)$ ומרציפות, ב- $[0,\infty)$. $f(0)=0$, לכן לכל $x>0$: $f(x)>0$ וזה מה שרצינו.

ב. נגדיר $f(x)=2x\arctan x-\log(1+x^2)$. אזי $f'(x)=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$. לכן $f'(x)=0$ אם ורק אם $x=0$, $f'(x)>0$ אמ"מ $x>0$, $f'(x)<0$ אמ"מ $x<0$. לכן 0 מינימום מוחלט של f, ו- $f(0)=0$, לכן $f(x)\geq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

ג. נגדיר $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=x^m(1-x)^n$. אזי $f\geq 0$, $f(0)=f(1)=0$. כמו כן

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-nx^m(1-x)^{n-1}=$$
$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m(1-x)-nx)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-(m+n)x)$$

עבור $0<x<1$: $f'(x)=0$ אמ"מ $x=\frac{m}{m+n}$; $f'(x)>0$ אמ"מ $x<\frac{m}{m+n}$; $f'(x)<0$ אמ"מ $x>\frac{m}{m+n}$. לכן $x=\frac{m}{m+n}$ נק' מקסימום מוחלט, ולכן לכל $x\in[0,1]$ $f(x)\le f(\frac{m}{m+n})=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, ולכן $x^m(1-x)^n\le\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

ד. מכך ש- e^x פונקציה עולה, מספיק להוכיח כי $(e-x)\log(e+x)>(e+x)\log(e-x)$. נגדיר $f(x)=(e-x)\log(e+x)-(e+x)\log(e-x)$. אז

$$f'(x)=\frac{e-x}{e+x}-\log(e+x)+\frac{e+x}{e-x}-\log(e-x)=2\left(\frac{e^2+x^2}{e^2-x^2}-\log(e^2-x^2)\right)$$

$$f''(x)=2\left(\frac{2x(e^2-x^2)+2x(e^2+x^2)}{(e^2-x^2)^2}+\frac{2x}{e^2-x^2}\right)$$

מכאן רואים כי $f''(x)>0$ לכל $x\in(o,e)$, לכן f' עולה ממש ב- $[0,e)$ ו- $f'(0)=0$, לכן $f'(x)>0$ ב- $(0,e)$, לכן f עולה ממש ב- $[0,e)$, ו- $f(0)=0$, לכן $f(x)>0$ לכל $x\in(0,e)$ כנדרש.

ה. נגדיר $f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x-\frac{\alpha(\alpha-1)}{8}x^2$. $f(0)=0$. $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha-\frac{1}{4}\alpha(\alpha-1)x$. $f'(0)=0$. עבור $x\in(-1,1)$ מתקיים

$$f''(x)=-\alpha(1-\alpha)(1+x)^{\alpha-2}+\frac{\alpha(1-\alpha)}{4}<-2^{\alpha-2}\alpha(1-\alpha)+\frac{\alpha(1-\alpha)}{4}=\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-2^\alpha)<0$$

לכן f' יורדת ממש ב- $(-1,1)$, לכן $f'(x)>0$ ב- $(-1,0)$ ו- $f'(x)<0$ ב- $(0,1)$, לכן f מקבלת מקסימום מוחלט ב- $x=0$, ו- $f(0)=0$, לכן $f(x)\le 0$ לכל $x\in[-1,1]$ ומכאן מקבלים את הנדרש.

6. עבור $k=1$ הוכחנו בתרגול, נניח $k>1$. נניח כי $f^{(2k)}(c)>0$. מרציפות $f^{(2k)}$ יש סביבה $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ שבה $f^{(2k)}>0$, ולכן בסביבה זאת $f^{(2k-1)}$ עולה ממש. $f^{(2k-1)}(c)=0$, ולכן ב- $(c-\varepsilon,c)$ $f^{(2k-1)}<0$ וב- $(c,c+\varepsilon)$ $f^{(2k-1)}>0$. לכן $f^{(2k-2)}$ יורדת ממש ב- $(c-\varepsilon,c]$ ועולה ממש ב- $[c,c+\varepsilon)$. $f^{(2k-2)}(c)=0$, לכן ב- $(c-\varepsilon,c)$ וגם ב- $(c,c+\varepsilon)$ $f^{(2k-2)}>0$. לכן $f^{(2k-3)}$ עולה ממש ב- $(c-\varepsilon,c]$ וגם ב- $[c,c+\varepsilon)$, וסה"כ היא עולה ממש ב- $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$. ממשיכים הלאה באינדוקציה ומקבלים לבסוף שב- $(c-\varepsilon,c)$ $f'<0$, וב- $(c,c+\varepsilon)$ $f'>0$. לכן f יורדת ממש ב- $(c-\varepsilon,c]$ ועולה ממש ב- $[c,c+\varepsilon)$, ולכן c נקודת מינימום מקומי מוחלט. באופן דומה מראים עבור המקסימום.

7. נסו אינדוקציה - בסיס האינדוקציה הוא הכלל שלמדתם עבור נגזרת של מכפלה; במעבר האינדוקציה השתמשו בזהות פסקל.

8. לכל $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}$ מתקיים $0<\frac{1}{2}\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}<1$, לכן באינדוקציה לכל n מתקיים $0<\frac{1}{2}\le a_n\le\frac{\sqrt{3}}{2}<1$. לכל $n\ge 1$ ממשפט לגרנז' נובע כי:

$$\left|\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}\right|=\left|\frac{\cos(a_{n+1})-\cos(a_n)}{a_{n+1}-a_n}\right|=|-\sin\xi|\le|\xi|\le\frac{\sqrt{3}}{2}<1$$

כאשר ξ בין a_n ל- a_{n+1}. בזמנו ראינו בתרגול שאם סדרה מקיימת $\left|\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}\right|\le q<1$ אזי היא סדרת קושי, ולכן מתכנסת. נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$. מהזהות $a_n=\cos(a_{n-1})$ כשנשאיף את n לאינסוף נקבל כי $\alpha=\cos\alpha$, לכן הוא הפתרון (מדוע הוא יחיד?) של המשוואה $\cos x=x$.

9. נגדיר $f(x)=\sin(\cos x)-x$. $f(0)=\sin 1>0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$, לכן ממע"ב יש $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ עם $f(x_1)=0$. $f'(x)=-\cos(\cos x)\cdot\sin x-1<0$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ לכן f יורדת ממש בקטע בפרט חח"ע, לכן x_1 פיתרון יחיד למשוואה ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. באופן דומה מראים שיש ל- $x=\cos(\sin x)$ פתרון יחיד x_2 ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ב- $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים: $x_1=\sin(\cos x_1)<\cos x_1$ (כי $\cos x_1>0$ $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$). $x_2=\cos(\sin x_2)>\cos x_2$ ($\sin x_2<x_2$ ו- $\cos$ יורדת בתחום הנ"ל). לו היה $x_2\le x_1$ היינו מקבלים $\cos x_2<\cos x_1$ בסתירה לכך ש- $\cos$ יורדת בתחום הנ"ל. לכן $x_1<x_2$.

10. א. $\left((f')^2+f^2\right)'=2f'f+2f'f''\equiv 0$, לכן $(f')^2+f^2$ היא פונקציה קבועה בקטע $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. מכיוון ש- $f(0)=0,\ f'(0)=1$ נקבל כי הקבוע שווה ל- 1.

ב. $f^2=1-(f')^2\le 1$, לכן ערכי f שייכים לקטע $[-1,1]$. אם $g(x)=\arcsin f(x)$, אזי אם $|f(x)|\neq 1$ אז מתקיים $g'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}=\frac{f'(x)}{|f'(x)|}$. $f'(0)=1>0$, ו- f' רציפה, לכן לפחות בסביבה של 0 f' חיובית, ואז $g'(x)=1$.

ג. בסביבה של 0 $g'(x)=1$, לכן קיים c כך ש- $g(x)=x+c$. אבל $g(0)=\arcsin f(0)=\arcsin(0)=0$, לכן $c=0$. לכן $g(x)=x$, לכן $\arcsin f(x)=x$, ולכן $f(x)=\sin x$.

ד. אם נדע כי $|f(x)|\neq 1$ לכל $x\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, זה בדיוק יתקבל בדרך שהוכחנו את הסעיף הקודם. אחרת, קיימת סביבה קטנה יותר, נגיד (a,b) כך ש- $b<\frac{\pi}{2}$ או $a>\frac{-\pi}{2}$ ובלפחות אחד מהקצוות (בה"כ ב- b) מתקיים כי $|f(x)|=1$ אבל בפנים הקטע $|f(x)|\neq 1$. מהסעיף הקודם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f(x)=\sin x$. אבל f רציפה, לכן $1=|f(b)|=\left|\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right|=|\sin b|<1$ בסתירה.

11. בכל מקרה כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת צריך $c\neq 0$. לכל a מתקיים $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^a=1$. כמו כן $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{bx}-1}{cx}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{be^{bx}}{c}=\frac{b}{c}$, לכן כדי ש- $f\in C(\mathbb{R})$ צריך $b=c$. אם זה קורה, אזי

$$f'(x)=\begin{cases}a(1+x)^{a-1} & x>0\\ \frac{bxe^{bx}-(e^{bx}-1)}{bx^2} & x<0\end{cases}$$

מתקיים $\lim\limits_{x\to 0^+}a(1+x)^{a-1}=a$, וכמו כן $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{be^{bx}+xb^2e^{bx}-be^{bx}}{2bx}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{b}{2}e^{bx}=\frac{b}{2}$. לכן כדי ש- $f\in C^1(\mathbb{R})$ צריך $a=\frac{b}{2}$. ממשיכים באותו אופן.

12. א. לכל $x\in(0,1)$ מתקיים

$$(1-x)\sin^2 x=|1-x|\,|sin^2x|\le|1-x|=1-x$$

לכן $f(x)\le x+(1-x)=1$. כמו כן $(1-x)\sin^2 x$ חיובי, לכן $f(x)=x+(1-x)\sin^2 x\ge x$.

ב. מסעיף א. (משתמשים באינדוקציה) a_n עולה, וחסומה ע"י 1, לכן מתכנסת.

ג. נסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$. f רציפה, לכן מהנוסחה $a_{n+1}=f(a_n)$ נקבל כי $x_0=f(x_0)=x_0+(1-x_0)\sin^2 x_0$. אבל $0<a_0\le x_0\le 1$ לכן $\sin x_0\neq 0$, לכן $x_0=1$.

13. נניח בשלילה שקיים $x_1\in(a,b]$ כך ש- $f(x_1)\neq 0$, בה"כ $f(x_1)>0$. f גזירה, ולכן רציפה, לכן יש סביבה של x_1 שבה $f>0$. יותר על כן, אפשר למצוא סביבה (α,β) של x_1 כך ש- $f(x)>0$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$ וכך שגם

יתקיים $f(\alpha)=0$, $\alpha \geq a$, $f(\beta)>0$. מלגרנז, לכל $0<\varepsilon<\beta-\alpha$ מתקיים:

$$|\log f(\beta)-\log f(\alpha+\varepsilon)| = (\beta-\alpha-\varepsilon)\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right| \leq M(\beta-\alpha-\varepsilon) \to M(\beta-\alpha)$$

כאשר $\varepsilon \to 0$. אבל צד שמאל שואף ל- ∞ כאשר $\varepsilon \to 0$, כי $f(\alpha)=0$, סתירה!

14. מלגרנז':

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{q}\right)-\log 1}{\frac{x}{q}-0} = \frac{1}{1+\xi}$$

כאשר $\xi \in (0, \frac{x}{q})$ מצד שני:

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{p}\right)-\log\left(1+\frac{x}{q}\right)}{\frac{x}{p}-\frac{x}{q}} = \frac{1}{1+\eta}$$

כאשר $\eta \in (\frac{x}{q}, \frac{x}{p})$ ולכן

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{q}\right)}{\frac{x}{q}} > \frac{\log(1+\frac{x}{p})-\log\left(1+\frac{x}{q}\right)}{\frac{x}{p}-\frac{x}{q}}$$

ואז

$$\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{q}\right)\log\left(1+\frac{x}{q}\right) > \frac{x}{q}\left(\log(1+\frac{x}{p})-\log\left(1+\frac{x}{q}\right)\right)$$

לכן

$$\frac{x}{p}\log\left(1+\frac{x}{q}\right) > \frac{x}{q}\log\left(1+\frac{x}{p}\right)$$

ואז $q\log\left(1+\frac{x}{q}\right) > p\log\left(1+\frac{x}{p}\right)$, לכן $\log\left(\left(1+\frac{x}{q}\right)^q\right) > \log\left(\left(1+\frac{x}{p}\right)^p\right)$, ולכן $\left(1+\frac{x}{q}\right)^q > \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$.