פתרון (חלקי) מס' 1 - חדו"א 1

1. (א) בכדי לפתור את אי־השוויון $|2x-1|<|x-1|$ נפריד לשלושה תחומים.
תחום ראשון $x>1$. אזי

$$2x-1<x-1 \Rightarrow x<0$$

נסיק כי תחום זה אינו תורם פתרונות.
תחום שני $\frac{1}{2}<x\leq 1$. אזי

$$2x-1<1-x \Rightarrow 3x<2 \Rightarrow x<\frac{2}{3}$$

ולכן תחום זה תורם את הפתרונות $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$.
תחום אחרון $x\leq\frac{1}{2}$. אזי

$$1-2x<1-x \Rightarrow 0<x$$

כלומר בתחום זה הפתרונות הם $0<x\leq\frac{1}{2}$.
לסיכום קבוצת הפתרונות הנה הקטע $(0,\frac{2}{3})$.

(ב) אי־השוויון $|x(1-x)|<0.05$ שקול לאי־השוויון $-0.05<x(1-x)<0.05$. הפתרונות של $x(1-x)=0.05$ הם $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ והפתרונות של $x(1-x)=0.05$ הם $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$. מכיוון ש $x(1-x)$ הנה פרבולה עם מקדם עליון שליל (עצובה), נסיק כי $-0.05<x(1-x)<0.05$ אם ורק אם $x\in(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}},\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}})$.

(ד) ראשית נשים לב שהפונקציה $|\sin x|$ מחזורית π: $|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$. לכן מספיק לבדוק מתי אי־השוויון נכון בקטע בארוך π, למשל $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. נשים לב כי $\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולכן מספיק לבדוק מתי $\sin(-\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})<\sin x<\sin(\frac{\pi}{4})$. מכיוון ש־$\sin$ עולה בקטע שבחרנו נקבל שקבוצת הפתרונות בו היא $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$. לסיכום, אוסף הפתרונות הוא $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{4}+\pi k,\frac{\pi}{4}+\pi k)$.

2. נסמן $t=x-a, s=y-b$. אזי $|t|,|s|<\epsilon$ וגם $x=a+t,\ y=b+s$. מכאן:

$$\begin{aligned}|xy-ab|&=|(a+t)(b+s)-ab|=|ab+ab+tb+ts-ab|=|as+tb+ts|\leq\\ &\leq|as|+|tb|+|ts|=|a||s|+|b||t|+|t||s|<\\ &<|a|\cdot\epsilon+|b|\cdot\epsilon+\epsilon^2=\epsilon(|a|+|b|+|\epsilon|).\end{aligned}$$

4. (א) נניח בשלילה כי $\sqrt[3]{3}\in\mathbb{Q}$. אזי קיימים $p,q\in\mathbb{N}$ כך ש־$\sqrt[3]{3}=\frac{p}{q}$, כאשר p,q זרים (השבר מצומצם). מכאן $p^3=3q^3$. מכיוון ש־3 הוא מספר ראשוני וגם p^3 מתחלק ב־3, נובע כי p מתחלק ב־3. אזי קיים a שלם כך ש־$q^3=9a^3 \Leftarrow p=3a \Leftarrow p^3=27a^3=3q^3$. מכאן שגם q^3 מתחלק ב־3, ולכן גם q מתחלק ב־3. זוהי סתירה להנחה שהשבר מצומצם, לכן $\sqrt[3]{3}$ אינו רציונלי.

(ד) מספר הוא רציונלי אם ורק אם הייצוג העשרוני שלו הוא מחזורי החל ממקום מסויים (גם ייצוג סופי עונה לקרטריון, כי יש בסופו סדרת אפסים שהיא מחזורית). המספר שלפנינו לא מקיים זאת (מדוע?).

5. (א) לא; (ב) כן, למשל $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$; (ג) כן. נתבונן ב־$x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. אם x רציונלי, סיימנו (הוא עונה לדרישה עם $\alpha=\beta=\sqrt{2}$). אחרת, המספר $x^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{2}=2$ עונה לדרישה עם $\alpha=x, \beta=\sqrt{2}$ (שהם שניהם אי־רציונלים).

6. נניח כי $a+\frac{1}{a}=n\in\mathbb{Z}$, אזי נעלה בשלישית ונקבל:

$$n^3=(a+\frac{1}{a})^3=a^3+3a^2\frac{1}{a}+3a\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=a^3+\frac{1}{a^3}+3(a+\frac{1}{a})$$

ומכאן ש־$a^3+\frac{1}{a^3}=n^3-3n\in\mathbb{Z}$.

7. (א) נדגים אגף אחד: $||x|-|y||\leq|x-y|$. נניח כי $|x|>|y|$ (המקרה השני סימטרי בדיוק). אזי צריך להראות $|x|-|y|\leq|x-y|$, או בהעברת אגפים $|x|\leq|x-y|+|y|$. אך זה נובע מאי־שויון המשולש, שלפיו $|x-y|+|y|\geq|(x-y)+y|=|x|$. שויון מתקיים אם ורק אם $x-y, y$ הם שווי־סימן, בנוסף להנחתינו $|x|>|y|$ זה אומר ש־x,y הם שווי־סימן.

(ב) $|a+\frac{1}{a}|\geq 2 \Leftrightarrow (a+\frac{1}{a})^2\geq 4 \Leftrightarrow a^2+2+\frac{1}{a^2}\geq 0 \Leftrightarrow a^2-2+\frac{1}{a^2}\geq 0 \Leftrightarrow (a-\frac{1}{a})^2\geq 0$

ולכן אי השויון נכון לכל a ממשי, כאשר יש שויון אם ורק אם $|a-\frac{1}{a}|=0$, כלומר $a=\frac{1}{a}\Leftarrow a=\pm 1$.

9. (ב) בסיס האינדוקציה ־ $n=1$: $1+x_1\geq 1+x_1$.
צעד האינדוקציה: נניח ל־$n=k$ ונוכיח ל־$n=k+1$. מהנחתינו, לכל $x_1,\dots,x_k\geq 0$ מתקיים:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_k)\geq 1+x_1+\cdots+x_k.$$

מכאן נובע עבור $x_1,\dots,x_{k+1}\geq 0$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdot\dots\cdot(1+x_k)(1+x_{k+1}) &\geq\\ &\geq(1+x_1+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})=\\ &=1+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_{k+1}x_1+\cdots+x_{k+1}x_k\\ &\geq 1+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}.\end{aligned}$$

(ג) בסיס האינדוקציה ־ $n=3$: $n^{n+1}=3^4=81>(n+1)^n=4^3=64$.
צעד האינדוקציה ־ נניח ל־$n=k$, כלומר ש־$k^{k+1}>(k+1)^k$. נובע, אחרי חלוק ב־k^k, כי $k>(1+\frac{1}{k})^k$. מצד שני צריך להוכיח ש־$(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$, או באופן שקול $(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}<k+1$. ובאמת,

$$(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}<(1+\frac{1}{k})^{k+1}=(1+\frac{1}{k})^k\cdot\frac{k+1}{k}<k\cdot\frac{k+1}{k}=k+1.$$

אי־השויון האחרון נובע מהנחת האינדוקציה.

10. נתון כי $a,b,c>0$,$a+b+c=1$. צריך להוכיח כי $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$. בכל מקום שמופיע 1 נציב $a+b+c$, ונקבל:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=\\ &=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\\ &=3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\geq\\ &\geq 3+2+2+2=9\end{aligned}$$

אי־השויון האחרון נובע משאלה 6ב בתרגיל זה.

11.

$$\begin{aligned}&\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\frac{1}{\cos}^2\alpha}=\\ &2\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin(2\alpha).\end{aligned}$$

12. (א) נפריך: נמצא $\epsilon=1$ כך שלכל x קיים y שהורס את הטענה, כלומר כך ש־$|x-y|\geq\epsilon$. אכן, ל־x כלשהו נוכל לבחור $y=x-1$ ולקבל את הדרוש.

(ב) נפריך: לכל $\epsilon>0$, נראה שקיימים x,y כך ש־$|x-y|<\epsilon$. למשל, נוכל לבחור (בהינתן $\epsilon>0$) - $x=0,y=\epsilon/2$.

(ג) להפריך.

(ד) נוכיח: יהי $n\in\mathbb{N}$. עלינו להראות שקיים $x\leq n$ כך ש־$\sqrt{x}\geq x$ וגם $x>0$. התנאי הראשון פירושו $x\geq x^2$, כלומר $1\geq x$. לכן למעשה עלינו למצוא $1\leq x\leq n$ (התנאי $x>0$ נובע מכך). אכן, אפשר תמיד לבחור $x=1$ (או $x=n$).