פתרונות נבחרים לתרגיל 4

19 בנובמבר 2010

1. א. נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$, ואז לכל $n \geq N$ מתקיים $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ (מא"ש המשולש), ולכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. הכיוון ההפוך לא נכון, למשל אם $a_n = (-1)^n$, אז $|a_n| \to 1$, אבל a_n לא מתכנסת.

ב. נניח a_n חסומה, ו- $b_n \to 0$. קיים $M > 0$ כך שלכל n מתקיים $|a_n| \leq M$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, ואז לכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, ולכן $b_n \to 0$.

ג. נניח $a_n \to \infty$, b_n מתכנסת או מתבדרת לאינסוף. יהי $M > 0$. בין אם b_n מתכנסת ובין אם היא מתבדרת לאינסוף, קיים L וקיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $b_n > L$. כמו כן קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n > M - L$, ואז לכל $n \geq N$ מתקיים $a_n + b_n > (M - L) + L = M$, ולכן $a_n + b_n \to \infty$.

ד. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. יהי $\varepsilon > 0$. אם $a = 0$, אזי קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon^2$, ואז לכל $n \geq N$ מתקיים: $\left|\sqrt{a_n}\right| = \sqrt{|a_n|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$, לכן $\sqrt{a_n} \to 0 = \sqrt{a}$.

אם $a \neq 0$, קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$, ואז לכל $n \geq N$ מתקיים

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

לכן $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

ה. נבחר $\varepsilon > 0$ עבורו $p+\varepsilon < 1$. קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\sqrt[n]{a_n} < p+\varepsilon$, ואז $0 \leq a_n < (p+\varepsilon)^n \to 0$, ולכן $a_n \to 0$.

2. א.

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \left|\frac{1\cdot\sin 1 + 2\cdot\sin 2 + \cdots + n\cdot\sin n}{n^3}\right| \leq \frac{|1\cdot\sin 1| + \cdots + |n\cdot\sin n|}{n^3} \leq \\ & \leq \frac{1 + \cdots + n}{n^3} = \frac{n(n+1)}{2n^3} \to 0 \end{aligned}$$

לכן מסנדוויץ' הגבול הוא 0.

ב.

$$a \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \leq (a^n + a^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot a \to a$$

לכן מסנדוויץ' הגבול הוא a.

ג. עבור $n \geq 10$ מתקיים:

$$\frac{n!}{10^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot n}{10^n} \geq \frac{10! \cdot 11^{n-10}}{10^n} = \frac{10!}{11^{10}} \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n \to \infty$$

לכן מסנדוויץ' הגבול הוא ∞.

ד.

$$0 \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} \to 0$$

לכן מסנדוויץ' הגבול הוא 0.

ה.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n+n^2}} = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} \to \infty$$

לכן מסנדוויץ' הגבול הוא ∞.

3. א. $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{2n^2+3n} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+n}\right]^{\frac{2n^2+3n}{n^2+n}} \to e^2$

ב. $\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n+10} = \left[\left(1-\frac{1+n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{1+n}}\right]^{\frac{(n+10)(1+n)}{n^2+1}} \to \frac{1}{e}$

4. ראשית נשים לב, כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n \geq b_n$.
הסבר: מאי־שוויון הממוצעים - $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = b_n$. נראה כי a_n מונוטונית יורדת ו- b_n מונוטונית עולה החל מ- $n=2$: אכן, עבור $n \geq 2$ מתקיים $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$ (הא"ש נובע ממה שהוכחנו לפני שורה). באופן דומה, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n$. עתה - a_n חסומה מלרע ע"י b_2, כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n \geq b_n \geq b_2$. b_n חסומה מלעיל ע"י a_2, כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $b_n \leq a_n \leq a_2$. מכאן שקיימים הגבולות $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. נתבונן בנוסחה $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ונשאיף את n לאינסוף - נקבל כי

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}{2} = \frac{a+b}{2}$$

ולכן $a=b$.

5. א. נוכיח באינדוקציה ש- $0 < x_n < 1$: עבור $n=1$ זה נכון כי $x_1 = 0.5$. נניח נכונות עבור n, ונראה עבור $n+1$: מהנחת האינדוקציה $0 < x_n < 1$, לכן $0 < 1 < 2 - x_n < 2$, לכן

$$0 < x_n(2-x_n) = x_{n+1} = 2x_n - x_n^2 = 1 - (x_n-1)^2 < 1$$

כנדרש. בפרט קיבלנו כי x_n סדרה חסומה, נראה כי היא עולה: ואכן,

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2 = x_n + x_n(1-x_n) > x_n$$

לכן קיים הגבול $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. מהשוויון $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$ נקבל כי $a=a(2-a)$, ולכן $a(a-1)=0$, ולכן $a=0$ או $a=1$. אבל $0.5=x_1\le x_n$ לכל n, ולכן $0.5\le a$. לכן $a=1$.

ג. נראה באינדוקציה כי לכל n מתקיים $2\le a_n\le 3$: עבור $n=1$ זה מהנתון. נניח נכונות עבור n, כלומר כי $3\ge a_n\ge 2$ ונראה עבור $n+1$ - ואכן, $a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}$ ומהנחת האינדוקציה $\frac{3}{2}\ge\frac{3}{a_n}\ge 1$, ולכן $2<2.5\le a_{n+1}\le 3$.

עתה נראה באינדוקציה כי a_n מונוטונית עולה: עבור $n=1$ מתקיים $a_1=2<2.5=4-\frac{3}{2}=a_2$. נניח נכונות עבור n, כלומר כי $a_{n+1}\ge a_n$, ונראה עבור $n+1$ - ואכן, $a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}\le 4-\frac{3}{a_{n+1}}=a_{n+2}$.

a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, לכן קיים הגבול $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. לכל n מתקיים $a_n\ge a_1=2$, לכן גם $a\ge 2$.

מהשוויון $a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}$ ומחשבון גבולות נקבל כי $a=4-\frac{3}{a}$, לכן $a^2-4a+3=0$, ולכן $a=1$ או $a=3$, אבל $a\ge 2$ לכן $a=3$.

6. א. נסמן $S_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. מאי-שוויון הממוצעים מתקיים $H_n\le b_n\le S_n$.

ממשפט על גבול ממוצע חשבוני נקבל כי $S_n\to a$. מאותו משפט נקבל כי $\frac{1}{H_n}=\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\to\frac{1}{a}$, ולכן $H_n\to a$.

לבסוף מסנדוויץ' נקבל כי $b_n\to a$ כנדרש.

ב. נגדיר סדרה $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $y_1=x_1$, $y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$ עבור $n\ge 2$. מהנתון $y_n\to L$, ומסעיף א' נקבל כי $\sqrt[n]{x_n}=\sqrt[n]{x_1\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\sqrt[n]{y_1y_2\ldots y_n}\to L$.

ג. (ii) נסמן $x_n=n!$. $\frac{x_{n+1}}{x_n}=n+1\to\infty$, לכן מסעיף ב. $\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{x_n}\to\infty$.

7. א. a_n עולה, כי $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3^{n+1}+1}>0$. נראה כי a_n חסומה מלעיל: לכל k טבעי מתקיים $\frac{1}{3^k}<\frac{1}{3^k+1}$, ולכן

$$a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)<\frac{1}{2}$$

קיבלנו ש- a_n עולה וחסומה מלעיל, לכן היא מתכנסת.

ג. מתקיים $\frac{n+10}{2n+1}=\frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1}=\frac{c_{n+1}}{c_n}$, ונשים לב ש- $1\ge\frac{n+10}{2n+1}\Leftrightarrow n+10\le 2n+1\Leftrightarrow n\ge 9$, לכן הכל מ- $n=9$, c_n סדרה מונוטונית יורדת. זאת סדרה חיובית, לכן היא חסומה מלרע ע"י 0, ולכן היא מתכנסת.

ד. מהא"ש $|\sin x|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$, נקבל כי לכל n: $|d_n|=2^n\left|\sin\frac{\pi}{2^n}\right|\le 2^n\frac{\pi}{2^n}=\pi$ - לכן d_n חסומה, ובפרט חסומה מלעיל. נבדוק כי היא מונוטונית עולה: נשתמש בזהות $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, ונרשום

$$\sin\frac{\pi}{2^n}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

נקבל:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}>1$$

קיבלנו ש- d_n עולה וחסומה מלעיל, לכן היא מתכנסת.

8. א. לכל $l\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sqrt{n+l}-\sqrt{n}=\frac{n+l-n}{\sqrt{n+l}+\sqrt{n}}=\frac{l}{\sqrt{n+l}+\sqrt{n}}\to 0$$

לכן לכל $1 \leq l \leq k$ נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_l(\sqrt{n+l}-\sqrt{n}) = 0$. ולכן -

$$a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_k\sqrt{n+k} = (-a_1 - a_2 - \cdots - a_k)\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_k\sqrt{n+k} =$$
$$= a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + a_2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) + \cdots + a_k(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}) \to 0$$

ג. מתקיים

$$n^n \leq \sum_{k=1}^{n} k^k = n^n + (n-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} k^k \leq n^n + (n-1)^{n-1} + (n-2)\cdot(n-2)^{(n-2)} =$$
$$= n^n + (n-1)^{n-1} + (n-2)^{n-1} \leq n^n + n^{n-1} + n^{n-1} = n^n + 2n^{n-1}$$

מכאן:

$$1 = \frac{n^n}{n^n} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^k}{n^n} \leq \frac{n^n + 2n^{n-1}}{n^n} = 1 + \frac{2}{n} \to 1$$

לכן מסנדוויץ' הגבול הוא 1.