סמסטר א' תשע"א

פתרון (חלקי) לתרגיל מס' 7 - חדו"א 1

1. נקח למשל $f(x)=\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. קודם כל, על הטבעיים יש גבול, כי לכל n טבעי $f(n)=0$ (זו סדרה קבועה). אבל לפונקציה אין לה גבול באינסוף. מדוע? כי ניתן למצוא שתי תת־סדרות $x_n,\ y_n\to\infty$ כך ש־$f(x_n),f(y_n)$ בעלות גבול שונה (או חסרות גבול). למשל, $x_n=n$ $y_n=n+\frac{1}{2}$ עונות על הדרישה ($f(x_n)=0\to 0,\ f(y_n)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$).
הכיוון ההפוך לא יכול לקרות, כי אם $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ לא קיים, אז זה מפריך את הגדרת הגבול של היינה ולכן גם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ לא קיים.

2. נוכיח למשל את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2-6}=-3$ לפי היינה. תהי $x_n\to 2$. לפי ארתימטיקה של גבולות של סדרות:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+4}{x_n^2-6}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+4)}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2-6)}=\frac{6}{-2}=-3$$

3. (א) יהי $\epsilon>0$. נניח ש־$|x-4|<\delta$ ונבחר את $\delta>0$ בסוף. ניתן להניח ש־$\delta<4$ (היא הרי לבחירתינו). נקבל:
$$|\sqrt{x}-2|=\left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right|<\frac{\delta}{\sqrt{x}+2}<\frac{\delta}{2}$$
לכן אם נבחר $\delta:=\min(2\epsilon,4)$, אז לכל x כך ש־$|x-4|<\delta$ יתקיים $|\sqrt{x}-2|>\epsilon$.

(ב) יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא M כך שלכל $x>M$ מתקיים $|e^{1/x}-1|<\epsilon$. נפשט את אי־שיוויון זה: הוא שקול ל־
$$1-\epsilon<e^{1/x}<1+\epsilon.$$
אם $x>1$ אז $\frac{1}{x}<1$ ומכאן $e^{1/x}<e^{-1}<1<1+\epsilon$ וכך השגנו את אי השויון הימני. אי השויון השמאלי שקול ל־$\ln(1-\epsilon)<1/x$, כלומר $x>\frac{1}{\ln(1-\epsilon)}$. נבחר $M:=\max(1,\ln^{-1}(1-\epsilon))$ ונקבל את הדרוש.
שימו לב, אם $\epsilon>1$ אז לכאורה הפתרון לא עובד, כי אי אפשר להציב $1-\epsilon<0$ בתוך $\ln$. אבל, מספיק להוכיח את הגדרת הגבול לכל $0<\epsilon<1$: ל־$\epsilon>1$ נקח את ה־M שמתאים למשל ל־$\epsilon=1/2$, ואז לכל $x>M$ יתקיים $|f(x)-L|<\frac{1}{2}<\epsilon$, ולכן M זה טוב גם ל־ϵ שלנו.

4. (א) נפרק $8-x^3=(2-x)(4+2x+x^2)$. אזי אם $2-\delta<x<2$ (x בסביבה שמאלית של 2 שנבחר אח"כ) נקבל כי $-\delta<x-2<0$ או $\delta>2-x>0$. אזי הביטוי
$$\frac{2}{8-x^3}=\frac{2}{(2-x)(4+2x+x^2)}>\frac{2}{\delta(4+2x+x^2)}<\frac{2}{\delta(4+2\cdot 2+2^2)}=\frac{1}{16\delta}$$
לכן, בהינתן $M>0$ נוכל לבחור $\delta=\frac{1}{16M}$, ואז לכל $2-\delta<x<2$ יתקיים $\frac{2}{8-x^3}>M$. לפי ההגדרה, זה מוכיח ש־$\lim\limits_{x\to 2-}\frac{2}{8-x^3}=+\infty$.

למעשה, בתרגיל זה בקשו לחשב את הגבול. בהמשך למדנו חוקי אריתמטיקה שיפתרו תרגיל זה בקלות: מנה של שתי פונקציות, כך שהמונה שואף למספר חיובי, והמכנה שואף ל־$0+$ (כלומר דרך מספרים חיוביים) ־ שואפת ל־$+\infty$.
שימו לב שהגבול הדו צדדי $\lim_{x\to 2-}\frac{2}{8-x^3}=+\infty$ לא קיים.

5. (א)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{1}=1$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, כיוון ש־$\frac{1}{x}$ שואפת לאפס ו־$\sin x$ חסומה (ראו תרגיל 8).

(ג)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(5\frac{\sin 5x}{5x}-3\frac{\sin 3x}{3x}\right)=$$
$$5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}-3\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}=5\cdot 1-3\cdot 1=2$$

השתמשנו בכך שההצבות $t=5x$, $s=3x$ מקיימות $t\to 0,\ s\to 0$ בהינתן ש־$x\to 0$.

(ה) כאשר $x>1$ אז $0<\frac{1}{x}<1$ ולכן $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=0$. כלומר, עבור $x>1$ הפונקציה שלנו שווה זהותית אפס: $x\cdot\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=0$. מכאן שהגבול הוא 0.

(ו) נשים לב ש־$\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=n$ פירושו $\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}$. לכן עבור $x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ מתקיים $1>x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor>\frac{n}{n+1}$. לכל $\epsilon>0$ קיים N טבעי כך שלכל $n>N$, $\frac{n}{n+1}>1-\epsilon$. נגדיר $\delta=\frac{1}{N}$. אז לכל $0<x<\delta=\frac{1}{N}$, יתקיים ש־$\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=n>N$, ומכאן: $1>x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor>\frac{n}{n+1}<1-\epsilon$ כנדרש מההגדרה. כנ"ל ניתן לעשות ל־$-\delta<x<0$.

(ז) $(3^x-2^x)^{1/x}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^{1/x}$. נראה בעזרת סנדביץ' ש־$\lim_{x\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^{1/x}=1$, ולכן הגבול כולו הוא 3. אכן:

$$\frac{1}{3}\leq 1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\leq 1,\ \ \forall x>1$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/x}\leq\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^{1/x}\leq 1$$

כיון ש־$\lim_{x\to\infty}a^{1/x}=1$ לכל $a>0$, הסנדביץ' הושלם.

6. (א) נניח בשלילה שקיימת סביבה (a,b) שבה הפונקציה חסומה ע"י M. נבחר n טבעי כך ש־$n>\max M,\frac{1}{b-a}$. מעקרון ארכימדס קיים מספר רציונלי מהצורה $x=\frac{m}{n}$ בסביבה זו, ואז $f(x)=n>M$ בסתירה.

(למי שלא ראה או לא זוכר את העקרון: נניח בה"כ $0 < a < b$. נלך בצעדי $1/n$ ונניח שלא נכנס לקטע (a,b) לעולם. אז קיים k טבעי כך ש-$\frac{k}{n} < a < b < \frac{k+1}{n}$ - זהו הצעד שבו עקפנו את הקטע. אבל זו סתירה, כי מכאן נובע שאורך הקטע קטן מ-$b - a < \frac{1}{n}$, ואנו בחרנו את n כך שההיפך יתקיים).

(ב) כיוון שהפונקציה לא חסומה בסביבת x_0, לא יתכן שיש גבול סופי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (כמו בסדרות, פונקציה עם גבול סופי בנקודה חסומה בסביבת הנקודה).

בנוסף, כיוון שבכל סביבה יש נקודה בה הפונקציה שווה אפס, לא יתכן ש-$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$: בהגדרה של שאיפה לאינסוף צריך שלכל M תהיה $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ יתקיים $f(x) > M$. זה לא מתקיים ל-$M = 1$, כי יש אי רציונלי $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ שעבורו $f(x) = 0 < M = 1$.

7. $\lim_{x\to 0+} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \dfrac{5}{\alpha}$. הגבול קיים אם שני הגבולות החד-צדדיים שווים, כלומר $\alpha = 5/3$.

8. מהנתון ש-f חסומה בסביבה של x_0, נסיק שקיים $\delta_1 > 0$ וקיים $M < 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$ מתקיים $|f(x)| < M$. יהי $\epsilon > 0$. מהנתון ש-$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_2$ מתקיים $|g(x)| < \epsilon/M$ (שמוש בהגדרת הגבול עם ϵ/M במקום ϵ). כעת נבחר $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. נקבל שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אזי $|f(x)g(x)| < M|g(x)| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$.

9. הטענות בדרך כלל נכונות. יש לשים לב שבהגדרת הגבול תמיד דורשים שהפונקציות מוגדרות בסביבה מנוקבת, לכן יכולה להווצר בעיה בעיף א' אם למשל $f(x) = 1$ קבועה ו-$g(x)$ אינה מוגדרת דווקא בנקודה 1. בעיה דומה תיווצר אם f מקבלת אינסוף פעמים את הערך 1 בסביבת $x = 2$. אבל, אם מניחים שזה לא קורה, ההוכחה דומה לזו שניתנה בתרגול להרכבה של גבולות. כנ"ל סעיף ב'.

10. (א) דרך קצרה שמשתמשת בסעיף הבא היא לשים לב ש-$|f| = \max(f, -f)$ ולכן היא רציפה כמקסימום של פונקציות רציפות. כדאי לנסות להוכיח ישירות. זה מאוד דומה לפתרון של סעיף ב' (וקצת יותר קל) לכן נשמיט את זה כאן.

(ב) נוכיח למשל שהמקסימום $M(x) = \max(f(x), g(x))$ הוא פונקציה רציפה בקטע. תהי $x_0 \in [a,b]$ - נראה רציפות ב-x. אם $f(x_0) > g(x_0)$, אז הפונקציה הרציפה $f - g$ היא חיובית בנקודה x_0. מתרגיל שנפתר בכיתה קיימת סביבה של x_0, I, כך שלכל $x \in I$: $f(x) - g(x) > 0$, או פשוט $f(x) > g(x)$. מכאן שקיימת סביבה I בה $M(x) = f(x)\ \forall x \in I$. כיוון ש-$f$ רציפה ב-x_0 נובע שגם M רציפה ב-x_0 (נפעיל את ההגדרה עבור f, ובבואנו לבחור δ נקטין אותה אם צריך כדי להכנס לסביבה I). בדומה אם $g(x_0) > f(x_0)$.

נניח כעת ש-$f(x_0) = g(x_0) = L$. נעבוד לפי ההגדרה: לכל $\epsilon > 0$ קיימת (מרציפות f) $\delta_1 > 0$ כך ש-$0 < |x - x_0| < \delta_1$ גורר $|f(x) - L| < \epsilon$. כמו כן קיימת (מרציפות g) $\delta_2 > 0$ כך ש-$0 < |x - x_0| < \delta_2$ גורר $|g(x) - L| < \epsilon$. נבחר $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, ואז עבור $0 < |x - x_0| < \delta$ יתקיים $|M(x) - M(x_0)| = |M(x) - L| < \epsilon$ (כי $M(x)$ הוא למעשה $f(x)$ או $g(x)$).

11. (א) בשאלה זו n הוא פרמטר קבוע (אין גבול לפי n אלא הפונקציה פשוט תלויה בערכו). הפונקציה $\sin(\pi n x)$ היא רציפה. לכן נקודות אי הרציפות הן בדיוק אלה של הפונקציה $\lfloor x^2 \rfloor$. פונקציה זו מקבלת ערך קבוע $m \in \mathbb{N}$ עבור x שמקיימים $m \le x^2 < m + 1$,

כלומר בטווח $\sqrt{m+1} > x \geq \sqrt{m}$. מכאן שנקודות מהצורה $\sqrt{m}$ עבור $m \in \mathbb{N}$ הן נקודות אי רציפות (מסוג קפיצה), ומלבדן הפונקציה רציפה.

(ב) נחשב תחילה את הגבול עבור x מסויים (נחשוב עליו כקבוע). $f(x) = x \lim_{n\to\infty} \frac{xe^{nx}+1}{e^{nx}+1}$.

אם $x < 0$ אז $\lim_{n\to\infty} e^{nx} = 0$ ולכן הגבול שלנו הוא $f(x) = x \cdot 1$. בתחום זה יש רציפות.

אם $x > 0$ אז $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$ ולכן נחלק מונה ומכנה ב־e^{nx} לקבלת: $f(x) = x \lim_{n\to\infty} \frac{x+e^{-nx}}{1+e^{-nx}} = x \cdot \frac{x}{1} = x^2$. גם בתחום זה יש רציפות.

בנקודה $x = 0$ נקבל פשוט $f(0) = 0$. הגבול מימין ומשמאל ב־0 שווה לערך $f(0)$.
לכן בסה"כ הפונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$.