סיכומים בחדו"א 2

שירי ארטשטיין וירון אוסטרובר

2013

א. אינטגרלים

1 הקדמה.

שטח של מלבן בעל צלעות a,b הוא כמובן ab.

נאמר שרוצים לחשב את השטח מתחת לגרף של $f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2$

נבחר נקודות $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ ונסמן $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. כאן $i=1,\ldots,n$.

נביט בשני הסכומים

$$\underline{A}_n=\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2\Delta x_i \qquad \overline{A}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i$$

אשר מייצגים את השטח של איחוד של מלבנים, במקרה אחד החוסמים את הגרף מבחוץ, ובמקרה השני אשר חסומים בתוך הגרף.

השטח ה"אמיתי" A מקיים, אינטואיטיבית לפחות, $\underline{A}_n\le A\le\overline{A}_n$.

נבצע בחירה קונקרטית של הנקודות: $x_i=\frac{i}{n}$ ועבורן נחשב את הסדרות הללו

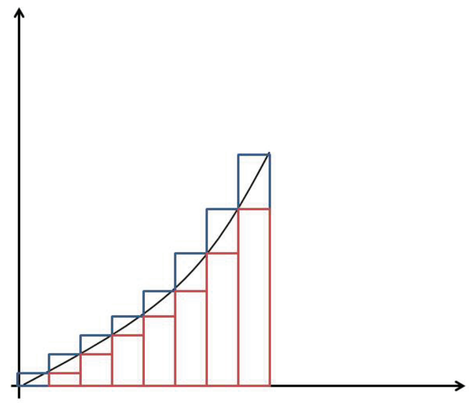
$$\underline{A}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

$$\overline{A}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

אפילו לפני שניגש לחישוב הסכום, אנו רואים כי $\overline{A}_n-\underline{A}_n=\frac{1}{n}\to 0$ כך שלפי כלל הסנדוויץ, שני הגבולות יהיו שווים ל-A.

את החישוב עצמו נבצע על פי נוסחא לסכום סופי של ריבועי המספרים הטבעיים, נוסחא שנלמדה בתיכון ושניתן להוכיח בקלות באינדוקציה, או בהוכחה הגרפית המצורפת באיור 1.

$$\sum_{i=1}^{m}i^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$



איור 1: השטח מתחת ל x^2 ב $[0,1]$

הערה 1.1 את הנסחא לסכום של חזקות שלישיות אתם זוכרים?

$$\sum_{i=1}^{m} i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

נקבל אם כך כי $\overline{A}_n = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \to \frac{1}{3}$ וכך גם הגבול השני.

תרגיל 1.2 ביצוע תהליך זהה עבור הפונקציה $f(x) = x^3 \quad f : [0,1] \to \mathbb{R},$ בצירוף עם הנסחא לסכום חזקות שלישיות תתן את הערך $\frac{1}{4}$.

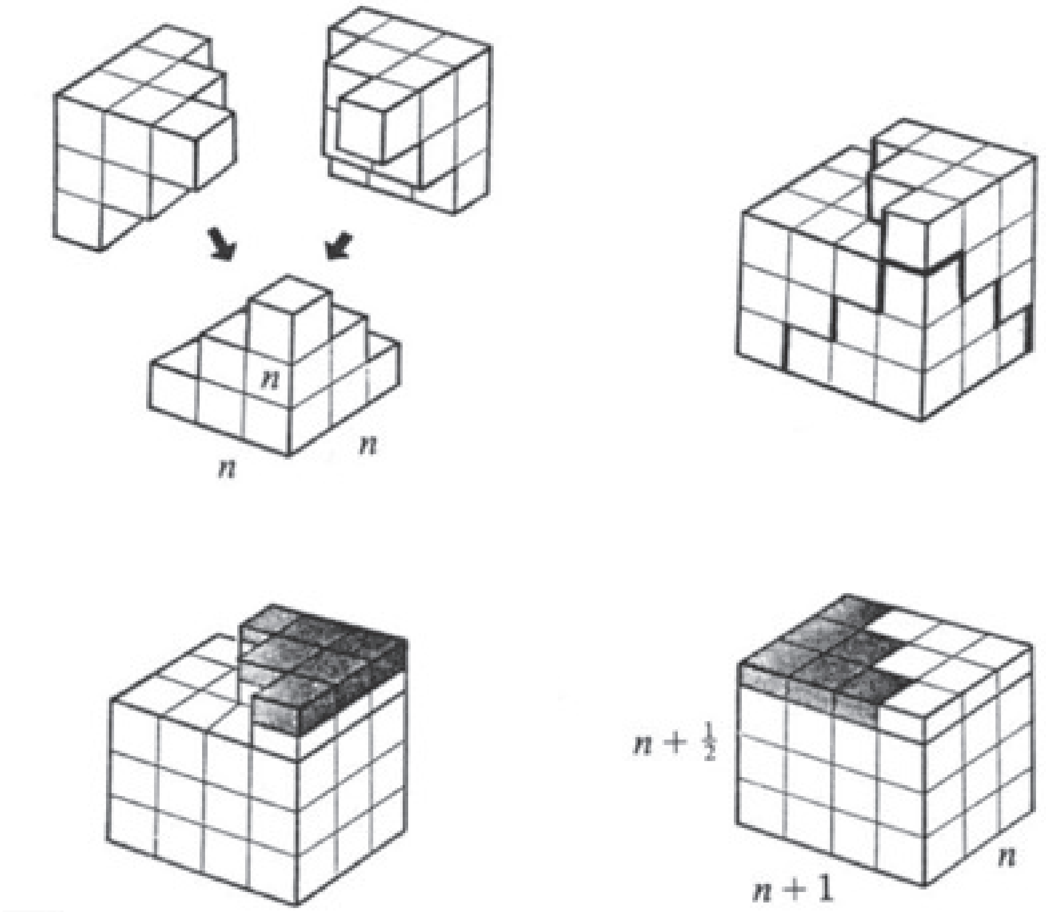
דברים אלה נעשו על ידי פרמה בשנת 1636, אבל כבר ארכימדס השתמש בשיטה של "מיצוי" כדי לחשב שטח של מעגל בקירוב טוב כרצוננו (אפילו המושג של "טוב כרצוננו" קיים אצל ארכימדס), כך שהרעיון הבסיסי היה קיים. כמובן שמושג הגבול כהלכתו היה צריך לחכות אי אלו שנים, כפי שלמדנו בחדוא 1.

שימו לב שהיינו צריכים להשתמש בנוסחאות מדוייקות לסכום ריבועים וסכום חזקות אחרות. אם רוצים לבצע תהליך דומה עבור $f(x) = x^\alpha \quad f : [0,1] \to \mathbb{R},$ כאשר $\alpha > -1$, ואין לנו נסחאות כאלה, יש בכל זאת משהו שאפשר לעשות - מסתבר שיותר קל לעבוד עם סדרת נקודות אחרת, שאיננה שוות מרחקים. (התוצאה, כפי שניתן לנחש, היא תמיד $\frac{1}{\alpha+1}$).

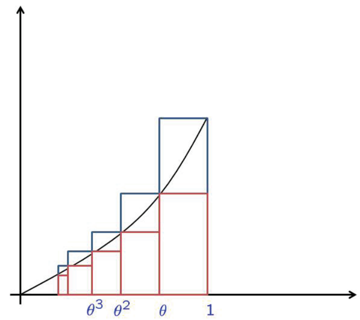
הבה נדגים זאת.

לשם יצירת סדרת הנקודות, נבחר מספר $0 < \theta < 1$, כאשר עליכם לחשוב עליו כעל קרוב ל-1.

נגדיר את $y_i = \theta^i$ כאשר $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ואז את x_i נגדיר להיות אותה סדרה אבל בסדר הפוך זאת אומרת $x_0 = 0, x_1 = y_{n-1}, x_2 = y_{n-2}, \cdots, x_{n-1} = y_1, x_n = 1$.



איור 2: הוכחה גיאומטרית ־ סכום ריבועים



איור 3: השטח מתחת לגרף של x^α

שימו לב שאף על פי שהסדרה סופית, על ידי בחירה של n הולך ועולה, ניתן למעשה לעבוד עם הסדרה האינסופית $y_i = \theta^i$ ואז הסדרה יורדת מ 1 ועד ל 0 ואין דרך "לסדר" אותה כעולה. הדבר לא צריך להפריע לכם כהוא זה, מה גם שעוד לא הגדרנו דברים במדויק אלא אנו עוסקים בדוגמא בלבד.

עבור כל מספר $0 < \theta < 1$ נחשב שני סכומים

$$\overline{A}_\theta = \sum_{i=0}^{\infty} (\theta^i - \theta^{i+1})\theta^{i\alpha}$$

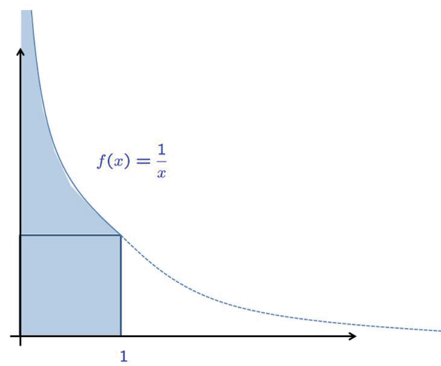
$$\underline{A}_\theta = \sum_{i=0}^{\infty} (\theta^i - \theta^{i+1})\theta^{(i+1)\alpha}$$

שני הביטויים ניתנים בקלות לחישוב, שכן המדובר בסדרות הנדסיות. למשל

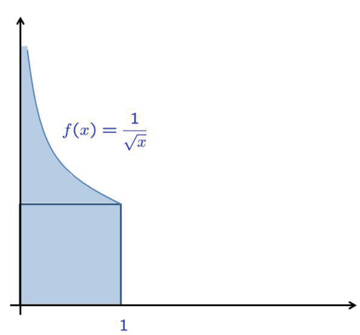
$$\overline{A}_\theta = \sum_{i=0}^{\infty} (\theta^i - \theta^{i+1})\theta^{i\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{i(\alpha+1)}(1-\theta) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{\alpha+1}}$$

כעת ניקח את הגבול כאשר $\theta \to 1$ דהיינו המרווחים שואפים לגודל אפסי. שימו לב - המרווח הגדול ביותר כאן הוא הראשון, שאורכו $1-\theta$. נקבל ששני הגבולות שווים ל $\frac{1}{\alpha+1}$.

נעיר שהשיטה עובדת לכל $\alpha > -1$ אבל צריך הרבה "אומץ" כדי לעבור מתחום חסום, כמו של $\alpha \geq 0$ לתחום לא-חסום, כמו של $-1 < \alpha < 0$. למשל, עבור הפונקציה $f(x) = 1/\sqrt{x}$ נקבל שני שטחים - ריבוע ששטחו אחד, וצורה לא חסומה שעל פי החישוב גם ה"שטח" שלה הוא 1.



איור 4: השטח מתחת לגרף של $1/x$



איור 5: השטח מתחת לגרף של $1/\sqrt{x}$

כאשר מיישמים את השיטה עבור הפונקציה $f(x) = 1/x$ או חזקות אחרות הקטנות מ־(-1) מקבלים שהגבול הוא ∞.

כל האמור מעלה היה הקדמה אינטואיטיבית (עם מעט חישובים לא קשים). בפרק 3 נגדיר במדוייק מהו שטח מתחת לגרף של פונקציה, וגם נסביר כיצד ניתן לחשב אותו. אולם לשם כך צריך לדעת לעשות פעולה "הפוכה" לנגזרת. בהנתן פונקציה f, למצוא פונקציה אחרת F שכשגוזרים אותה מקבלים את הפונקציה המקורית, $F' = f$. על כך נסוב הפרק (הקצר) הבא.

2 פונקציה קדומה

עבור $\alpha = -1$, גם השטח מתחת לגרף של $f(t) = 1/t$ בקטע $[1, \infty)$ יוצא אינסופי, שכן מדובר בדיוק באותו השטח עליו דיברנו בסעיף הקודם, מסובב ב־$90°$.

אבל אם נחשב את השטח הכלוא מתחת לגרף ומעל לקטע $[1, x]$, נאמר, כאשר $x > 1$, נקבל מספר סופי. המספר הזה, מפתיע ־ או לא ־ יוצא בדיוק $\ln(x)$. איך יוצא דבר כזה? נסמן את השטח הנ"ל ב־$A(x)$. נחשב את

$$A(x + \Delta x) = A(x) + \Delta x \cdot \frac{1}{x} + o(\Delta x)$$

כאשר את החישוב הזה מראים באופן גיאומטרי שכן הפונקציה יורדת לכן השטח יותר קטן מאשר

$$A(x) + \Delta x \cdot \frac{1}{x}$$

ויותר גדול מאשר

$$A(x) + \Delta x \cdot [\frac{1}{x + \Delta x}] = A(x) + \Delta x \cdot \frac{1}{x} - \frac{(\Delta x)^2}{x(x + \Delta x)} \geq A(x) + \Delta x \cdot \frac{1}{x} - \frac{(\Delta x)^2}{x^2}$$

לכן $A'(x) = 1/x$ וזה אומר ש $A(x) = \ln(x) + c$ שכן כבר יש לנו בנמצא פונקציה שנגזרתה $1/x$ וכל שתי פונקציות כאלה (בעלות נגזרת זהה) נבדלות בקבוע. משום שעל פי בחירתנו, $A(1) = 0$, אנו רואים כי $c = 0$. זה כמובן חלק של עקרון יותר כללי שנלמד אותו בהקדם, ושנקרא משפט ניוטון לייבניץ (סוף המאה ה־17). הוא אומר שלפונקציה F שמוגדרת להיות השטח תחת גרף של פונקציה אחרת f (בעלת תכונות מסוימות) יש נגזרת, ונגזרת זו היא ערך הפונקציה בנקודה $F' = f$. לכן אנו רואים שכדאי לפתח שיטות למציאת פונקציה כך שנגזרתה שווה לפונקציה נתונה. התהליך הזה נקרא "מציאת פונקציה קדומה". רוב השיטות הנ"ל נלמדות, בקורס הזה, בשיעורי התירגול בלבד. החלק התיאורטי נלמד בשיעור.

הגדרה 2.1 תהיינה $F, f : (a, b) \to \mathbb{R}$. נאמר ש F היא קדומה של f אם F גזירה בכל (a, b), ומתקיים $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in (a, b)$. בקטע סגור $[a, b]$ נדרוש גם ש $F'_+(a) = f(a)$ וכן ש $F'_-(b) = f(b)$.

לאוסף כל הקדומות של פונקציה קוראים לפעמים "האינטגרל הלא מסויים שלה".

הערות 2.2 1. כל שתי קדומות נבדלות בקבוע (חדו"א 1) ולהפך ־ אם F קדומה של f אז גם $F+c$ קדומה שלה לכל $c \in \mathbb{R}$.

2. למצוא פונקציה קדומה לפונקציה נתונה זו משימה קשה יותר מלגזור! אין כללי אצבע אלא מספר שיטות קיימות שתלמדו בתירגולים ושצריך לנסות ולראות האם הן מניבות תוצה. מה שכן ־ ברגע שמצאתם מועמדת להיות קדומה, קל מאוד לוודא האם תשובתכם נכונה על ידי גזירה.

3. יש פונקציות אלמנטריות (ולמעשה ־ לרובן, במובן מסויים שלא יילמד אצלנו) כך שהפונקציה הקדומה שלהן איננה אלמנטרית. אחת הדוגמאות החשובות היא הקדומה של הגאוסיין $e^{-x^2/2}$. מסמנים אותה (מנורמלת)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

שזהו סימון לאינטגרל מסויים (שנלמד עוד מעט) אבל אפשר להוכיח שלא ניתן להציג אותה באמצעות הפונקציות האלמנטריות ללא שימוש בגבולות.

3 אינטגרל רימן בקטע סופי וסגור

בפרק זה נדון באופן פורמלי במושג האינטגרל המסויים.

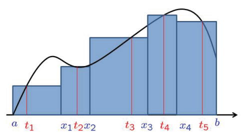
3.1 הגדרות וסימונים

הגדרה 3.1 [חלוקה] בהנתן קטע $[a,b]$, קבוצה סופית של נקודות $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ תקרא חלוקה של הקטע אם $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. שימו לב שהקבוצה מראש איננה מסודרת, אבל אנחנו רושמים אותה לפי סדר עולה וללא כפילויות כדי להקל על הכתיבה. לקטע $[x_{i-1}, x_i]$ נקרא תת הקטע ה־i־י, כך שמדובר ב־n תת קטעים כאלה, כל שניים עוקבים נחתכים בנקודה, והם ממצים את הקטע כולו. מדד העדינות של החלוקה Π, המסומן על ידי $\lambda(\Pi)$, מוגדר להיות אורך תת הקטע הגדול ביותר, דהיינו, אם נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ אזי

$$\lambda(\Pi) = \max_{i=1,\dots,n} |\Delta x_i|$$

שימו לב שהחלוקות שלנו תמיד סופיות. בפרט, המצה שתואר בפרק 1 בו בחרנו עם $\{\theta^i\}_{i=0}^{\infty}$ איננו חלוקה שכן מספר האיברים איננו סופי (אולם $\{\theta^i\}_{i=0}^{N}$ זוהי חלוקה חוקית). כעת נגדיר מהו עידון של חלוקה

הגדרה 3.2 [עידון] בהנתן שתי חלוקות של הקטע $[a,b]$, Π_1, Π_2, נאמר ש Π_2 היא עידון של Π_1 אם מתקיים שכקבוצות של נקודות $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$. בפרט מכאן נובע שמדד העדינות של Π_1 גדול יותר משל Π_2, זאת אומרת $\lambda(\Pi_2) \le \lambda(\Pi_1)$. באופן שקול ניתן לומר כי Π_2 מתקבלת מ Π_1 על ידי תוספת של מספר סופי של נקודות.



איור 6: סכום רימן

הגדרה 3.3 [נקודות מתאימות] בהנתן חלוקה $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ נאמר שהנקודות $\{t_1, \cdots, t_n\}$ הן נקודות מתאימות לחלוקה אם מתקיים ש $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ לכל $i = 1, \ldots, n$.

למשל, ניתן לבחור $t_i = x_i$ או $t_i = x_{i-1}$ או $t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, או כל דבר אחר בתוך הקטע (ולא צריכה להיות "חוקיות" או "תבנית" בבחירה).

הגדרה 3.4 [סכום רימן] בהנתן $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חלוקה Π ונקודות מתאימות t_i נגדיר את סכום רימן שלהם להיות

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum_i f(t_i) \Delta x_i$$

גרפית ניתן לצייר זאת כך

ונראה לנו (אנטואיטיבית) שכאשר העדינות תשאף ל־0, הסכום הנ"ל יתקרב בערכו לשטח שמתחת לגרף. כאשר זה המקרה, נאמר שהפונקציה אינטגרבילית לפי רימן ("אינטגרבילית רימן"):

הגדרה 3.5 [אינטגרביליות רימן] תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. נאמר שהיא אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ והאינטגרל שלה שווה למספר I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ ולכל בחירה של נקודות המתאימות ל Π, $\{t_i\}$, מתקיים

$$|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| < \varepsilon$$

במקרה כזה נסמן

$$I = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f$$

את אוסף כל הפונקציות שהן אינטגרביליות רימן בקטע $[a,b]$ נסמן $R([a,b])$.

הערה 3.6 שימו לב: לעיתים תראו את הסימון הבא

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S(f,\Pi,\{t_i\})$$

שהוא אמור להביע את כל אוסף הכמתים שרשמנו בהגדרה (שהרי לא למדנו בחדוא 1 מה פירוש לעשות גבול כאשר "העדינות של החלוקה המשתתפת בגבול שואפת לאפס"). היזהרו משימוש לא מושכל בסימון כזה ־ הוא אמור להכיל את העובדה שזה לכל חלוקה מעדינות מספיק קטנה ולכל בחירה של נקודות מתאימות.

דוגמאות 3.7 1. $f(x)=c$ לכל חלוקה ולכל נקודות מתאימות הסכום תמיד יוצא $c(b-a)$.

2. $f(x)=D(x)$ פונקציית דיריכלה

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אז עבור, נאמר, $\varepsilon=(b-a)/2$ לא קיימת אף δ מתאימה כי תמיד תהיינה נקודות מתאימות (לכל חלוקה) רציונליות, וגם נקודות מתאימות אירציונאליות, כך שסכומי רימן יצאו 0 ו־$(b-a)$ בהתאמה, ובפרט לא יהיו ε־קרובים לאותו מספר.

סוף שיעור 1

3.2 אינטגרביליות

3.2.1 אינטגרביליות גוררת חסימות

משפט 3.8 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אם $f\in R([a,b])$ אזי f פונקציה חסומה.

הוכחה: נשתמש בהגדרת האינטגרל עבור $\varepsilon=1$. נקבל כי קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה עם $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים שלכל בחירה של נקודות מתאימות $\{t_i\}$, $I-1<S(f,\Pi,\{t_i\})<I+1$. נבחר חלוקה אחת כזו. אילו הפונקציה לא חסומה, יש תת קטע מן החלוקה $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ כך שעליו הפונקציה אינה חסומה.

מצד שני, נבחר נקודות מתאימות $\{t_i\}_{i\neq i_0}$ בכל שאר תת הקטעים. לכל נקודה t בתת הקטע הזה מתקיים ש

$$I-1-\sum_{i\neq i_0}|f(t_i)|\Delta x_i<f(t)\Delta x_{i_0}<I+1+\sum_{i\neq i_0}|f(t_i)|\Delta x_i$$

כך שקיבלנו חסימות, וזו סתירה. ■

הערה 3.9 הדבר לכאורה לא מתיישב עם החישוב שלנו של אינטגרל של הפונקציה הלא חסומה $f(x)=1/\sqrt{x}$ בקטע $[0,1]$. אכן, לשם כך נידרש להגדרה יותר כללית של אינטגרל, האינטגרל הלא אמיתי, שיופיע בפרק 4.

3.2.2 סכומי דרבו

ראינו בסעיף הקודם שיש המון כמתים (לכל חלוקה, לכל נקודות) וזה מקשה על הבדיקה של האם פונקציה מסויימת אינטגרבילית או לא. הנה הגדרה נוספת ושקולה לאינטגרביליות רימן.

הגדרה 3.10 [סכום דרבו עליון ותחתון] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $\Pi=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה. נסמן $M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f$ ו־$m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}f$. ונגדיר את סכום דרבו העליון להיות

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i$$

ואת התחתון להיות

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i$$

כמובן, כאן מדובר במלבנים חוסמים וחסומים, כמו בדוגמא הראשונה שראינו בפרק 1.

נובע מהגדרת אינפימום וסופרמום שלכל בחירה של נקודות מתאימות יתקיים

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le S(f,\Pi,\{t_i\})\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$$

ולמעשה עובדה זאת מתארת אותם במדוייק, כפי שמסבירה הלמה הבאה

למה 3.11 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ו $\Pi=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה. אזי

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f,\Pi) &= \sup_{\{t_i\}} S(f,\Pi,\{t_i\}) \\ \underline{\Sigma}(f,\Pi) &= \inf_{\{t_i\}} S(f,\Pi,\{t_i\})\end{aligned}$$

כאשר ה־ inf וה־ sup הם ביחס לכל האופנים של בחירת נקודות מתאימות לחלוקה Π.

הוכחה: אכן, אי שוויון אחד ברור בכל שוויון, למשל ראינו $\overline{\Sigma}\geq S$ לכל בחירת נקודות מתאימות. כעת יהי $\varepsilon>0$ ונבחר בכל קטע נקודה t_i כך ש $f(t_i)\geq M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$ ואז הסכום יקיים

$$S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i\geq\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$$

לכן על פי תכונה שקולה להיותך סופרמום, מתקיים השוויון הראשון. ההוכחה של השוויון השני ־ באופן דומה. ■

למה 3.12 [מונוטוניות] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ו$\Pi_1\subseteq\Pi_2$ שתי חלוקות. אזי

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2),\qquad \underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$$

הוכחה: נראה את אי השוויון השמאלי. מספיק להראות שתוספת של נקודה אחת אינה מגדילה את $\overline{\Sigma}$. נניח שהחלוקה הנתונה היא $\Pi=\{x_0,\dots,x_n\}$ ותהי $p\in(x_{i-1},x_i)$. נסמן $\Pi'=\Pi\cup\{p\}$. תת הקטעים שהחלוקות מגדירות הם זהים, למעט הקטע $[x_{i-1},x_i]$ שמוחלף בזוג הקטעים $[x_{i-1},p],[p,x_i]$.
לכן ההפרש בין סכומי דרבו העליונים המתאימים הוא

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\overline{\Sigma}(f,\Pi')=[\Delta x_i\sup_{[x_{i-1},x_i]}f]-[(x_i-p)\sup_{[p,x_i]}f]-[(p-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},p]}f]=$$

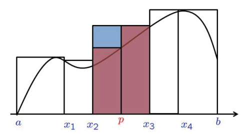
$$=(x_i-p)[\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[p,x_i]}f]+(p-x_{i-1})[\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[x_{i-1},p]}f]\geq 0$$

באינדוקציה על פני הוספת נקודות, ההוכחה הושלמה. הוכחת אי השוויון השני מאד דומה. ■

ניתן גם לתאר את ההוכחה בצורה גרפית, בכל שלב השטח הכחול גדול מהשטח האדום בציור הבא
והנה מסקנה יפה שנובעת מהלמה הקודמת:

מסקנה 3.13 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה וΠ_1,Π_2 שתי חלוקות כלשהן, אזי

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$$



איור 7: השטח של סכום עליון קטן בעידון

הוכחה: אכן, ניקח חלוקה שלישית $\Pi_3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$ שהיא עידון של שתיהן ועבורה יתקיים

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi_3) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_3) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$$

. ■

מהמסקנה נובע שניתן להגדיר את המספרים

$$\overline{I}(f) = \inf_{\Pi} \overline{\Sigma}(f,\Pi) \qquad \underline{I}(f) = \sup_{\Pi} \underline{\Sigma}(f,\Pi)$$

ולכל חלוקה יתקיים

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi)$$

כעת ניתן להגדיר אינטגרביליות באופן ישיר יותר, שבעצם דורש ש $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. זאת נעשה בעוד מספר דקות, במסקנה 3.21. לפני כן נסח את קריטריון דרבו הראשון לאניטגרביליות.

משפט 3.14 [קריטריון דרבו לאינטגרביליות רימן] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. $f\in R([a,b])$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל Π המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$.

הערה 3.15 היתרון כאן הוא כמובן שאין צורך לדעת את ערכו של I על מנת לוודא את התנאי הנ"ל.

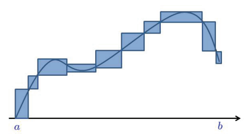
הוכחה: נניח אם כן כי $f\in R([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$. נבחר, על פי ההגדרה של אינטגרביליות, את $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ יתקיים שלכל בחירה של נקודות מתאימות $|I - S(f,\Pi,\{t_i\})| < \varepsilon/2$.
נובע לכן על פי למה 3.11 שלכל Πהמקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi) = \sup S(f,\Pi,\{t_i\}) \leq I + \varepsilon/2$$

וכן

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi) = \inf S(f,\Pi,\{t_i\}) \geq I - \varepsilon/2$$

ובפרט, לכל חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ יתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$.



איור 8: קריטריון דרבו

להוכחת הכיוון השני נניח ש f מקיימת את קריטריון דרבו. לכן בהכרח מתקיים כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π_0 (ולמעשה - לכל חלוקה מעדינות קטנה מספיק) כך ש $\underline{\Sigma}(f,\Pi_0) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_0) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi_0)+\varepsilon$. בפרט, $0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$. משום ש ε הוא שרירותי, נקבל $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. נסמן מספר זה ב-$I$.
יהי $\varepsilon > 0$ ו $\delta > 0$ הנתון על פי הקריטריון. לכל חלוקה Π המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ ולכל בחירת נקודות מתאימות מתקיים

$$I - \varepsilon \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi) \leq S(f,\Pi,\{t_i\}) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi) + \varepsilon \leq I + \varepsilon$$

■

הערה 3.16 ברגע שיודעים ש $f \in R([a,b])$ אפשר לבחור כל סדרת חלוקות שמקיימת $\lambda(\Pi_n) \to 0$ וכל סדרת נקודות מתאימות (לכל חלוקה - נקודות מתאימות לה - $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{M_n}$ כאשר M_n מספר הנקודות בחלוקה) ובהכרח יתקיים $S(f,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{M_n}) \to \int_a^b f$. הערה תמימה זו תסייע לנו מאוד בהוכחת כללי אינטגרציה.

גרפית, המובן של קריטריון דרבו מאוד פשוט:

מכסים את הגרף עם מלבנים (מאוזנים) ומבקשים שסכום שטחי המלבנים הללו יהיה קטן כרצוננו

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n}(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f)\Delta x_i < \varepsilon$$

הגובה של כל מלבן כזה הוא ההפרש בין הערך הסופרימלי של הפונקציה בקטע לבין הערך האינפימלי. נוח לשימוש בעתיד יהיה להגדיר מספר זה כתנודת הפונקציה בקטע:

הגדרה 3.17 [תנודה] התנודה של f על קטע J מוגדרת להיות

$$\omega(f,J) = \sup_J f - \inf_J f = \sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$$

למשל, $\omega(D,J)=1$ לפונקציית דיריכלה, לכל קטע שאיננו נקודה. לפונקציה רציפה במ"ש מתקיים ש $\omega(f,J)\to 0$ כאשר אורך הקטע שואף ל-0 (ללא תלות במיקום שלו).

נשים לב גם ש $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$. זה גורם לנו להגדיר

הגדרה 3.18 [תנודה של פונקציה ביחס לחלוקה] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ו$\Pi=\{x_0,\cdots,x_n\}$ חלוקה. נגדיר $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

בשפה זו אפשר לנסח את קריטריון דרבו כך: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל Π המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\omega(f,\Pi)<\varepsilon$.

לפני שנמשיך נציין עוד שתי עובדות לגבי חלוקות, עידון, וקריטריון דרבו. המסקנה היא שימושית ביותר.

למה 3.19 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi\cup\{p\}=\Pi'$ שתי חלוקות (כך שהאחת מתקבלת מהשנייה על ידי הוספת נקודה). אזי

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi')+\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b]),\qquad \underline{\Sigma}(f,\Pi)\geq\underline{\Sigma}(f,\Pi')-\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b])$$

ואם $\Pi\cup\{p_1,\ldots,p_m\}=\Pi''$ אזי

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi'')+m\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b]),\qquad \underline{\Sigma}(f,\Pi)\geq\underline{\Sigma}(f,\Pi'')-m\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b])$$

הוכחה: מספיק להוכיח את הא"ש העליונים ואז להשתמש באינדוקציה על פני הוספת נקודות (נשים לב שהעדינות רק קטנה בכל שלב אינדוקטיבי). נוכיח את השמאלי

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\overline{\Sigma}(f,\Pi')=(x_i-p)[\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[p,x_i]}f]+(p-x_{i-1})[\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[x_{i-1},p]}f]$$

$$\leq\omega(f,[x_{i-1},x_i])\{(x_i-p)+(p-x_{i-1})\}\leq\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b])$$

■

טענה 3.20 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה Π המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ יתקיים

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)\geq\overline{I}(f)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon,\qquad \underline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\underline{I}(f)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$$

הוכחה: שוב, נוכיח רק אחד מהם. מהגדרת $\overline{I}(f)$ כאינפימום נובע שקיימת חלוקה כלשהי, נסמן אותה Π_0 כך ש $\overline{I}(f) \geq \overline{\Sigma}(f,\Pi_0) - \varepsilon/2$. לחלוקה זו יש מספר סופי של נקודות, נאמר m_0 נקודות. נבחר את $\delta = \frac{\varepsilon}{2m_0\lambda(\Pi_0)}$. כעת תהי חלוקה כלשהי עם עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$. לקבלת חלוקה חדשה, עדינה יותר משתיהן, נגדיר $\Pi' = \Pi \cup \Pi_0$. בחלוקה החדשה יש לכל היותר m_0 נקודות יותר מאשר ב Π ולכן מתקיים על פי למה 3.19 כי $\overline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi') + m_0\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b])$. מצד שני, משום ש Π' היא עידון של Π_0, אנו יודעים גם כי $\overline{\Sigma}(f,\Pi') \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_0)$ ומבחירת δ נקבל:

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_0) + m_0\lambda(\Pi)\omega(f,[a,b]) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \overline{I}(f) + \varepsilon$$

■

מסקנה 3.21 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ונניח ש $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. אזי $f \in R([a,b])$.

הוכחה: אכן, נשתמש בטענה 3.20 על מנת לבחור δ כך שלכל חלוקה עם $\lambda(\Pi) < \delta$ יתקיים

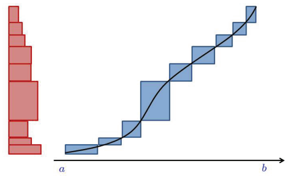
$$\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon/2 \leq \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi) + \varepsilon/2$$

ולכן יתקיים קריטריון דרבו $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$. ■

מסקנה 3.22 [קריטריון דרבו משופר] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ונניח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת Π המקיימת $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$. אזי $f \in R([a,b])$.

הוכחה: אכן, הנתון הנ"ל מבטיח ש $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ כמו בהוכחת משפט 3.14. כעת נשתמש בטענה הקודמת. ■

סוף שיעור 2



איור 9: מונוטוניות גוררת אינטגרביליות

3.2.3 רציפות גוררת אינטגרביליות

משפט 3.23 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי $f\in R([a,b])$.

הוכחה: ממשפט קנטור של חדו"א 1, f רציפה במ"ש. יהי $\varepsilon>0$. לכן קיים $\delta>0$ כך ש $|x-y|<\delta$ גורר $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/(b-a)$. לכן, אם $|J|<\delta$ (כאן $|J|$ מסמל את אורך הקטע) מתקיים $\omega(f,J)\le\varepsilon/(b-a)$, ולכן לכל חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ יתקיים

$$\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon$$

ולכן מתקיים קריטריום דרבו לאינטגרביליות. ■

נעיר שכמובן שרציפות איננה תנאי הכרחי לאינטגרביליות, שכן קל לבדוק ישירות שהפונקציה הבאה: $f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & x\in[1,2]\end{cases}$, אינטגרבילית רימן על תחום הגדרתה ואיננה רציפה.

3.2.4 מונוטוניות גוררת אינטגרביליות

משפט 3.24 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. אזי $f\in R([a,b])$.

ההסבר האינטואיטיבי הוא כדלהלן:

היזכרו בקריטריון דרבו המנוסח בצורה גרפית. כשהפונקציה מונוטונית, ניתן להזיז את כל המלבנים החוסמים כך שיהיו זה מעל זה, ללא חפיפות למעט בקצותיהם. מתקבל אם כן מגדל אשר מוכל במלבן גבוה שגובהו כהפרש ערכי הפונקציה בקצוות, ואילו רוחבו הוא עדינות החלוקה.

הוכחה: נניח שהפונקציה עולה ואת המקרה היורד נשאיר לכם. קל לוודא שההשתנות של הפונקציה בקטע $[x,y]$ כלשהו נתונה על ידי $\omega(f,[x,y])=f(y)-f(x)$ ולכן בחירה של $\delta=\varepsilon/(f(b)-f(a))$

תבטיח שלכל חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ יתקיים

$$\begin{aligned}\omega(f,\Pi) &= \sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i \\ &< \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon\end{aligned}$$

זאת אומרת מתקיים קריטריון דרבו, ועל פי משפט 3.14, הפונקציה אינטגרבילית. ■

3.2.5 כמה משפטים מבניים

שלושת המשפטים בסעיף זה מתאימים לאיחוד קטעים זרים, להכלה בין שני קטעים, ולאיחוד של כל תת־הקטעים השמאליים המוכלים בקטע נתון. במשפט הבא, כדי להיות ממש פורמאליים, צריך להניח ש $f|_{[a,b]} \in R([a,b])$ וש־ $f|_{[b,c]} \in R([b,c])$, אבל אנחנו מסכימים שכאשר אומרים על $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ שהיא מקיימת $f \in R([a,b])$ עבור $b \in (a,c)$, הכוונה היא ש $f|_{[a,b]} \in R([a,b])$.

משפט 3.25 [איחוד קטעים זרים] תהיינה $a<b<c$ ותהי $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה. נניח שמתקיים $f \in R([a,b])$ וכן $f \in R([b,c])$. אזי מתקיים $f \in R([a,c])$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ונבחר חלוקה Π_1 של $[a,b]$ כך ש $\omega(f|_{[a,b]},\Pi_1)<\varepsilon/2$ וחלוקה Π_2 של $[b,c]$ כך ש $\omega(f|_{[b,c]},[b,c])<\varepsilon/2$. נסמן $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$. זוהי חלוקה של $[a,c]$ ומקיים

$$\omega(f,\Pi)=\omega(f|_{[a,b]},\Pi_1)+\omega(f|_{[b,c]},\Pi_2)\le\varepsilon$$

על פי מסקנה 3.22, $f \in R([a,c])$. ■

משפט 3.26 [תת קטע] תהיינה $a<b<c$ ותהי $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה. נניח שמתקיים $f \in R([a,c])$ אזי מתקיים $f \in R([a,b])$. באופן דומה מתקיים $f \in R([b,c])$.

הוכחה: תהי פונקציה חסומה כנ"ל. יהי $\varepsilon>0$. נבחר חלוקה Π_0 של $[a,c]$ כך ש $\omega(f,\Pi_0)<\varepsilon$. נוסיף לה נקודה, $\Pi_1=\Pi_0\cup\{b\}$ ועדיין $\omega(f,\Pi_1)<\varepsilon$ כי זה עידון שלה. כעת נצמצם את החלוקה לקטע $[a,b]$ ונסמן $\Pi_2=[a,b]\cap\Pi_1$. מתקיים ש

$$\omega(f|_{[a,b]},\Pi_2)\le\omega(f,\Pi_1)\le\varepsilon$$

על פי מסקנה 3.22, $f|_{[a,b]} \in R([a,b])$. ■

משפט 3.27 [כל תת הקטעים השמאליים] תהי $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה. נניח שמתקיים $f \in R([a,b])$ לכל $a<b<c$. אזי מתקיים $f \in R([a,c])$.

הוכחה: אכן, יהי $\varepsilon > 0$ ונבחר את $b = c - \varepsilon/(2\omega(f,[a,c]))$. על פי הנתון, מאינטגרביליות הפונקציה בקטע זה, קיימת חלוקה Π_1 של $[a,b]$ כך ש $\omega(f|_{[a,b]}, \Pi_1) < \varepsilon/2$.

נביט בחלוקה $\Pi = \Pi_1 \cup \{c\}$ של הקטע $[a,c]$. מתקיים

$$\omega(f,\Pi) = \omega(f|_{[a,b]}, \Pi_1) + \frac{\varepsilon}{2\omega(f,[a,c])}\omega(f,[b,c]) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ושוב לפי מסקנה 3.22, $f \in R([a,c])$. ∎

הערה 3.28 משפט זהה כמובן תקף עבור כל תת הקטעים הימניים.

טענה 3.29 שינוי פונקציה בנקודה בודדת אינו משפיע על האינטגרביליות שלה.

הוכחה: אכן, נניח שהפונקציה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,c]$, תהי $a < b < c$ ונגדיר את g להיות אותה הפונקציה, למעט בנקודה b שם ניתן לה ערך אחר. החסימות נשמרת כמובן. הפונקציה g היא אינטגרבילית בכל קטע $[a,x]$ עבור $x < b$ (כי היא זהה ל f שאינטגרבילית שם לפי 3.26) ולכן על פי משפט 3.27 גם על $[a,b]$ כולו, ובדומה עבור $[b,c]$ (שם משתמשים בטענה הזהה למשפט 3.27 עבור תת קטעים ימניים) ולכן, על פי משפט 3.25, g אינטגרבילית על כל $[a,b]$. ∎

מסקנה 3.30 באופן דומה, הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ בקטע $[-1,1]$, אף שאיננה רציפה (ולא משנה איזה ערך היינו נותנים לה בראשית), עודנה אינטגרבילית רימן.

לבסוף, כמסקנה מטענה 3.29 ממשפט 3.25 וממשפטים 3.23 ו 3.24 נקבל קריטריון התקף למשפחה גדולה יחסית של פונקציות

מסקנה 3.31 כל $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ שהיא חסומה וכן מונוטונית למקוטעין או רציפה למקוטעין (ז"א פרט למספר סופי של נקודות) היא אינטגרבילית.

3.2.6 עוד משפטים מבניים

בסעיף זה נראה שתכונת האינטגרביליות סגורה תחת סכום, כפל בסקלר, ומכפלה.

משפט 3.32 תהיינה $f,g \in R([a,b])$ ו $c \in \mathbb{R}$ אזי

(1) $f+g \in R([a,b])$, $cf \in R([a,b])$

(2) $|f| \in R([a,b])$

(3) $f^2 \in R([a,b])$

(4) $f \cdot g \in R([a,b])$

הוכחה: (1) אכן נשים לב לשתי עובדות פשוטות: לכל חלוקה Π מתקיים $\omega(cf,\Pi) = |c|\omega(f,\Pi)$ וגם $\omega(f+g,\Pi) \leq \omega(f,\Pi) + \omega(g,\Pi)$. העובדה הראשונה מיידית והשנייה מתקיימת משום שלכל תת קטע, $\sup_J(f+g) \leq \sup_J f + \sup_J g$ ובדומה $\inf_J(f+g) \geq \inf_J f + \inf_J g$.

(2) מתקיים $\omega(|f|,\Pi)\le\omega(f,\Pi)$ שכן לכל תת קטע
$\omega(|f|,J)=\sup_{x,y\in J}(|f(x)|-|f(y)|)\le\sup_J(|f(x)-f(y)|)=\omega(f,J)$.

(3) כעת נניח שהפונקציה חסומה על ידי M, אזי
$\omega(f^2,J)=\sup_J(f^2(x)-f^2(y))=\sup_J[(f(x)-f(y))(f(x)+f(y))]\le 2M\omega(f,J)$.

(4) לבסוף, נשים לב ש $f\cdot g=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$ ומהסעיפים הקודמים, סיימנו. ■

הערה 3.33 למעשה, בסעיף (3) העובדה היא כללית יותר ־ לכל $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה $H\circ f\in R([a,b])$, אבל לזה לא נתנו כרגע הוכחה. ההוכחה שנתנו בסעיף (3) מתאימה למקרה של, למשל, H שהיא גזירה ברציפות, שכן אז ניתן לחסום את $H(f(x))-H(f(y))$ על ידי קבוע כפול $f(x)-f(y)$ (תוך שימוש בכך שהטווח של f חסום). את העובדה שהרכבה של רציפה על אינטרגבילית נותרת אינטגרבילית אתם מוכיחים בתירגול. ישנו עקרון כללי יותר שאומר שפונקציה היא אינטגרבילית רימן אם ורק אם המידה של נקודות אי הרציפות שלה היא אפס. קבוצה $A\subset\mathbb{R}$ נקראת ממידה אפס אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרה (אולי אינסופית) של קטעים פתוחים $A_i=(a_i,b_i)$ כך ש $A\subset\cup_i A_i$ וכן $\sum_i|A_i|=\sum_i(b_i-a_i)<\varepsilon$. כל קבוצה סופית או בת מניה היא ממידה אפס, אבל יש גם דוגמאות (כמו קבוצת קנטור) לקבוצות מעוצמה $\aleph$ שהן ממידה אפס. לא נדון בו כעת, אך בעזרתו (כאשר מכירים את מושג המידה) ההוכחות של ארבעת הסעיפים נעשות קלות מאוד, וגם של עובדות נוספות. המשפט הנ"ל ומושג ה"מידה אפס" יילמד בקורס חדוא 3 וכן בקורס "פונקציות ממשיות".

הערה 3.34 הערה נוספת היא שכדאי לכם לנסות להראות ישירות את (4) ללא ה"טריק", פשוט על ידי שימוש בחסמים שלהן והפרדת $f(x)g(x)-f(y)g(y)=(f(x)-f(y))g(x)+f(y)(g(x)-g(y))$.

הערה 3.35 הערה אחרונה ־ שוב כדאי לבדוק שאתם יכולים להראות שאם $|g|\ge c>0$ אינטגרבילית אז גם $1/g$ אינטגרבילית. שוב, חיסמו את ההשתנות של $1/g$ בקטע אחד על ידי מספר התלוי ב c ובהשתנות של g וסכמו על פני הקטעים.

3.3 על ערך האינטגרל

שימו לב, במשפט 3.25 למשל, רק הראינו שהפונקציה המוגדרת על איחוד קטעים, שהיא אינטגרבילית בכל אחד מהם, היא אינטגרבילית גם על האיחוד. לא הראינו, אף על פי שזו התכונה המרכזית והשימושית, שהאינטגרל על האיחוד הינו סכום האינטגרלים. תכונות דומות קשורות לאינטגרל של סכום, ולכפל בסקלר. בסעיף זה נדון בתכונות המתייחסות לערך המיספרי עצמו של האינטגרל.

3.3.1 שתי פונקציות שמזדהות על קבוצה צפופה

ניזכר במושג הצפיפות אותו למדנו בחדוא 1: יהי $I\subset\mathbb{R}$ קטע כלשהו (סופי או לא). קבוצה $A\subset I$ תקרא צפופה ב־I אם לכל קטע פתוח $J\subseteq I$ מתקיים $A\cap J\neq\emptyset$.

למשל: הרציונאליים צפופים בממשיים. גם $\{\frac{p}{2^i}\ :\ p \in \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{N}\}$ צפופה בממשיים.

טענה 3.36 תהיינה $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ המקיימות $f, g \in R([a,b])$ ונניח שהן מזדהות על קבוצה צפופה ב $[a,b]$. (דהיינו: קיימת $A \subseteq [a,b]$ צפופה כך ש $f|_A = g|_A$) אזי

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

הוכחה: נבחר חלוקות Π_n כך ש $\lambda(\Pi_n) \to 0$. לכל חלוקה כזו נבחר נקודות מתאימות $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{M_n}$ שהן בתוך הקבוצה A. זה אפשרי מצפיפות. על פי הנתון מתקיים

$$S(f, \Pi, \{t_i^{(n)}\}) = S(g, \Pi, \{t_i^{(n)}\})$$

ועל פי הגדרת אינטגרביליות (ראו הערה 3.16) מתקיים $S(f, \Pi, \{t_i^{(n)}\}) \to_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ ובדומה עבור g. ■

סוף שיעור 3

3.3.2 כמה משפטים פשוטים

מסקנה 3.37 שינוי פונקציה במספר סופי של נקודות אינו משפיע על אינטגרביליות, וגם לא על ערך האינטגרל שלה.

הוכחה: אכן, העובדה שהיא נשארת אינטגרבילית נובעת מטענה 3.29 ואילו העובדה שערך האינטגרל נשמר היא בדיוק הטענה הקודמת. למעשה, אם משנים פונקציה במספר בן־מניה של נקודות, עדיין ערך האינטגרל נשמר, אבל רק בהנחה שהפונקציה החדשה גם היא אינטגרבילית, דבר שלא בהכרח נכון (כמו בפונקציית דיריכלה, ששונה מהפונקציה הזהותית אפס רק במספר בן מניה של נקודות). ■

משפט 3.38 [ליניאריות האינטגרל באינטגרנד] תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימות $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. מתקיים $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

הוכחה: אכן, אנו כבר יודעים שהפונקציה הנ"ל אינטגרבילית. נבחר סדרת חלוקות עם עדינות שואפת לאפס, סכומי רימן המתאימים מקיימים $S(\alpha f+\beta g,\Pi,\{t_i\})=\alpha S(f,\Pi,\{t_i\})+\beta S(g,\Pi,\{t_i\})$ ולכן גם בגבול, שהוא האינטגרל (שוב, ראו הערה 3.16) - יישמר השוויון. ■

הערה 3.39 שימו לב לעובדה שיש נסחא לאינטגרל של סכום במונחי האינטגרלים המקוריים, אין כזו נסחא לאינטגרל של מכפלה, יש רק שיטות לקבל ביטויים שקולים אליו, וזה נלמד בפרק "אינטגרציה בחלקים", סעיף 3.3.7.

3.3.3 האינטגרל כשטח

כאשר עוסקים בפונקציה חיובית, אנו חושבים על האינטגרל כעל השטח התחום מתחת לגרף. (זו למעשה דרך להגדיר למה אנו מתכוונים במילה "שטח"). המשפט הפשוט הבא מראה שכמצופה, שטח הוא אי שלילי.

משפט 3.40 [חיוביות] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית המקיימת $f\geq 0$. אזי $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

הוכחה: לכל סכום רימן שנחשב יתקיים $S(f,\Pi,\{t_i\})\geq 0$ ולכן גם בגבול. ■

למה 3.41 תהי $g\geq 0$. אזי $\int_a^b g=0$ אם ורק אם לכל תת קטע $J\subset[a,b]$ מתקיים $\inf_J g=0$.

הוכחה: אכן, אם $\int_a^b g=0$ עבור $g\geq 0$ נובע שבכל תת קטע $J\subset[a,b]$ מתקיים $\inf_J g=0$ שכן כל סכומי דרבו התחתונים חוסמים מלמטה את האינטגרל. כדי להראות שהתנאי מספיק, בהנתן פונקציה שמקיימת שלכל תת קטע $J\subset[a,b]$ מתקיים $\inf_J g=0$ ניתן לבנות סכומי רימן עם חלוקות מעדינות קטנה כרצוננו שיהיו קטנים כרצוננו, על ידי בחירת נקודות מתאימות בעלות ערך $g(x_i)$ קטן כרצוננו. ■

שאלה (לא קלה) למחשבה: האם ייתכן $f<g$ ושוויון באינטגרל?

מסקנה 3.42 [מונוטוניות האינטגרל] תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות המקיימות $f\geq g$. אזי $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

הוכחה: מהמשפט הקודם נובע $\int_a^b (f-g) \geq 0$ וממשפט 3.38 ניתן להסיק כי $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$. ■

הערה 3.43 את השטח הכלוא בין שני גרפים של פונקציות f,g אינטגרביליות נגדיר להיות $\int_a^b |f-g| \geq 0$. זה מאפשר, כעקרון, להגדיר מושג של "שטח" כללי יותר במישור, אבל בקורס הזה אנחנו לא מעמיקים בנושא זה, ולא מראים שההגדרה הזו לשטח תחום הכלוא בין שני גרפים מקיימת תכונות טבעיות הנדרשות משטח (אם כי תלמדו בחדו"א 3 שזו ההגדרה היחידה שמקיימת כמה תכונות פשוטות כמו אינוריאנטיות להזזות, סיבובים וכדומה).

משפט 3.44 [ליניאריות האינטגרל בתחום האיטגרציה] תהי $f \in R([a,c])$ ויהי $b \in (a,c)$. אזי

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

.

הוכחה: העובדה ש $f|_{[a,b]} \in R([a,b])$ וש $f|_{[b,c]} \in R([b,c])$ נובעת ממשפט 3.26. נבחר סדרת חלוקות Π_n של הקטע כולו המקיימת $\lambda(\Pi_n) \to 0$ ונדרוש בנוסף ש $b \in \Pi_n$ לכל n. נבחר עבורה סדרת נקודות מתאימות $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{M_n}$. נצמצם את החלוקה לתת הקטעים, ואת הנקודות המתאימות גם כן.

נסמן את הצימצומים הנ"ל ב Π_n^1 , $\{t_i^{(n),1}\}$ וב- Π_n^2 , $\{t_i^{(n),2}\}$. עדיין העדינות שואפת לאפס, וסכומי רימן מקיימים $S(f,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\}) = S(f|_{[a,b]},\Pi_n^1,\{t_i^{(n),1}\}) + S(f|_{[b,c]},\Pi_n^2,\{t_i^{(n),2}\})$ ולכן גם בגבול השוויון נשמר. ■

הערה 3.45 עבור $a < b$ נגדיר את $\int_b^a f$ להיות $-\int_a^b f$. כך יתקיים השוויון $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ ללא תלות בסדר של a,b,c .

3.3.4 רציפות האינטגרל המסויים

משפט 3.46 [רציפות האינטגרל המסויים] תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ המוגדרת בקטע $[a,b]$, היא רציפה.

הוכחה: הפונקציה f אינטגרבילית ולכן חסומה, נאמר $|f| \leq M$. נחשב את

$$|F(x+h) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq hM \to_{h\to 0} 0$$

■

3.3.5 משפטי ערך ביניים

תכונה ראשונה פשוטה הנובעת ממסקנה 3.42 היא

טענה 3.47 [אי שוויון שימושי] תהי $f \in R([a,b])$ ונניח $m \leq f \leq M$ אזי $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ וכמו כן $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{[a,b]} |f|(b-a)$.

הוכחה: העובדה הראשונה נובעת מאינטגרציה של אי השוויון על פי מסקנה 3.42 והחלק השני נובע כי $-|f| \leq f \leq |f| \leq \sup |f|$. ∎

הערה 3.48 אם הפונקציה רציפה, מאי השוויון $\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{[a,b]} f$ נובע שקיימת נקודה $x_0 \in [a,b]$ כך ש $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(x_0)$, וזה הקשר של הטענה לכותרת תת־הפרק.

משפט 3.49 [ערך ביניים ראשון] תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ותהי $g \in R([a,b])$ אי שלילית. אזי קיים $x_0 \in [a,b]$ כך ש

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx$$

הוכחה: נסמן $\max_{[a,b]} f = M$ ו־ $\min_{[a,b]} f = m$. מחיוביות g מתקיים $mg \leq fg \leq Mg$ ולכן לפי מסקנה 3.42 גם אחרי אינטגרל מתקיים אי שוויון. נקבל ש $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$ ולכן, אחרי חלוקה באינטגרל של g ותוך שימוש ברציפות f, קיימת נקודה בה מתקיים $\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} = f(x_0)$ כרצוי. יש מקרה קצה שצריך לדון בו - מה קורה אם $\int_a^b g = 0$ אבל אז האי שוויון לפני החלוקה יוצא פשוט $0 \leq \int_a^b fg \leq 0$ וסיימנו. ∎

משפט 3.50 [הלמה של בונה - גרסא 1] תהיינה $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ונניח כי f מונוטונית וכן $0 \leq g \in R([a,b])$. אזי קיימת $x_0 \in [a,b]$ כך ש

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x)dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x)dx$$

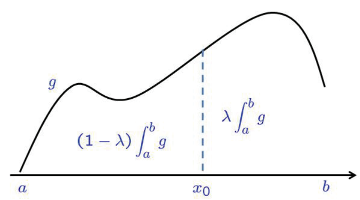
הוכחה: כמו בהוכחת משפט ערך הביניים הראשון (משפט 3.49) אנו רואים שאם f מונוטונית עולה, למשל,

$$f(a) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(b) \int_a^b g(x)dx$$

בכל מצב בו יש לנו שלושה מספרים $x \leq y \leq z$ ו מתקיים ש y הוא צירוף קמור של x ו־ z דהיינו קיימת $\lambda \in [0,1]$ כך ש $y = (1-\lambda)x + \lambda z$. (חשבו את ערכה של λ זו!). במקרה שלנו נקבל

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (1-\lambda)f(a) \int_a^b g(x)dx + \lambda f(b) \int_a^b g(x)dx$$

אנו נבחר את x_0 כך שיתקיים $\int_a^{x_0} g(x)dx = (1-\lambda) \int_a^b g(x)dx$.



איור 10: הלמה של בונה

נסביר מדוע זה אפשרי: נגדיר את

$$G(z)=\int_a^z g(x)dx$$

ומתקיים $G(a)=0\le(1-\lambda)\int_a^b g(x)dx$, $G(b)=\int_a^b g(x)dx\ge(1-\lambda)\int_a^b g(x)dx$ וכן לפי משפט 3.46 הפונקציה G רציפה. לכן לפי משפט ערך הביניים של חדו"א 1, קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש $\int_a^{x_0} g(x)dx=(1-\lambda)\int_a^b g(x)dx$.

נקבל כמובן על פי ליניאריות האינטגרל (משפט 3.44) גם ש $\int_{x_0}^b g(x)dx=\lambda\int_a^b g(x)dx$. לכן יתקיים כרצוי

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \;=\; f(a)\int_a^{x_0} g(x)dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)dx$$

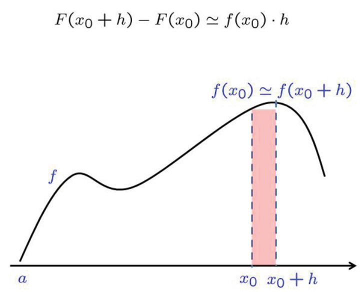
■

הערה 3.51 הנה הוכחה אחרת של משפט 3.50 : נגדיר את $G(t)=(f(b)-f(a))\int_a^t g(x)dx$. היא רציפה על פי משפט 3.46 ומקיימת

$$G(a)=0\le\int_a^b (f(b)-f(x))g(x)dx\le G(b)$$

כאשר השתמשנו חזק מאוד במונוטוניות f ובחיוביות g. לכן מרציפות G ומשפט ערך הביניים של חדו"א 1 קיימת x_0 כך ש $G(x_0)=\int_a^b (f(b)-f(x))g(x)dx$ ונעביר אגפים לקבלת המשפט.

לשם שלמות נצטט כאן גם את הגרסא השנייה של הלמה של בונה. ההוכחה שלה דורשת עוד כלים שעדיין אין לנו, אבל יהיו לנו בקרוב. נוכיח אותו בסעיף 3.3.7.



איור 11: משפט ניוטון לייבניץ והמשפט היסודי

משפט 3.52 [הלמה של בונה ־ גרסא 2] תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי g רציפה בקטע וכן $f\in C^1(a,b)$ (גזירה ברציפות) ורציפה ב $[a,b]$ ומתקיים שלכל $x\in(a,b)$, $f'(x)\geq 0$. (או: לכל $x\in(a,b)$, $f'(x)\leq 0$.) אזי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)dx$$

כאמור, ההוכחה של המשפט האחרון תופיע בהמשך, בסעיף 3.3.7. נשתמש בו בפרק 4.3.4.

3.3.6 המשפטים היסודיים

בפרק זה נמצאים המשפטים החשובים ביותר בנושא אינטגרציה, המקשרי את מושג הפונקציה הקדומה שלמדנו בתחילת הסמסטר ושתירגלתם בתירגולים עם מושג אינטגרל רימן (האינטגרל המסויים) אותו למדנו באופן מפורט בשיעורים.

משפט 3.53 [המשפט היסודי של החדו"א] תהי $f\in R([a,b])$, ותהי $x_0\in[a,b]$ נקודה שבה f היא רציפה. אזי הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ היא גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $F'(x_0)=f(x_0)$.

המשפט הבא הוא אולי השימושי ביותר עבורנו מבחינת חישובי אינטגרלים. הוא מאוד דומה למשפט הקודם, אך איננו זהה לו.

משפט 3.54 [משפט ניוטון ולייבניץ] תהי $f\in R([a,b])$, ותהי $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ קדומה של f בקטע $[a,b]$ כולו. אזי

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

לפני ההוכחות, נעיר על הדמיון בין המשפטים. כאשר f היא אינטגרבילית ורציפה, הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ היא תמיד קדומה שלה, וכל שתי קדומות שלה נבדלות בקבוע. הענין הוא שפונקציה לא רציפה עדיין יכולה להיות אינטגרבילית. במקרה כזה יתכן שלמשל F הנ"ל איננה גזירה (ולכן איננה קדומה של f, על פי הגדרתנו). דוגמה פשוטה לכך היא $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1/2 \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases}$ למשל, שכמובן אינטגרבילית אבל האינטגרל שלה אינו גזיר ב-$1/2$ (זאת אומרת, אין לה קדומה). ייתכן גם שיש לפונקציה לא רציפה פונקציה קדומה, אבל זה רק אם אי הרציפות שלה היא מסוג שני, שכן אנו יודעים שפונקציה שהיא נגזרת של פונקציה אחרת, מקיימת תמיד את תכונת דרבו (חדו"א 1). זה מקרה (נדיר) בו המשפט השני שימושי והראשון לא רלוונטי כי אין רציפות. לבסוף, במשפט הראשון ניתן להשתמש גם בנקודה בודדת, זאת אומרת גם אם אין רציפות של f בכל הקטע.

הערה 3.55 עוד הערה חשובה היא שלמעשה כדי להשתמש במשפט 3.54 אין צורך ש F תהיה קדומה ל- f בכל הקטע הסגור, מספיק שהיא תהיה קדומה ב-(a,b) ורציפה ב-$[a,b]$. זאת משום שניתן לעבור לתת קטע, ואז להשאיף את הגבולות לצדדים. באופן דומה, מספיק ש $F' = f$ פרט למספר סופי של נקודות, וכן F רציפה. כך נוכל לדעת גם את $\int_0^t f(x)dx$ עבור $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1/2 \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases}$ תוך שימוש ב"קדומה" $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1/2 \\ (x-1/2) & x \geq 1/2 \end{cases}$ שמקיימת $F' = f$ למעט בנקודה אחת, והיא רציפה. ננסח זאת במסקנה הבאה.

מסקנה 3.56 [משפט ניוטון ולייבניץ - כללי יותר] תהי $f \in R([a,b])$, ותהי $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה, המקיימת שלמעט מספר סופי של נקודות בקטע, $F'(x) = f(x)$. אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

נעבור להוכחות של המשפטים המרכזיים הללו.

הוכחה: [הוכחת המשפט היסודי] נחשב את הביטוי שמופיע בחישוב נגזרת (שימו לב שאין צורך להניח בחישוב הנ"ל כי $h > 0$):

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \left(\frac{f(t) - f(x_0)}{h}\right) dt$$

משום שבנקודה x_0 הפונקציה רציפה, בהנתן $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $|t - x_0| < \delta$ מתקיים ש $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. נניח ש $|h| < \delta$. אזי מתקיים

$$|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{h} dt \leq \varepsilon$$

נשים לב ששמנו ערך מוחלט רק על החלק העליון בשבר כדי שגם אם $h < 0$ הביטוי יצא חיובי - שכן אז גבולות האינטרל הם בסדר יורד - $x_0 + h < x_0$. קיבלנו על פי הגדרת נגזרת ש $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

הערה 3.57 נעיר שכאשר הפונקציה f בתוך האינטגרל איננה רציפה, אין שום הכרח שיתקיים האמור, שכן אינטגרציה אינה מבחינה בין פונקציות ששונות למשל רק בנקודה אחת.

הוכחה: [הוכחת משפט ניוטון לייבניץ] נתונה $f \in R([a,b])$. בהנתן חלוקה כלשהי Π נוכל להשתמש במשפט ערך הביניים של לגרנז מחדו"א 1 על מנת למצוא נקודות מתאימות $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ שתקיימנה (במדוייק!) $F'(t_i) = \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$. עבור נקודות אלה נחשב את סכום רימן של החלוקה ונקבל

$$S(f,\Pi,\{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a)$$

ומשום ש f אינטגרבילית, סכום רימן זה (שהוא קבוע) צריך להתכנס, כשעדינות החלוקה שואפת לאפס, לאינטגרל של f והמשפט הוכח. ■

תרגילים למחשבה (שייעשו בתירגול):

איך גוזרים את הפונקציות $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ ו- $H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ (תניחו נאמר ש f רציפה וש g, h שתיהן גזירות)?

סוף שיעור 4

3.3.7 שיטות אינטגרציה (בחלקים ושינוי משתנה)

השיטות שנדון בהן בפרק זה תתורגלנה, והרבה, בתירגולים ובתרגילי הבית. שם גם תכירו שיטות נוספות. כאן אנו רק נותנים את הבסיס התיאורטי לשימושים הללו, שניתן לבצע אותם גם (כפי שעושים בקורסי חדו"א אחרים, לא לתלמידי מתמטיקה) ללא הידע התיאורטי. יתר על כן, אנו לרוב נניח תנאים יחסית מחמירים על מנת להוכיח את הטענות בצורה מדוייקת ולא ארוכה מידי. הרבה פעמים הן תקפות גם בהנחות מחמירות הרבה פחות. כאשר התנאים שהנחנו לא מתקיימים, עדיין ניתן לנסות ולהשתמש בשיטה, אבל אז כשמתקבלת התוצאה יש למצוא צידוק לנכונותה (למשל - אם החישוב מייצר לכם מועמדת לפונקציה קדומה - ניתן פשוט לגזור את התוצאה!).

משפט 3.58 [אינטגרציה בחלקים] תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות, ונניח ש $f',g'\in R([a,b])$. אזי

$$\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$$

וביתר דיוק, הסימון למעלה אומר ש $\int_a^b f'(t)g(t)dt=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(t)g'(t)dt$.

הוכחה: מהנתון, הפונקציות f,g הן גזירות ובפרט רציפות ולכן אינטגרביליות רימן בקטע, וכך גם מכפלתן. מחוק גזירה של חדו"א 1 מתקיים $(f\cdot g)'=f'g+fg'$ זאת אומרת מצאנו פונקציה קדומה לפונקציה $f'g+fg'$, שגם היא - על פי הנתונים - מכפלה וסכום של אינטגרביליות ולכן אינטגרבילית (נשים לב שלא נתון שהיא רציפה). כעת נפעיל את משפט ניוטון לייבניץ (משפט 3.54) שתנאיו מתקיימים, ונקבל כי $\int_a^b(f'g+fg')=f(b)g(b)-f(a)g(a)$. על פי שימוש בליניאריות האינטגרל והעברת אגפים, המשפט הוכח. ■

הערה 3.59 נזכיר את הסימון $f\in C^1([a,b])$ שאומר כי f גזירה ונגזרתה רציפה. (הסימון $f\in C^n([a,b])$ יאמר שהיא גזירה n פעמים והנגזרת ה n־ית רציפה). נובע בפרט שהמשפט האחרון תקף כאשר $f,g\in C^1([a,b])$.

כעת אנו יכולים להוכיח את משפט 3.52 [הלמה של בונה: גרסא 2]. נזכיר את המשפט: תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי g רציפה ו $f\in C^1(a,b)$ (גזירה ברציפות) ורציפה ומתקיים שלכל $t\in(a,b)$, $f'(t)\geq 0$. (או: לכל $t\in(a,b)$, $f'(t)\leq 0$.) אזי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש

$$\int_a^b f(t)g(t)dx=f(a)\int_a^{x_0}g(t)dt+f(b)\int_{x_0}^b g(t)dt$$

הוכחה: [של הלמה של בונה גרסא 2, משפט 3.52]: נסמן $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ ואז, מרציפות g, מתקיים $G'(x)=g(x)$ לכל $x\in(a,b)$. לפי נוסחת אינטגרציה בחלקים מתקיים (שכן G גזירה ברציפות וגם f)

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=\int_a^b G'(t)f(t)dt=G(b)f(b)-G(a)f(a)-\int_a^b G(t)f'(t)dt$$

כעת ממשפט ערך הביניים הראשון, משפט 3.49, האינטגרל הימני ביותר ניתן לכתיבה כ $G(x_0)\int_a^b f'(t)dt$ שכן G רציפה ו $f'(t)$ אי שלילית. קיבלנו, על פי ניוטון לייבניץ,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)dt &= G(b)f(b)-G(a)f(a)-G(x_0)\int_a^b f'(t)dt\\ &= G(b)f(b)-G(a)f(a)-G(x_0)(f(b)-f(a))\end{aligned}$$

כעת נשים לב ש $G(a)=0$ וגם ש $G(b)-G(x_0)=\int_{x_0}^b g(t)dt$ וכשנציב זאת במשוואה נקבל בדיוק

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=(G(b)-G(x_0))f(b)+G(x_0)f(a)=f(a)\int_a^{x_0}g(t)dt+f(b)\int_{x_0}^b g(t)dt$$

■

כעת נציג שימוש אחר למשפט על אינטגרציה בחלקים, והוא נסחא אינטגראלית לשארית בטור טיילור.

טענה 3.60 [שארית אינטגראלית בטיילור] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח שהיא גזירה ברציפות $(n+1)$ פעמים. יהי $x\in[a,b]$. אזי

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(a,x)$$

כאשר

$$R_n(a,x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

הוכחה: נבצע אינדוקציה על n. עבור $n=0$ הנוסחא גורסת

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$$

שאכן נכון על פי משפט ניוטון לייבניץ שכן נתונה רציפות f'. כעת נניח נכונות עבור n. נחשב את השארית הבאה:

$$\begin{aligned}R_{n+1}(a,x) &= f(x)-\sum_{k=0}^{n+1}f^{(k)}(a)(x-a)^k\frac{1}{k!}\\ &= R_n(a,x)-f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt-f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\left(\frac{\frac{d}{dt}(-(x-t)^{n+1})}{n+1}\right)dt-f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\\ &= \left[\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)\left(\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_a^x+\frac{\int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt}{(n+1)}-f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt\end{aligned}$$

ובזאת הסתיימה ההוכחה. ■

בתרגיל או בתירגול: הראו מדוע נסחא זאת גוררת את הנוסחא לשארית לגרנז במקרה שבו הפונקציה מקיימת $f \in C^{n+1}([a,b])$.

בהמשך הסעיף נציג שימוש נוסף של אינטגרציה בחלקים, להוכחת משפט ואליס (Wallis) אך ראשית נדון בשיטה השניה העיקרית לחישוב אינטגרלים.

משפט 3.61 [שינוי משתנה] תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ המקיימת $\varphi(\alpha)=a$ ו $\varphi(\beta)=b$. נניח גם ש־φ גזירה ברציפות. אזי

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

על פי רוב משתמשים ב φ שהיא מונוטונית, ובפרט שהיא חח"ע ועל בקטע. לפונקציה הזו קוראים "שינוי המשתנה".

הוכחה: תהי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ קדומה של f (שקיימת מהנחת הרציפות) כך שעל פי המשפט היסודי מתקיים $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$. נסמן $G=F\circ\varphi$ זאת אומרת $G(y)=F(\varphi(y))$. מכלל השרשרת (שכן כולן גזירות) מתקיים $G'(y)=F'(\varphi(y))\varphi'(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)$ ולכן לאחר ביצוע אינטגרל נקבל

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi' = G(\beta)-G(\alpha) = F(b)-F(a) = \int_a^b f$$

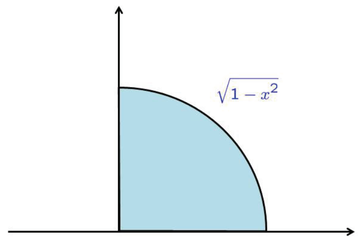
■

הערות 3.62 כמובן, אף על פי שמבחינתנו הסימונים dx ו־ dt הם רק הגדרה או סימון של אינטגרל רימן, מאחוריהם מסתתר משהו שהוא מעבר לסימון הדבר יילמד באופן מעמיק יותר בקורס "תורת המידה", שם תדברו על נגזרת של מידה אחת ביחס לאחרת. בכל זאת, נוכל לומר כמה מילים שתפרשנה את ה"אינטואיציה" העומדת מאחורי שינוי המשתנה

$$x=\varphi(t) \qquad \to \qquad dx=\varphi'(t)dt$$

ובכן, הניחו לשם פשטות ששינוי המשתנה שלכם $\varphi(t)$ הוא מונוטוני עולה. מהגדרת האינטגרל, $\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i)\Delta x_i$ ישאף ל $\int_a^b f$ כל עוד החלוקה מעדינות שואפת לאפס והנקודות $\tilde{x}_i$ מקיימות $\tilde{x}_i\in[x_{i-1},x_i]$. נרשום את סכום רימן של הפונקציה באופן אחר: כל נקודה x_i בחלוקה נציג כ - $x_i=\varphi(t_i)$ וכל נקודה $\tilde{x}_i=\varphi(\tilde{t}_i)$. סכום רימן הקודם שרשמנו הינו, בסימונים החדשים

$$\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tilde{t}_i))\left(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\right)$$



איור 12: חישוב שטח רבע מעגל

ומשום שהנחנו גזירות ניתן לרשום

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tilde{t}_i))\,(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tilde{t}_i))\varphi'(\tilde{\tilde{t}}_i)\,(t_i-t_{i-1})$$

כל שנותר להסביר הוא שניתן לבחור מראש נקודות מתאימות x_i כך שיתקיים $\tilde{t}_i = \tilde{\tilde{t}}_i$, והדבר כמובן אפשרי שכן הבחירה של $\tilde{x}_i$ הייתה שרירותית. כעת אנו רואים בצורה מעט בהירה יותר מדוע $\Delta x_i \simeq \varphi'(t_i)\Delta t_i$, דבר שניתן לכתוב באופן לא ממש פורמלי כ $dx = \varphi'(t)dt$ (הדבר אינו פורמלי רק משום שלא הגדרנו את האובייקט "dx" כעומד בפני עצמו - אם מדובר בשימוש במשפט הקודם - זה כמובן מאוד פורמלי). נדגיש כי יש להזהר מחילופי משתנה שהם פורמליים בלבד שכן זהו מתכון לבלבול וטעויות, ודוגמאות תובאנה בתירגול ובתרגילי הבית.

נמשיך בדוגמא (אחת! בתרגילים - המון) לשימוש בשינוי משתנה לשם חישוב אינטגרל מסויים. נחשב את שטחו של רבע מעגל היחידה.

זה השטח הכלוא תחת הגרף $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ מעל הקטע $[0,1]$ ולכן נתון על ידי האינטגרל $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. נשתמש בשינוי המשתנה $\varphi(t) = \sin t$ כאשר $\varphi : [0,\pi/2] \to [0,1]$ גזירה ברציפות כמובן ו $\varphi'(t) = \cos t$. ממשפט שינוי המשתנה נקבל

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

כאשר את השוויון האחרון ניתן לקבל או בעזרת נוסחא וביצוע אינטגרציה

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = [\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t)]|_0^{\pi/2} = \pi/4$$

או, מה שיותר אלגנטי, השתכנעות (על ידי שינוי משתנה דומה) שמתקיים $\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt$ ואז סכימה של שניהם לקבלת $\int_0^{\pi/2}\cos^2 t + \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \pi/2$.

כעת נראה שימוש נוסף לאינטגרציה בחלקים, יותר "תיאורטי", שהוא גם רמז לדברים שנראה בהמשך בהקשר של טורי פונקציות וטורי פורייה.

טענה 3.63 [דעיכת מקדמי פורייה בהנתן גזירות] תהי $f \in C^1([0,2\pi])$ ונסמן $M = \sup_{[0,2\pi]} |f'|$. אזי לכל n טבעי יתקיים

$$|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx| \leq \frac{2\pi M}{n}$$

הוכחה: נשתמש בנסחא לאינטגרציה בחלקים על מנת לחשב

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = [f(x)\frac{\sin(nx)}{n}]|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n} = -\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}$$

וכעת נעריך את האינטגרל על פי ערך הפונקציה המקסימלי בקטע כפול אורך הקטע. ■

3.3.8 נסחת Wallis

נציג שימוש נוסף לאינטגרציה בחלקים.

הנסחא עצמה היא כדלהלן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)} = \frac{\pi}{2}$$

על מנת להוכיח אותה נצטרך טענת עזר

טענה 3.64 נסמן

$$\int_0^{\pi/2}(\sin(x))^m dx = \int_0^{\pi/2}(\cos(x))^m dx = I_m$$

מתקיים

$$I_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ even} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ odd} \end{cases}$$

כאן השתמשנו בסימון $k!!$ למכפלה $k(k-2)(k-4)\cdots$ שיש בה $[k/2]$ איברים.

הוכחה: ראשית נמצא נסחא רקורסיבית לאינטגרל, תוך שימוש באינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\pi/2}(\sin(x))^m dx = \int_0^{\pi/2}(-\cos(x))'(\sin(x))^{m-1}dx \\ &= [\ (-\cos(x))(\sin(x))^{m-1}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos(x))\left((\sin(x))^{m-1}\right)' dx \\ &= 0 + (m-1)\int_0^{\pi/2}(\cos(x))^2(\sin(x))^{m-2}dx = (m-1)\int_0^{\pi/2}(1-(\sin(x))^2)(\sin(x))^{m-2}dx \\ &= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m \end{aligned}$$

וקיבלנו לכן את הנסחא $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$. נחשב את I_0, I_1 ישירות

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^0 dx = \pi/2 \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

ונקבל לכן באינדוקציה את הנסח הכללית: כשאר $m = 2n$ (זוגי),

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} = \frac{m-1}{m}\frac{m-3}{m-2} I_{m-4} = \cdots = \frac{(m-1)!!}{m!!} I_0 = \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}$$

וכאשר $m = 2n-1$ (איזוגי),

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} = \frac{m-1}{m}\frac{m-3}{m-2} I_{m-4} = \cdots = \frac{(m-1)!!}{m!!} I_1 = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

■

כעת נפנה להוכחת נסחת Wallis עצמה.

הוכחה: [של נסחת ואליס] עבור $0 \le x \le \pi/2$ מתקיים

$$(\sin(x))^{2n+1} \le (\sin(x))^{2n} \le (\sin(x))^{2n-1}$$

ולכן גם לאחר אינטגרציה

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{2n+1} dx \le \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{2n} dx \le \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{2n-1} dx$$

לכל $n > 1$. יש לנו ערכים מדוייקים לאינטגרלים אלה, נציב אותם ונקבל אי שוויון

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

נחלק במקדם של $\pi/2$ ונקבל

$$a_n \le \frac{\pi}{2} \le b_n$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right) \\ b_n &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

נשים לב שההפרש בין אגף שמאל לאגף ימין מתקיים (תוך שמוש בנסחא הקודמת)

$$b_n - a_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right] = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n(2n+1)} \le \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2}$$

ולכן הסדרות שתיהן מתכנסות ל $\pi/2$. כעת נשים לב שהסדרה b_n היא בדיוק הסדרה עליה הצהרנו בניסוח נסחת ואליס. ■

סוף שיעור 5

4 אינטגרל לא אמיתי

4.1 הקדמה והגדרה

ראינו כבר שבמובן מסוים "שטחי המלבנים מתחת ל $1/\sqrt{x}$" בקטע $[0,1]$ חסומים, אבל הדבר לא מתאים להגדרה שלנו של אינטגרל רימן בקטע סגור (גם אם נמשיך את הפונקציה שרירותית ב־0 היא לעולם לא תהיה אינטגרבילית לפי הגדרתנו, שכן היא איננה חסומה). באופן דומה, אם נביט בפונקציה $1/x^2$ בקטע האינסופי $[1,\infty)$ אף על פי שגיאומטרית מדובר באותו שטח כמו מתחת ל $1/\sqrt{x}$ בקטע $(0,1]$ ולכן, שוב לפי שיעור ההקדמה, השטח "אמור" להיות סופי, ההגדרות שלנו לא מאפשרות אינטגרציה של פונקציה על קטע אינסופי. את העוול הקטן הזה נתקן בפרק זה. הרעיון הוא פשוט. נצמצם את הפונקציה לקטע סופי (או ־ במקרה הלא חסום ־ לקטע סגור בו היא חסומה), נחשב את האינטגרל, ואז נשאיף את קצוות הקטע לאינסוף (או, לקצה התחום שלה). כמובן, משום שמדובר בגבולות, יש לדרוש התכנסות, ולהזהר קמעה.

הגדרה 4.1 [כשהקטע אינסופי מצד אחד] תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. נניח שלכל $b\in(a,\infty)$ מתקיים $f\in R([a,b])$. אם קיים הגבול $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ אז הוא נקרא האינטגרל הלא אמיתי של f בקטע $[a,\infty)$ ומסמנים

$$\int_a^\infty f(x)dx=\int_a^\infty f$$

אם הגבול הוא סופי נאמר שהאינטגרל מתכנס.

הערה 4.2 בדומה, נגדיר את $\int_{-\infty}^a g(x)dx$ עבור $g:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$.

דוגמאות:

•

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}[-e^{-x}]_0^N=\lim_{N\to\infty}1-e^{-N}=1$$

עבור $\alpha\neq 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{N\to\infty}[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_1^N=\left(\lim_{N\to\infty}\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)-\frac{1}{1-\alpha}=\begin{cases}+\infty & \alpha<1\\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha>1\end{cases}$$

• עבור $\alpha=1$

$$\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{1}{x}dx=\lim_{N\to\infty}[\ln x]_1^N=\lim_{N\to\infty}\ln(N)=+\infty$$

הגדרה 4.3 [כשהקטע דו־אינסופי] תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נניח שלכל $a < b \in \mathbb{R}$ מתקיים $f \in R([a,b])$.
נאמר שהאינטגרל הדו־אינסופי מתכנס אם יש לפונקציה אינטגרל לא־אמיתי בקטעים $[0,\infty)$ ו־ $(-\infty,0]$
והם סופיים, או אינסופיים אך לא אחד $+\infty$ והשני $-\infty$. נגדיר

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

הערה 4.4 שימו לב שהדבר שקול לדרוש את קיום הגבול $\lim_{N\to\infty, M\to\infty}\int_{-M}^{N} f(x)dx$ וזה אינו שקול לקיום $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)dx$ שיכול להתכנס גם אם הגבול הכפול איננו מתכנס (חישבו על סינוס!)

דוגמא:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{N\to\infty}[\arctan x]_{-N}^{0} + \lim_{M\to\infty}[\arctan x]_{0}^{M} \\
&= \lim_{N\to\infty} -\arctan(-N) + \lim_{M\to\infty} \arctan M = \pi
\end{aligned}$$

שאלות למחשבה: האם כדי שהאינטגרל יתכנס צריך שהפונקציה תשאף ל־0? תהיה חסומה?

הגדרה 4.5 [כשהקטע פתוח ו/או הפונקציה לא חסומה] תהי $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ ונניח שלכל $a < c < b$ מתקיים $f \in R([c,b])$. נגדיר, במידה והגבול קיים,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{r\to a^+}\int_{r}^{b} f(x)dx$$

אם הגבול סופי, נאמר שהאינטגרל מתכנס. בדומה נגדיר עבור $f : [a,b) \to \mathbb{R}$.

דוגמאות:

$$\int_{0}^{1} \ln(x)dx = \lim_{r\to 0^+}\int_{r}^{1} \ln(x)dx = \lim_{r\to 0^+}[x\ln x - x]_{r}^{1} = -1 - \lim_{r\to 0^+}(r\ln r - r) = -1$$

- עבור $\alpha \neq 1$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{r\to 0^+}\int_{r}^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{r\to 0^+}[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_{r}^{1} = \frac{1}{1-\alpha}[1 - \lim_{r\to 0^+} r^{1-\alpha}] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

• ועבור $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{r\to 0^+} [\ln x]_r^1 = \lim_{r\to 0^+} -\ln r = +\infty$$

הערה 4.6 נעיר שכאשר הפונקציה אינטגרבילית, המושגים מזדהים בגלל רציפות האינטגרל שהוכחה במשפט 3.46. לכן אנחנו משתמשים גם באותו סימון עבור האינטגרל הרגיל ועבור הלא אמיתי.

הערה נוספת היא שעל מנת להיות אינטגרבילית במובן "לא אמיתי" (ואפילו שהאינטגרל יתכנס למספר סופי) אין צורך להיות חסומה, כפי שמעידות הדוגמאות. למעשה, זה המקרה היחיד שבו האינטגרל הלא אמיתי הזה רלוונטי שכן אם יש חסימות ויש אינטגרביליות על כל תת קטע, ממילא יש אינטגרביליות רגילה בקטע כולו לפי משפט 3.27.

4.2 משפטים בסיסיים

רב המשפטים שתקפים לאינטגרלים רגילים תקפים גם כאן, וההוכחות זה סה"כ לקחת גבול במשפטים שכבר הוכחנו. לשם פשטות בכתיבה, נביט ב $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ כאשר ω יכול להיות מספר סופי או $+\infty$.

1. **ניוטון לייבניץ:** $f,F:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b<\omega$ מתקיים $f\in R([a,b])$. נניח גם שלכל $a\le x<\omega$ מתקיים $F'(x)=f(x)$. אזי

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{b\to\omega} F(b)-F(a)$$

ההוכחה היא פשוט לעבור על ההגדרות ולהשתמש במשפט ניוטון לייבניץ על כל קטע $[a,b]$.

2. **ליניאריות:** באותו אופן, יהיו $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ונניח $f,g\in R([a,b])$ לכל $b\in(a,\omega)$. נניח גם ששני האינטגרלים הלא אמיתיים (הן של f והן של g) בקטע $[a,\omega]$ מתכנסים. אזי

$$\int_a^\omega (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^\omega f + \beta\int_a^\omega g$$

3. **ליניאריות נוספת:** תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b<\omega$ מתקיים $f\in R([a,b])$. אזי לכל $c\in(a,\omega)$ מתקיים

$$\int_a^\omega f = \int_a^c f + \int_c^\omega f$$

במובן החזק, זאת אומרת שאגף ימין קיים אם ורק אם אגף שמאל קיים, והוא מתכנס אם ורק אם אגף שמאל מתכנס. ההוכחה, שוב, מיידית על פי ההגדרות והמשפט על איחד של קטעים לאינטגרלים רגילים.

4. **מונוטוניות:** תהיינה $f \le g : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ ונניח $f,g \in R([a,b])$ לכל $b \in (a,\omega)$. אזי, אם שני האינטגרלים קיימים, מתקיים

$$\int_a^\omega f \le \int_a^\omega g$$

5. **אינטגרציה בחלקים:** גם שיטות האינטגרציה הרגילות עובדות, רק צריך לשים לב שהכל מוגדר באמת כמו שצריך. נניח ש $f,g : [a,\omega) \to \mathbb{R}$, הן גזירות, ונגזרותיהם אינטגרביליות ב $[a,b]$ לכל $b \in (a,\omega)$. אז לכל b כזה יתקיים

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

ולכן בגבול נקבל שאם בביטוי הבא שני האינטגרלים והגבול כולם מתכנסים מתקיים

$$\int_a^\omega fg' = \lim_{b\to\omega} f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^\omega f'g$$

6. **שינוי משתנה:** כעת נניח לשם פשטות ששינוי המשתנה φ הוא עולה, להימנע ממצבים פתולוגיים של אוסילאציות כל מיני. תהי $f : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ ונניח שלכל $b < \omega$ מתקיים $f \in R([a,b])$. תהי $\varphi : [a,\omega) \to [c,\eta)$ גזירה ברציפות, עולה, וכך ש $\varphi(a) = c$, $\lim_{b\to\omega} \varphi(b) = \eta$. מתקיים, אם שני הצדדים מתכנסים, אז

$$\begin{aligned}\int_a^\omega f(\varphi(s))\varphi'(s)ds &= \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \lim_{b\to\omega}\int_c^{\varphi(b)} f(t)dt \\ &= \lim_{d\to\eta}\int_c^d f(t)dt = \int_c^\eta f(t)dt\end{aligned}$$

יתר על כן, אם צד אחד מתכנס, אז גם השני.

סוף שיעור 6

4.3 קריטריונים להתכנסות

כאן הטענות מזכירות מאוד טענות שראיתם על טורים מספריים. משום שנעסוק בקרוב בטורי פונקציות, התזכורת חשובה לנו. חלק מתוצאות הפרק מסוכמות בטבלה הבאה

	טורים מספריים	אינטגרלים לא אמיתיים
קושי	$\forall\varepsilon\exists M\forall n>m>M,\ \lvert\sum_m^n a_k\rvert<\varepsilon$	$\forall\varepsilon\exists B\forall\omega>b_2>b_1>B,\ \lvert\int_{b_1}^{b_2}f(x)\rvert<\varepsilon$
בהחלט	$\sum\lvert a_n\rvert<\infty\implies\sum a_n<\infty$	$\exists\int\lvert f\rvert<\infty\implies\exists\int f$
שינוי מקומי	שינוי מספר סופי של אברים לא משנה	שינוי בתחום סופי וסגור לא משנה
לחיוביים:		
חסימות ה"קדומה"	התכנסות שקולה לחסימות של	התכנסות שקולה לחסימות של
	$S_N=\sum_{n=1}^N a_n$	הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$
השוואה	$0\le a_n\le b_n\implies\sum a_n\le\sum b_n$	$0\le f\le g\implies\int f\le\int g$
דוגמאות דומות	$\sum\frac{1}{n}=\infty\quad\sum\frac{1}{n^s}\begin{cases}<\infty & s>1\\=\infty & s\le 1\end{cases}$	$\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\infty\quad\int_1^\infty\frac{1}{x^s}dx\begin{cases}<\infty & s>1\\=\infty & s\le 1\end{cases}$
אבל\דיריכלה		
ועוד...		

4.3.1 קושי

טענה 4.7 [קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי] תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b\in(a,\omega)$ מתקיים $f\in R([a,b])$. אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס (למספר סופי) אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $B\in(a,\omega)$ כך שלכל $b_1,b_2\in[B,\omega)$ מתקיים $\lvert\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\rvert<\varepsilon$.

הוכחה: זה פשוט קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה כאשר $\omega\to b$ של הפונקציה $F(b)=\int_a^b f(x)dx$. אם הדבר מבלבל אתכם - הפרידו לשני מקרים, $\omega<\infty$ ואז מדובר בגבול משמאל של F בנקודה ω כך שאתם כנראה רגילים לסמן $B=\omega-\delta$, והמקרה האינסופי, גבול של פונקציה F כאשר $x\to\infty$. אם לא נתקלתם בקריטריון קושי לגבולות של פונקציות - חישבו על הגבול לפי סדרות ואז נסחו והוכיחו קריטריון שכזה. ■

4.3.2 התכנסות בהחלט

הגדרה 4.8 [התכנסות בהחלט] תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b<\omega$ מתקיים $f\in R([a,b])$. נאמר ש $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\omega\lvert f\rvert$ מתכנס (לערך סופי). כאשר האינטגרל מתכנס אבל לא בהחלט, אומרים שהוא "מתכנס בתנאי".

טענה 4.9 [התכנסות בהחלט גוררת התכנסות] תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b<\omega$ מתקיים $f\in R([a,b])$. נניח ש $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט. אזי הוא מתכנס ומתקיים $|\int_a^\omega f|\leq\int_a^\omega|f|$.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי של טענה 4.7, ובאי השוויון מטענה 3.47. אכן, בהנתן $\varepsilon>0$ נבחר את B על פי קריטריון קושי עבור $|f|$ ואז יתקיים

$$|\int_{b_1}^{b_2}f|\leq\int_{b_1}^{b_2}|f|\leq\varepsilon\qquad\forall b_1,b_2\in[B,\omega)$$

ומקריטריון קושי גם האינטגרל ללא ערך מוחלט מתכנס. כעת את אי השיוויון נקבל לכל $b<\omega$ וניקח גבול של אי שוויונים. ∎

הערה 4.10 נשים לב שאם $f\geq 0$ אינטגרבילית בכל תת קטע של $[a,\omega)$, אז האינטגרל הלא אמיתי קיים, והשאלה היחידה היא האם השאיפה שלו היא למספר סופי או ל $+\infty$ - בדיוק כמו בעולם הטורים החיוביים. זאת אומרת שהתכנסות בהחלט היא עניין של סופיות, ולא של "קיום גבול כשייתכנו ביטולים" - עניין פשוט יותר - קונספטואלית ויישומית כאחד.

4.3.3 פונקציות חיוביות : חסימות הקדומה, השוואה, השוואה לטורים

טענה 4.11 תהי $0\leq f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b<\omega$ מתקיים $f\in R([a,b])$. אזי $\int_a^\omega f<\infty$ אם ורק אם הפונקציה $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ חסומה על $[a,\omega)$.

הוכחה: זו פונקציה עולה, ולכן יש לה גבול סופי אם ורק אם היא חסומה. ∎

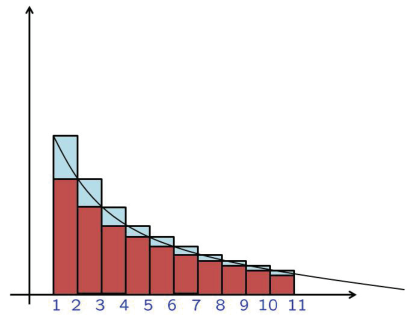
מסקנה 4.12 [השוואת אינטגרלים] תהיינה $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $b<\omega$ מתקיים $f,g\in R([a,b])$. נניח גם $0\leq f\leq g$. אם $\int_a^\omega g<\infty$ אז גם $\int_a^\omega f<\infty$ ולהפך, אם $\int_a^\omega f=\infty$ אז גם $\int_a^\omega g=\infty$.

הוכחה: זה נובע ישירות מהעובדה ש $F\leq G$ עבור $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ ו $G(b)=\int_a^b g(x)dx$ והטענה הקודמת. ∎

דוגמא: מתקיים $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{1+x}$ ולכן $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\infty$.
מתקיים $e^{-x^2}>e^{-x}$ בקטע $[1,\infty)$ ולכן $\int_0^\infty e^{-x^2}dx<\infty$ (למעשה יש לו ערך יפה: $\sqrt{\pi}/2$).

משפט 4.13 [השוואה לטורים] תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ יורדת, $f\geq 0$. אזי האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^\infty f<\infty$ אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתכנס. יתר על כן, מתקיים

$$\sum_{n=2}^\infty f(n)\leq\int_1^\infty f\leq\sum_{n=1}^\infty f(n)$$



איור 13: השוואת טור ואינטגרל

הוכחה: מהנתונים f אינטגרבילית בכל תת קטע סגור. אפשר להסתכל גרפית, ואפשר פשוט לרשום $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n)$ (משום שלכל t בקטע $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ ואז עושים אינטגרל על הקטע שהוא מאורך 1) ולסכום על פני n. מדובר בטורים חיוביים ולכן יש קריטריון השוואה לטורים. קיבלנו שלכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

במילים אחרות אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס, משום שהטורים חיוביים, גם הגבול $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(t)dt$ מתכנס (כאן הגבול רץ רק על טבעיים) ובפרט הפונקציה העולה $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ חסומה ולכן האינטגרל הלא אמיתי מתכנס. להפך, אם האינטגרל הלא אמיתי מתכנס אז בפרט הסכומים החלקיים $S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$ חסומים על ידי אותו חסם ולכן הטור מתכנס. ■

המשפט הזה מאוד שימושי, למשל זו דרך ישירה לראות ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ שכן $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$.
הבה נשחק מעט עם הדוגמא של פונקציית זטה של רימן.

הגדרה 4.14 עבור $s > 1$ נגדיר את

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

זהו מספר סופי מהקריטריון הקודם. (רימן מגדיר המשכה שלה לכל המישור המרוכב, אבל בזה לא נעסוק בקורס שלנו ־ אם כי מי שימצא את כל האפסים של המשכה זו יזכה במיליון דולרים ובתהילת עולם).

טענה 4.15 הגבול של הפונקציה מימין ב $s = 1$ מתבדר כמו $\frac{1}{s-1}$ דהיינו

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s)(s-1) = 1$$

הוכחה: יהי $s>1$ אזי על פי קריטריון ההשוואה

$$\frac{1}{s-1}=\int_1^\infty x^{-s}dx\le\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\le 1+\int_1^\infty x^{-s}dx=1+\frac{1}{s-1}$$

ונכפול את שני הצדדים ב $s-1$ כדי לקבל $1\le(s-1)\zeta(s)\le s$ וכעת נשאיף את $s\to1$. ■

תרגיל למחשבה:

$$\lim_{s\to1^+}[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}]=\gamma=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N\frac{1}{n}-\ln(N)\right)$$

(ואם סיימתם לחשוב) פתרון התרגיל: נבצע השוואה דומה לכל N ונקבל שעבור $s>1$ מתקיים

$$\frac{(N+1)^{1-s}}{s-1}=\int_{N+1}^\infty x^{-s}dx\le\sum_{n=N+1}^\infty n^{-s}\le\int_N^\infty x^{-s}dx=\frac{N^{1-s}}{s-1}$$

כעת נביט בהפרש בין הטור האינסופי לסופי על מנת להעריך

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^N n^{-s}+\left(\sum_{n=N+1}^\infty n^{-s}-\frac{1}{s-1}\right)$$

לפי האי שוויון למעלה נקבל

$$\sum_{n=1}^N n^{-s}+\left(\frac{(N+1)^{1-s}-1}{1-s}\right)\le\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\le\sum_{n=1}^N n^{-s}+\left(\frac{N^{1-s}-1}{1-s}\right)$$

וניקח בנפרד (עבור N קבוע) $\overline{\lim}$ ו $\underline{\lim}$ של החסם העליון והתחתון כאשר $s\to1^+$. נשתמש בכך ש $\lim_{s\to1^+}[\frac{1}{s-1}(\frac{1}{N^{s-1}}-1)]=-\ln(N)$ שכן זו הנגזרת של הפונקציה N^{-x} בנקודה 0. נקבל

$$\limsup_{s\to1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)\le\limsup_{s\to1^+}\sum_{n=1}^N n^{-s}+\left(\frac{N^{1-s}-1}{1-s}\right)=\sum_{n=1}^N n^{-1}-\ln(N)=:a_N$$

$$\liminf_{s\to1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)\ge\liminf_{s\to1^+}\sum_{n=1}^N n^{-s}+\left(\frac{(N+1)^{1-s}-1}{1-s}\right)=\sum_{n=1}^N n^{-1}-\ln(N+1)=:b_N$$

לאחר מכן ניקח גבול כאשר $n\to\infty$. נקבל $b_N\le C_1\le C_2\le a_N\le b_N+\ln\frac{N+1}{N}$ ובפרט שתי הסדרות מתכנסות, לאותו גבול, השווה גם ל $C_1=C_2$.

4.3.4 למכפלה: קריטריון אבל ודיריכלה

בתת פרק זה אנו דנים בהתכנסות של האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\omega fg$. אם היינו דנים "רק" בהתכנסות בהחלט, אז למשל התנאים ש f חסומה ו $\int|g|<\infty$ מספיקים כמובן. התכנסות בתנאי היא יותר מסובכת, כמו במקרה של טורים מספריים. הנה מקרה לדוגמא

$$\int_1^\infty\frac{\sin(x)}{x}dx$$

כאן ברור ש $\int_1^\infty |\frac{\sin(x)}{x}|dx = \infty$ משום שניתן להעריך את האינטגרל מלמטה על ידי אינטגרל על תחום חלקי בו $\sin(x)$ חסומה מלמטה על ידי, נאמר, $1/2$, ואז להשתמש בכך ש $\int x^{-1}$ מתבדר גם בתחום חלקי זה.

מצד שני, אינטגרציה בחלקים מראה שהאינטגרל כן מתכנס בתנאי

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = (-\cos(x)\frac{1}{x})|_1^\infty - \int_1^\infty \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$$

שכן הביטוי הראשון מתכנס בהחלט, ולביטוי הראשון יש משמעות (הגבול סופי). העובדה שמותר לעשות "בחלקים" מיידית, שכן את החישוב כולו ניתן לבצע עבור אינטגרל עד N ורק אז להשאיף אותו ל ∞.

המקרה הפרטי הזה עובד גם באופן כללי יותר, וזה נקרא קריטריון אבל דיריכלה, שאת המקביל אליו בטורים מספריים למדנו בסמסטר א (טוב להיזכר).

משפט 4.16 [משפט אבל] תהיינה $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$. נניח ש f מונוטונית ו g רציפה. נניח גם ש $f\in C^1[a,\omega)$ (גזירה ברציפות).
נניח גם ש f חסומה, ו $\int_a^\omega g<\infty$. אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

המשפט השני דומה מאוד, רק "מחליפים בו את התפקידים".

משפט 4.17 [משפט דיריכלה] תהיינה $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$. נניח ש f מונוטונית ו g רציפה. נניח גם ש $f\in C^1[a,\omega)$ (גזירה ברציפות).
נניח גם ש $\int_a^x g$ חסום כפונקציה של x וש $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$. אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

לפני ההוכחה נציין שלמשל מקבלים (נאמר על פי דיריכלה) התכנסות של $\int_1^\infty\frac{\sin(x)}{x}dx$ ושל $\int_1^\infty\frac{\sin(x)}{\ln(x)}dx$, מיידית.

הוכחה: [הוכחת משפט אבל] מהנתונים כולן אינטגרביליות בכל תת קטע סגור. נראה שמתקיים קריטריון קושי. משימוש בקריטריון קושי עבור האינטגרל של g נקבל שיש $B<\omega$ כך שלכל $b_1,b_2\in[B,\omega)$ מתקיים $|\int_{b_1}^{b_2}g|<\frac{\varepsilon}{2M}$ כאשר M הוא החסם של $|f|$. נשתמש בלמה של בונה גרסא 2 (משפט 3.52) שמבטיח קיום x_0 בין b_1 לבין b_2 (ובפרט, גם הוא גדול מ B) כך ש

$$|\int_{b_1}^{b_2}fg|=|f(b_1)\int_{b_1}^{x_0}g+f(b_2)\int_{x_0}^{b_2}g|\le M|\int_{b_1}^{x_0}g|+M|\int_{x_0}^{b_2}g|\le\varepsilon$$

■

הוכחה: [הוכחת משפט דיריכלה] מהנתונים כולן אינטגרביליות בכל תת קטע סגור. נשים לב ש $\int_x^y g$ חסומה גם היא כי אם נסמן ב $G(x)$ את $\int_a^x g$ והיא חסומה על ידי M אז הביטוי הקודם הוא פשוט $G(y)-G(x)$ וחסום על ידי $2M$. שוב לפי הלמה של בונה נרשום

$$|\int_{b_1}^{b_2}fg|=|f(b_1)\int_{b_1}^{x_0}g+f(b_2)\int_{x_0}^{b_2}g|\le[|f(b_1)|+|f(b_2)|]2M$$

כעת נבחר את B כך שלכל $b > B$ יתקיים $|f(b)| < \frac{\varepsilon}{4M}$, ולכן קריטריון קושי יתקיים. $\blacksquare$

סוף שיעור 7

4.3.5 סטירלינג [העשרה - בינתיים - אולי נשוב אליו]

נוסחת סטירלינג היא אחת הנוסחאות השימושיות ביותר שתלמדו בקורס. היא משמשת על פי רוב להערכה של המספר $n!$ על ידי הביטוי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$. כשאומרים "הערכה" אז מתעניינים למשל בשגיאה.

הבה נראה מה מקבלים בפשטות מהשוואת טורים ואינטגרלים. אחר כך נעבוד קצת יותר כדי לקבל הערכה טובה יותר. נשים לב שממונוטוניות $\ln$ מתקיים

$$\int_{j-1}^{j} \ln(x)dx \leq \ln(j) \leq \int_{j}^{j+1} \ln(x)dx$$

ולכן הסכום מקיים

$$[x\ln(x) - x]_1^n = \int_1^n \ln(x)dx \leq \sum_{j=2}^{n} \ln(j) = \sum_{j=1}^{n} \ln(j) \leq \int_1^{n+1} \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_1^{n+1}$$

וקיבלנו

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$

בעצם כאן מסתיים החלק שבגללו הראינו עכשיו את סטירלינג. זו כמובן הערכה לא מי יודע מה, רק

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n}$$

הנה הטענה המדויקת שאנחנו מראים

טענה 4.18 [נסחת סטירלינג] מתקיים שלכל n טבעי

$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$$

ובפרט

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

ניקח לוגריתם כדי לכתוב זאת יותר בפשטות. רוצים להראות

$$\ln(\sqrt{2\pi}) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n \leq \sum_{j=1}^{n} \ln(j) \leq \ln(\sqrt{2\pi}) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + \frac{1}{12n}$$

את ההוכחה עצמה נבצע בשיטות של חדו"א 1 דווקא.

הוכחה: נגדיר את הסדרה $d_n = \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n$ שזו הסדרה שאנו טוענים מקיימת $\ln(\sqrt{2\pi}) \le d_n \le \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n}$. נראה זאת בשלושה שלבים: ראשית נראה ש

$$0 \le d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

הדבר יוכיח שהסדרה מונוטונית יורדת ואילו $d_n - \frac{1}{12n}$ עולה, ובפרט לכן שתיהן מתכנסות לגבול משותף שנסמן אותו C. זה בפרט יראה ש $d_n = C + \frac{\theta_n}{12n}$ עבור איזשהו $\theta_n \in [0,1]$. כל שנותר יהיה לבדוק - מהו C. נתחיל בהוכחת ההערכה ל $d_n - d_{n+1}$. וזאת נעשה על ידי נסחת ואליס - נשתמש בטור טיילור של $\ln(1+t)$ כפי שמדתם בחדו"א 1. $t \in (-1,1]$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$

ועבור כל $t \in (-1,1)$

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots$$

לכן

$$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+t}{1-t}) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots$$

כעת נחשב

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n - \ln((n+1)!) + (n+\frac{3}{2})\ln(n+1) - n - 1 \\ &= (n+\frac{1}{2})[-\ln(n) + \ln(n+1)] - 1 = (n+\frac{1}{2})[\ln(\frac{n+1}{n})] - 1 \\ &= (n+\frac{1}{2})[\ln(\frac{2n+1+1}{2n+1-1})] - 1 = (n+\frac{1}{2})[\ln(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}})] - 1 \end{aligned}$$

ונשתמש בנוסחא שלנו כדי לקבל

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1)[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2n+1})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2n+1})^5 + \cdots] - 1$$

כך רואים כי $d_n - d_{n+1} \ge 0$ וגם

$$d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1})^{2j} = \frac{1}{3}\frac{(\frac{1}{2n+1})^2}{1-(\frac{1}{2n+1})^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{4n^2+4n} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

כך קיבלנו את השלב הראשון. כעת נסיק, כמוסבר מעלה, שלסדרה d_n יש גבול C. כדי לחשב אותו נשתמש בנוסחת ואליס. הנוסחא היא כזכור

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{[2^n n!]^2}{[(2n)!/(2n)!!]^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{[2^n n!]^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}$$

ולכן, היות שאנו יודעים שלכל n קיים $\theta_n \in [0,1]$ עבורו

$$n! = e^C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

אפשר פשוט להציב אותו בנסחת ואליס ולקבל

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{[2^n n!]^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[2^n e^C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}\right]^4}{\left[e^C (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}\right]^2 (2n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2C}}{2n+1} \frac{2^{4n}}{2^{4n+1}} \frac{n^{4n+2}}{n^{4n+1}} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{12n}} = \frac{e^{2C}}{4}\end{aligned}$$

זאת אומרת $C = \ln(\sqrt{2\pi})$. קיבלנו את אי השוויון הרצוי

$$\ln(\sqrt{2\pi}) \le \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n \le \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n}$$

$\blacksquare$

סוף העשרה

ב. סדרות וטורי פונקציות

5 סדרות וטורי פונקציות כלליים

5.1 הקדמה ומוטיבציה

עד היום עסקנו בנפרד בסדרות, ובפונקציות. כעת עוברים לדבר על סדרות של פונקציות.

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

(כמובן התחום לא חייב להיות קטע סגור). למשל,

1. הקטע $[0,1]$ הסדרה $f_n(x) = x^n$
2. קטע לבחירתכם $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$
3. על $\mathbb{R}$ הסדרה $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
4. הקטע $[0,1]$ הסדרה $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$

הגדרה 5.1 יהיה $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע (מוכלל) ותהיינה $f_n : I \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות. נאמר שהסדרה שואפת לפונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ נקודתית ב-I אם לכל $x \in I$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

שאלות טבעיות שצצות הן למשל

(א) האם גבול נקודתי של רציפות הוא רציף?

(ב) האם גבול נקודתי של אינטגרביליות רימן הוא אינטגרבילי רימן?

(ג) האם האינטגרל של הגבול נקודתי (אם הוא אינטגרבילי) הוא גבול האינטגרלים?

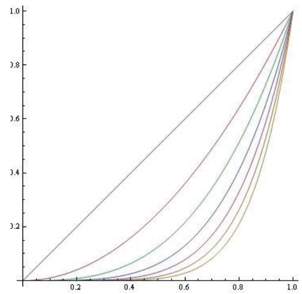
(ד) מה הקשר בין נגזרת הגבול וגבול הנגזרות?

התשובות שנביא מייד לכל השאלות הללו מעידות שמושג הגבול הנקודתי הוא חלש מידי כדי להסיק משהו על הפונקציה הגבולית. לכן נעבור, מייד אחרי התשובות לשאלות, למושג חזק יותר של התכנסות סדרת פונקציות.

תשובות:

(א) לא. הגבול של הסדרה בדוגמא 1 (שכולה פונקציות רציפות) הוא הפונקציה הלא רציפה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



איור 14: הסדרה x^n עבור $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

(ב) לא. אפשר בקלות ליצור סדרה של פונקציות שכולן אינטגרביליות והן מתכנסות נקודתית לפונקציית דיריכלה. כדי לבנות אותן ניקח מנייה של הרציונלים בקטע $[0,1]$, נאמר

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$$

ונגדיר את $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ להיות $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. כולן רציפות למקוטעין ולכן אינטגרביליות, קל לראות שיש שאיפה נקודתית לפונקציית דיריכלה, אך פונקציית דיריכלה כמובן אינה אינטגרבילית רימן.

ג) לא. נביט בדוגמא 4 למשל, קל לראות ש $f_n \to 0$ נקודתית. מצד שני

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2}\int_0^1 (1-y)^n dy = \frac{n}{2}[-\frac{(1-y)^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}$$

(ד) אין קשר מיידי, כמו שמעידה דוגמא 2 נאמר בקטע $[0,1]$, הסדרה שואפת נקודתית ל־0 אבל סדרת הנגזרות היא $f_n'(x) = \cos(nx)$ שאיננה מתכנסת לשום דבר ב ־ x כללי.

נעיר כאן שסעיף ד' הוא העיקרי שבו אין התנהגות טובה גם אם ההתכנסות שמניחים היא חזקה יותר כמו בסעיף הבא.

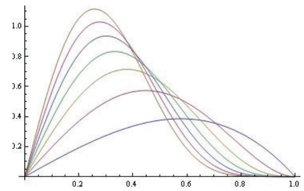
5.2 התכנסות במ"ש

5.2.1 הגדרה ועובדות פשוטות

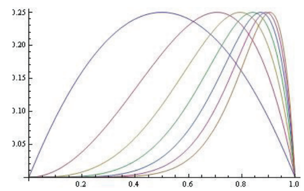
הגדרה 5.2 יהיה $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע (מוכלל) ותהיינה $f_n : I \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות. נאמר ש $f_n \to f$ במידה שווה (במ"ש) על (או ב־) I אם מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ומסמנים גם על ידי $f_n \xrightarrow{u} f$ (האות u מעל החץ) או המילה "במ"ש" מעל החץ. באופן שקול ניתן לומר: לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $x \in I$ ולכל $n > N$, מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.



איור 15: הסדרה $nx(1-x^2)^n$ עבור $n=1,2,3,4,5,6,7$



איור 16: הסדרה $x^n - x^{2n}$ עבור $n=1,2,3,4,5,6,7$

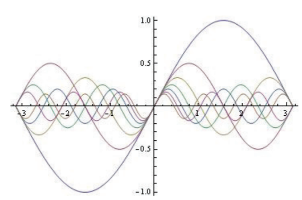
נעיר שאין הדבר דומה לרציפות במ"ש, ובפרט ההגדרה תקפה גם לכל קבוצה אבסטרקטית במקום I (אין שימוש ב"מרחק" על I). המילה במ"ש מתייחסת לכך שעבור ε נתון, אותו N צריך להתאים לכל x בקבוצה. נשים לב שהתכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית (לאותה פונקציה), אך להפך לא נכון. לכן תמיד המועמדת להיות גבול במ"ש של סדרה מסויימת זו הפונקציה שהיא הגבול הנקודתי.

דוגמא: נחזור לקטע $[0,1]$ ולסדרה $f_n(x) = x^n$. יש התכנסות נקודתית ל $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, אבל לכל n קיימת נקודה $x_n \in (0,1)$ בה $f_n(x_n) = 1/2$ ובפרט $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \geq 1/2$ לכל n.

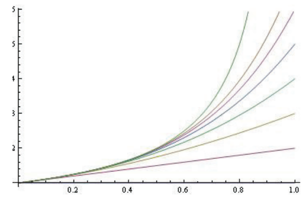
אם נדמה לכם שהבעיה היתה בעובדה שפונקציית הגבול לא הייתה רציפה ־ אין זה נכון. קל לוודא שבדוגמא של הקטע $[0,1]$ והסדרה $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ הפונקציה הגבולית היא זהותית אפס ובפרט רציפה, אבל הפונקציות אינן חסומות ולכן התנאי של התכנסות במ"ש לא מתקיים. אפשר ממש לבחור $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ולראות זאת.

עוד דוגמא נחמדה היא $f_n(x) = x^n - x^{2n}$. שואפת לאפס נקודתית, אבל יש לה מקסימום (השווה לרבע) לכל n, ובפרט לא שואפת לאפס במ"ש.

האם $\frac{\sin(nx)}{n} \to 0$ במ"ש? כמובן.



איור 17: הסדרה $\frac{\sin(nx)}{n}$ עבור $n=1,2,3,4,5,6,7$



איור 18: הסדרה $\sum_{j=0}^{n} x^j$ עבור $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$

האם $\sum_{j=0}^{n} x^j \to \frac{1}{1-x}$ במ"ש? תלוי באיזה תחום שואלים. בקטע סגור, למשל $[0, \frac{9}{10}]$ (כן), או בתחום $[0, 1)$ (לא).

ההפרש בין הסדרה לפונקציה הוא $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ ולכן בכל קטע סגור המוכל ב $[0, 1)$ שואף במ"ש לאפס, אבל בקטע הפתוח $[0, 1)$ אינו חסום.

נוסיף כאן מספר הערות והגדרות שיהיו בשימוש בהמשך.

הערה 5.3 תהי $f_n : I \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות ונניח $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי גם לכל תת סדרה מתקיים $f_{n_j} \xrightarrow{u} f$ ובפרט לתת סדרה שהיא הזזה באינדקסים. בדומה, הוספת, השמטת או שינוי של מספר סופי של איברים מתוך סדרת הפונקציות לא משפיעה על התכנסות. ההסבר הוא שפשוט מדובר על התכנסות לאפס של סדרת המספרים $a_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

הגדרה 5.4 [חסימות במידה אחידה] סדרת פונקציות f_n תיקרא חסומה במידה אחידה אם קיים M כך שלכל n ולכל x מתקיים $|f_n(x)| \leq M$.

הערות 5.5 ראשית נשים לב שגבול נקודתי (ולכן גם גבול במ"ש) של חסומות במידה אחידה יהיה גם חסום על ידי אותו M. נשים לב גם שאם $f_n \xrightarrow{u} f$ והפונקציה f חסומה אז החל מאינדקס מסוים N_0, הסדרה $\{f_n\}_{n \geq N_0}$ חסומה במידה אחידה.

שנית, אם $f_n \xrightarrow{u} f$ ו f איננה חסומה, נובע שקיים N_0 כך שלכל $n \geq N_0$ גם f_n איננה חסומה. (כי הן במרחק נקודתי קטן ממנה, בכל הנקודות בו זמנית.) לכן, אם נתון ש f_n חסומות (ולא נתון "במידה אחידה") והן שואפות במ"ש לפונקציה אז נובע שהפונקציה חסומה, ולכן שהן חסומות במידה אחידה. זאת אומרת, חסימות יחד עם התכנסות במ"ש למשהו גורר חסימות במידה אחידה.

לעניין מכפלה של פונקציות: נשים לב שאם $f_n \xrightarrow{u} f$ ו $g_n \xrightarrow{u} g$ זה לא גורר $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$ למשל $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ סדרה קבועה ו $g_n = \frac{1}{n}$ סדרה בה כל איבר הוא פונקציה קבועה (אחרת לאינדקסים שונים) ששואפת כמובן ל 0 במ"ש. המכפלה שואפת לאפס נקודתית אך לא במ"ש.

למה 5.6 תהיינה $f_n, g_n, f, g : I \to \mathbb{R}$ פונקציות ונניח ש $f_n \xrightarrow{u} f$ ו $g_n \xrightarrow{u} g$. כמו כן נניח שכל הפונקציות חסומות במידה אחידה על ידי M. אזי $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$.

הוכחה: אכן, הטריק הרגיל של מכפלות עובד

$$\begin{aligned}\sup_x |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq \sup_x |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + \sup_x |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq M\left(\sup_x |f_n(x) - f(x)| + \sup_x |g_n(x) - g(x)|\right) \to_{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

■

כמובן שעל פי ההערה מעלה מספיק היה להניח חסימות של f,g והחסימות במידה אחידה נובעת מהתכנסות במ"ש.

5.2.2 קריטריון קושי להתכנסות במ"ש

משפט 5.7 [קריטריון קושי] תהיינה $f_n : I \to \mathbb{R}$. הן מתכנסות במ"ש אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n,m > N_\varepsilon$ מתקיים שלכל $x \in I$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

הוכחה: הכיוון הקל: נניח שיש התכנסות במ"ש זאת אומרת שקיימת $f : I \to \mathbb{R}$ כך ש $f_n \xrightarrow{u} f$. יהיה $\varepsilon > 0$ ונבחר את N כך שלכל $n > N$ ולכל x יתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

לכן לכל $n,m > N$ יתקיים שלכל x בקטע

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

בכיוון שני: נניח שתנאי קושי מתקיים. בפרט לכל x מתקיים ש $f_n(x)$ סדרת קושי, ולכן יש לה גבול שאותו נסמן ב $f(x)$. כעת עלינו להראות ש $f_n \xrightarrow{u} f$. יהיה $\varepsilon > 0$ ונבחר את N על פי קריטריון קושי כך שלכל $n > N$ ולכל $m > N$ מתקיים שלכל x בקטע $f_m(x) - /2\varepsilon < f_n(x) < f_m(x) + \varepsilon/2$. לכן כשניקח $m \to \infty$ אי השוויון עדיין יתקיים (אם כי אולי חלש), זאת אומרת שעבור $n > N$ מתקיים לכל x

$$f(x) - \varepsilon < f(x) - \varepsilon/2 \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon/2 < f(x) + \varepsilon$$

וזו בדיוק התכנסות במ"ש. ■

5.2.3 גבול במ"ש של רציפות

ראינו דוגמאות של התכנסות נקודתית של פונקציות רציפות לפונקציה שאינה רציפה. כאשר ההתכנסות היא במ"ש זה דווקא כן עובד.

משפט 5.8 [גבול במ"ש של רציפות הוא רציף] תהיינה $f_n : I \to \mathbb{R}$ רציפות ונניח ש $f \overset{u}{\to} f_n$. אזי f רציפה.

הוכחה: תהי $x_0 \in I$ יהי $\varepsilon > 0$. מהתכנסות במ"ש קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל y מתקיים $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3$. נבחר איזשהו $n > N$ ומרציפות f_n מתקיים שקיים δ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. נרשום

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

וקיבלנו את הגדרת רציפות בנקודה. ■

הערה 5.9 נעיר שניתן להוכיח משפט כללי יותר על נקודה בודדת. נניח שנתונה סדרה $f_n \overset{u}{\to} f$ ונקודה x_0 כך שקיים $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \alpha_n$ לכל n ונניח כי $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. אזי קיים הגבול $\alpha = \lim_{x\to x_0} f(x)$. ההוכחה זהה למה שכתוב מעלה. יתר על כן ־ ההוכחה תקפה גם עבור x_0 שהוא $\pm\infty$. בידקו זאת בעצמכם.

סוף שיעור 8

5.2.4 משפט דיני

משפט Dini שימושי מאוד כדי להראות שיש התכנסות במ"ש.

משפט 5.10 [דיני] תהיינה $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות ונניח ש $f_n\to f$ נקודתית. נניח גם ש
(א) $f_n(x)$ סדרה יורדת לכל x נתון
(ב) f רציפה
אזי $f_n\overset{u}{\to}f$.

בהוכחה נעשה שימוש בלמה של היינה ובורל. למה זאת ניתן ללמוד בחדו"א 1, אם כי השנה לא עשינו זאת. אנו נוכיח גרסא מוכללת שלה בפרק ג של חדו"א 2. אנו ממליצים לכם לנסות ולהוכיח אותה בעצמכם לפני שאתם מביטים בהוכחה הרשומה מטה. נזכיר שקבוצה $U\subset\mathbb{R}$ נקראת "פתוחה" אם לכל $x\in U$ קיימת $\delta>0$ כך ש $(x-\delta,x+\delta)\subset U$, אם כי לצורך השימוש שלנו מספיק היה לעסוק בקבוצות פתוחות הכי פשוטות - קטעים פתוחים.

למה 5.11 [הלמה של היינה ובורל] יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהיינה קבוצות פתוחות על הישר $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כאשר A קבוצת אינדקסים כלשהי (לאו דווקא בת מנייה). נניח כי הן כיסוי של הקטע $[a,b]$ דהיינו

$$[a,b]\subset\cup_{\alpha\in A}U_\alpha$$

אזי קיים תת כיסוי סופי, זאת אומרת קיימים $M\in\mathbb{N}$ ו - $\alpha_1,\ldots,\alpha_M$ כך ש

$$[a,b]\subset\cup_{i=1}^{M}U_{\alpha_i}$$

הוכחה: [רעיון ההוכחה של הלמה של היינה ובורל] נניח בשלילה שאין לקטע תת כיסוי סופי, ונגדיר באינדוקציה סדרה של קטעים מקוננים $[a_i,b_i]$ שלאף אחד מהם אין תת כיסוי סופי, ואורכם שואף לאפס, פשוט על ידי חלוקת הקטע לשני חלקים שווים בכל שלב, ושכל שלב לפחות לאחד מהחצאים אין תת כיסוי סופי. בפרט $|b_i-a_i|=\frac{b-a}{2^i}$. לפי הלמה של קנטור על קטעים מקוננים ישנה נקודה יחידה בחיתוך של כל הקטעים הללו, נסמן אותה x_0. משום ש $\{U_\alpha\}$ הינו כיסוי, קיימת α_0 כך ש $x_0\in U_{\alpha_0}$ ומשום ש U_{α_0} פתוחה, קיימת $\delta>0$ כך ש $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset U_{\alpha_0}$ ולכן גם קיים N כך ש $[x_0-\frac{b-a}{2^N},x_0+\frac{b-a}{2^N}]\subset U_{\alpha_0}$ ובפרט, משום ש $x_0\in[a_N,b_N]$ וכן $|b_N-a_N|=\frac{b-a}{2^N}$ נקבל כי $[a_N,b_N]\subset U_{\alpha_0}$ בסתירה לבנייה בה לא היה לתת קטע הנ"ל תת כיסוי סופי. ■

כעת נפנה להוכחת משפט דיני.

הוכחה: [הוכחת משפט דיני] כמובן לכל n ולכל x מתקיים $f(x)\le f_n(x)$ לכן צריך להוכיח רק שלכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ ולכל x מתקיים $f_n(x)<f(x)+\varepsilon$. השאיפה הנקודתית גוררת כי לכל x ב- $[a,b]$ קיים מספר $n(x)$ כך ש

$$f_{n(x)}(x)-f(x)<\varepsilon$$

(למעשה יכולנו לדעת שהדבר מתקיים מ-$n(x)$ ואילך, אך כרגע זה לא נחוץ).

משום ש $f_n(x)$ רציפה וגם f רציפה, אי השוויון הנ"ל נכון לא רק ב-x אלא גם בסביבה פתוחה כלשהי שלו, שנסמן $U_x \subset [a,b]$ המקיימת $x \in U_x$. משום שהסדרה יורדת, נסיק שלכל $y \in U_x$ ולכל $n > n(x)$ מתקיים

$$0 \leq f_n(y) - f(y) \leq f_{n(x)}(y) - f(y) < \varepsilon$$

הקבוצות U_x הן כיסוי פתוח של $[a,b]$ ומהלמה של היינה ובורל קיים תת כיסוי סופי, דהיינו קיימים $x_1, \ldots, x_M$ כך ש $\cup_{j=1}^{M} U_{x_j} \supset [a,b]$ ולכן אם נסמן $n_0 = \max(n(x_1), \ldots, n(x_M))$ נקבל שלכל $y \in [a,b]$ ולכל $n > n_0$

$$0 \leq f_n(y) - f(y) < \varepsilon$$

וזו התכנסות במ"ש (מלמעלה). ■

הערה 5.12 כמובן ניתן לנסח משפט דומה עבור התכנסות של סדרה עולה של רציפות המתכנסות לפונקציה רציפה. למעשה מספיק להניח שכל $f_n(x)$ היא מונוטונית (ז"א חלקן יכולות לעלות וחלקן לרדת) - הראו זאת.

השימוש הסטנדרטי למשפט דיני הוא להתכנסות במ"ש של טור של פונקציות חיוביות. נתונות פונקציות רציפות $u_n(x) \geq 0$ ובונים את סדרת הסכומים החלקיים $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x)$. נביט בגבול הנקודתי של $S_n(x)$, ונניח כי הוא מתכנס לפונקציה נתונה $S(x)$. נניח שפונקציה זו היא רציפה. אזי ההתכנסות של הטור חייבת להיות במ"ש. למשל $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ בקטע הסגור $[0,1]$ יתן התכנסות במ"ש של הסדרה $\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ לפונקציה e^x.

מדוע זה שימושי לדעת שגבול הוא במ"ש? למשל אם אנחנו מעוניינים לבצע מה שנקרא "אינטגרל איבר איבר", דהיינו להחליף אינטגרל עם סכום אינסופי, או עם גבול (זה אותו הדבר). על כך הסעיף הבא.

5.2.5 גבול תחת האינטגרל ומזורנטה

משפט 5.13 [החלפת גבול ואינטגרל] תהיינה $f_n \in R[a,b]$ ותהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ונניח שמתקיים $f_n \xrightarrow{u} f$. אזי $f \in R[a,b]$ ויתר על כן

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

הוכחה: על מנת להראות אינטגרביליות, נוכיח שמתקיים קריטריון דרבו, זאת אומרת שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה המקיימת $\omega(f,\Pi) = \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$. נשתמש בהתכנסות במ"ש על מנת לבחור את n מספיק גדול כך ש $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(4(b-a))$ לכל x. בפרט לכל קטע J יתקיים

$|\omega(f,J)-\omega(f_n,J)|\leq \varepsilon/(2(b-a))$. משום ש f_n היא אינטגרבילית, היא מקיימת את קריטריון דרבו ויש לה חלוקה עבורה $\overline{\Sigma}(f_n,\Pi)-\underline{\Sigma}(f_n,\Pi)<\varepsilon/2$. כעת נחשב

$$\omega(f,\Pi)=\sum\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i\leq\sum\omega(f_n,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i+\varepsilon/2<\varepsilon$$

וסיימנו. כדי להראות התכנסות של סדרת האינטגרלים עצמה פשוט נחשב

$$|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f_n(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)-f_n(x)|dx\leq(b-a)\sup_x|f(x)-f_n(x)|\to_{n\to\infty}0$$

■

הערה 5.14 כשמדובר באינטגרל לא אמיתי, אפילו אם יש התכנסות במ"ש עדיין יכול להיות שלא תהיה התכנסות של האינטגרלים. אפשר לקרוא לתופעה זו "מאסה בורחת לאינסוף", והנה דוגמא של $f_n\overset{u}{\to}0$ בה זה קורה עבור האינטגרל בין 0 ל־∞:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n & x\in[0,n]\\ 0 & o/w\end{cases}$$

זה לא אומר שאין מה לעשות עבור אינטגרלים לא אמיתיים, המשפט הבא אומר שאם יש גם "שליטה" על כל הפונקציות בו זמנית, הדבר אפשרי. נסמן כרגיל ω להיות הקצה הימני של הקטע הפתוח, שיכול גם להיות $+\infty$.

משפט 5.15 [מזורנטה] תהיינה $f_n:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שהן אינטגרביליות בכל תת קטע סגור ושלכל n מתקיים $\int_a^\omega f_n<\infty$ (ובפרט ־ קיים). תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שמתקיים $f_n\overset{u}{\to}f$ בכל תת קטע סגור $[a,b]$ עם $b<\omega$. נניח שבנוסף קיימת $\Psi:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת קטע סגור, כך שלכל n מתקיים $|f_n|\leq\Psi$, וכך ש $\int_a^\omega\Psi<\infty$. אזי $f\in R[a,b]$ לכל תת קטע סגור, האינטגרל הלא אמיתי שלה בקטע $[a,\omega)$ מתכנס ויתר על כן

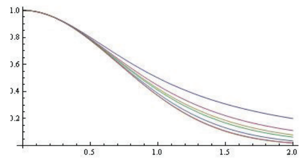
$$\int_a^\omega f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n(x)dx\leq\int_a^\omega\Psi(x)dx$$

(זאת אומרת, אין "בריחה של מאסה לאינסוף"). לפונקציה Ψ קוראים "מז'ורנטה" של הסדרה $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

הוכחה: מהמשפט הקודם לכל $b\in(a,\omega)$ מתקיים ש $f\in R[a,b]$, ויתר על כן,

$$\int_a^b f_n\to_{\to\infty}\int_a^b f$$

כמו כן, $\int_a^\omega f$ קיים וסופי שכן $|f|\leq\Psi$ על פי לקיחת גבול נקודתי ויש משפט השוואה לפונקציות חיוביות, לכן האינטגרל הלא אמיתי מתכנס, ובהחלט. כדי לקבל את גבול האינטגרלים יהי $\varepsilon>0$ ונבחר x_0 מספיק



איור 19: הסדרה $(1+\frac{x^2}{n})^{-n}$ עבור $n=1,2,3,4,10,100,\infty$

גדול כך ש $\int_{x_0}^{\omega}\Psi<\varepsilon/4$. נבחר את n_0 מספיק גדול כך ש $\sup_{x\in[a,x_0]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2(x_0-a)$ לכל $n>n_0$. כעת נחשב

$$\begin{aligned}|\int_a^{\omega} f_n-\int_a^{\omega} f| &\leq |\int_a^{x_0} f_n-\int_a^{x_0} f|+|\int_{x_0}^{\omega} f_n-\int_{x_0}^{\omega} f| \\ &\leq (x_0-a)\sup_{[0,x_0]}|f_n-f|+\int_{x_0}^{\omega}|f_n|+\int_{x_0}^{\omega}|f|\leq\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{x_0}^{\omega}\Psi\leq\varepsilon\end{aligned}$$

ולפי הגדרת הגבול סיימנו. ■

נראה דוגמא לשימוש במשפט האחרון. חישוב האינטגרל $I=:\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. זה חישוב שמופיע בצורה מודרכת בשיעורי הבית על ידי שימוש באי שוויון, כעת אפשר בעזרת המשפט האחרון להסתפק בחישוב יחיד ובהתכנסות סדרת אינטגרלים.

נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x)=(1+\frac{x^2}{n})^{-n}\to e^{-x^2}$$

הגבול הזה הוא יורד ($f_{n+1}\leq f_n$) והפונקציה הגבולית רציפה לכן על פי משפט דיני (משפט 5.10) הגבול הוא במ"ש על כל אינטרואל חסום $[0,a]$. יתר על כן, משום שהסדרה יורדת היא כולה חסומה על ידי האיבר הראשון $\frac{1}{1+x^2}$ שיכול לשמש לה מזורנטה (ושחישבנו לו כבר את האינטגרל הלא אמיתי, והוא מתכנס). על פי המשפט האחרון (משפט 5.15) מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx=I$$

כדי לחשב את הסדרה המספרית של האינטגרלים ומצוא את גבולה, נבצע שינוי משתנה קלאסי $x=x(\varphi)=\sqrt{n}\tan\varphi$ שמקיים $(1+\frac{x^2}{n})=1+\tan^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}$. כמובן $\frac{dx}{d\varphi}=\sqrt{n}\frac{1}{\cos^2\varphi}$ שרושמים גם כ $dx=\sqrt{n}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$ ונקבל

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\varphi\sqrt{n}d\varphi$$

על פי הטענה המקדימה לנוסחת ואליס והנוסחא עצמה ניתן לרשום

$$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sqrt{\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2(2n-1)\frac{n}{2n-1}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\pi}/2$$

סוף שיעור 9

5.2.6 על גזירה וגבול

נחזור על כמה דוגמאות המדגימות את הבעייתיות בהחלפת נגזרת וגבול.

- $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$ בכל קטע. $f_n \xrightarrow{u} 0$ אבל $f_n'(x)=\cos(nx)$ אין לו גבול נקודתי ברוב הנקודות
- $f_n(x)=\frac{2x}{1+n^2x^2}$ בכל קטע. $f_n \xrightarrow{u} 0$ אבל $f_n'(x)=\frac{2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ ולכן $f_n'(0)=2$ לכל n ואילו $f_n'(x)\to 0$ לכל x אחר כאשר $n\to\infty$. בפרט אין שאיפה במ"ש של הנגזרות.

המשפט העיקרי על החלפת גבול ונגזרת ($(\lim f_n)'=\lim(f_n')$) לכן דורש הרבה תנאים. נוכל להחליף אם הנגזרות בעצמן מתכנסות במ"ש (למשהו - ואז ינבע שזו נגזרתה של הפונקציה הגבולית) ובנוסף הדרישה היא שהן רציפות ושיש נקודה בה הסדרה המקורית מתכנסת. לרב ההתכנסות הנקודתית ידועה בכל הנקודות ולא רק באחת, אבל משום שאחת מספיקה אנו מנסחים זאת כך.

משפט 5.16 [על החלפת נגזרת וגבול] תהיינה $g,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש $f_n\in C^1[a,b]$ ונניח שמתקיים
(א) קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש $f_n(x_0)$ מתכנסת (לגבול סופי)
(ב) מתקיים $f_n' \xrightarrow{u} g$
אזי קיימת $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש $f'=g$ וכן $f_n \xrightarrow{u} f$.

נראה דוגמא לשימוש לפני ההוכחה: נביט בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ בסדרה $f_n(x)=\sum_{k=0}^n x^k$. סדרת הנגזרות היא $\sum_{k=0}^{n-1}kx^k$. המשפט יאמר לנו מדוע השוויון האמצעי בשורה הבאה תקף, ויתר על כן, ההתכנסות של הטור משמאל לפנקציה מימין היא במ"ש.

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=\lim f_n'=(\lim f_n)'=(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

הסדרה f_n מתכנסת נקודתית לפונקציה $\frac{1}{1-x}$ לכן תנאי (א) מתקיים בכל נקודה בקטע. כמוכן, קיימת g כך ש $f_n' \xrightarrow{u} g$ משום שסדרת הנגזרות מקיימת $|(x^n)'|\le n\frac{1}{2^{n-1}}$ וכעת ניצן להראות שמתקיים קריטריון קושי במ"ש:

$$\sup_{x\in[0,1/2]}|f_n'(x)-f_m'(x)|=\sup_{x\in[0,1/2]}|\sum_{k=m}^{n}kx^{k-1}|\le\sum_{k=m}^{n}k\frac{1}{2^{k-1}}\to_{n>m\to\infty}0$$

מכאן נובע על פי המשפט האחרון השוויון $\lim f_n'=(\lim f_n)'$ ויתר על כן, הגבול הזה הוא במ"ש.

הוכחה: [של משפט 5.16] נסמן $c=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)$. נגדיר את $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x)=c+\int_{x_0}^{x}g(t)dt$$

נראה ראשית שנקודתית $f_n\to f$. מרציפות f_n' ומשפט ניוטון לייבניץ לשיוויון השמאלי, משפט 5.13 על החלפת גבול ואינטגרל לגבול השני, והגדרת f נקבל שלכל x נתון

$$f_n(x)-f_n(x_0)=\int_{x_0}^{x}f_n'(t)dt\to_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}g(t)dt=f(x)-f(x_0)$$

משום שידוע $f(x_0) \to f_n(x_0)$ נקבל שנקודתית $f_n(x) \to f(x)$ לכל x. (זה החלק שעל פי רוב ידוע מראש). משום שכל f_n' רציפות, לפי (ב) ומשפט 5.8 גם g רציפה ולכן על פי המשפט היסודי של החדו"א $f' = g$ [זה היה החלק המרכזי, $(\lim f_n)' = \lim(f_n')$]. כל שנותר לראות הוא כי $f_n \xrightarrow{u} f$. ואכן לכל x מתקיים

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0) - (f(x) - f(x_0))| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &= |\int_{x_0}^{x} [f_n'(t) - f'(t)]dt| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |x - x_0| \sup_{[a,b]} |f_n' - g| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n' - g| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

צד ימין של אי השוויון איננו תלוי ב־x ולכן ניתן לקחת $\sup_{x\in[a,b]}$ ולהסיק שעבור n_0 מספיק גדול, שני האברים קטנים כרצוננו, נאמר יהיה $\varepsilon > 0$ אז ניתן לבחור את n_0 כל שלכל $n > n_0$ שניהם קטנים מ $\varepsilon/2$ וסיימנו. ■

5.2.7 ועכשיו ־ טורי פונקציות. הבוחן של וירשטראס.

אולי כבר שמתם לב שחלק המהדוגמאות שימושיות הן של סדרות שהן בעצם סכומים חלקיים של טורים של פונקציות. כל מה שעשינו כמובן תקף גם שם משום שבסה"כ מדובר על סדרות ־ סדרות הסכומים החלקיים. לומר שטור מתכנס במ"ש לפונקציה מסויימת משמעו שסדרת הסכומים החלקיים מתכנסת אליה במ"ש. מבחינת סימון יש בעיה כי אין לנו "מעל מה" לרשום את האות u. לכן פשוט נרשום במקרה כזה "$\sum u_n = f$ במ"ש". הנה הגרסאות הטוריות של משפטים נבחרים שראינו עד כה. כל ההוכחות הן תירגום של טור לגבול של סדרה, והחלת המשפט המתאים על סדרות של פונקציות.

- רציפות, החלפת סכום אינסופי ואינטגרל (משפט 5.8 ומשפט 5.13) תהיינה $u_n \in C[a,b]$ ונניח ש $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f$ במ"ש. אז $f \in C[a,b]$ ומתקיים

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)dt$$

- משפט דיני לטורים (משפט 5.10) תהיינה $f, u_n \in C[a,b]$ כך ש $u_n \geq 0$ ונניח שנקודתית $f = \sum u_n$. אזי $f = \sum u_n$ במ"ש. (משום שהסדרה S_n מונוטונית עולה).

- החלפת נגזרת וסכום אינסופי ־ נקרא גם "גזירה איבר איבר" (משפט 5.16). נניח כי $u_n \in C'[a,b]$ ונניח כי $g = \sum u_n'$ במ"ש וכן שקיימת נקודה בה $\sum u_n(x_0) < \infty$ מתכנס. אזי קיימת $f = \sum u_n$, במ"ש, וכן $(\sum u_n)' = f' = \sum u_n'$.

משפט שייחודי לטורים הוא ה M בוחן של ויירשטראס (ניתן לנסח אותו לסדרות אך הדבר אינו טבעי שכן הוא עוסק בסדרת ההפרשים, שבטורים זה פשוט אברי הטור).

משפט 5.17 [ה M בוחן של וירשטראס] תהיינה $u_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח שקיימת סדרת מספרים M_n המקיימת $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$ כך שלכל x ולכל n מתקיים $|u_n(x)|\leq M_n$. אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

הוכחה: נשים לב שהסדרה $S_n(x)=\sum_{j=1}^{n} u_j(x)$ (וגם הסדרה $\sum_{j=1}^{n}|u_j(x)|$) היא סדרת קושי במ"ש, ונשתמש במשפט 5.7. אכן קיים n_0 כך ש

$$\sup_{x\in[a,b]}|\sum_{j=n}^{m} u_j(x)|\leq \sup_{x\in[a,b]}\sum_{j=n}^{m}|u_j(x)|\leq \sum_{j=n}^{m} M_j<\varepsilon \qquad n,m>n_0$$

■

5.2.8 אבל ודיריכלה לטורי פונקציות

זהו סעיף שידונו בו איתכם בתירגול שכן הדמיון להוכחת המשפטים המתאימים בטורי מספרים הוא גדול מאוד. נעיר שאנו נזדקק לתוצאות האלה בפרק הבא של טורי חזקות. המלצה - אל תמתינו לתירגול, נסו להיזכר בהוכחות מחדו"א 1 ולהתאים אותן לטורי פונקציות ולהתכנסות במ"ש.

משפט 5.18 [קריטריון אבל] תהיינה $a_k(x),b_k(x)\;:\;[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרות של פונקציות. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב $[a,b]$ וכן כי הסדרה $\{a_n(x)\}$ מונוטונית ב n לכל x קבוע, וחסומה במידה אחידה (הזכרו בהגדרה 5.4). אזי הטור $\sum a_n(x)b_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$.

משפט 5.19 [קריטריון דיריכלה] תהיינה $a_k(x),b_k(x)\;:\;[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרות של פונקציות. נניח כי $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} b_n(x)$ חסומה במידה אחידה ב $[a,b]$ וכן כי הסדרה $\{a_n(x)\}$ מונוטונית ב n לכל x קבוע, ושואפת ל 0 במ"ש. אזי הטור $\sum a_n(x)b_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$.

כדוגמא, נרצה לדון בטור $\sum a_n\sin(nx)$ כאשר $a_n\to 0$ מונוטונית. כדי להשתמש בקריטריון דיריכלה, נבדוק כי $\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)$ חסום. אכן, תוך שימוש בכך ש $\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ נקבל

$$\begin{aligned}
B_N(x)\sin(\frac{x}{2}) &= \sin(x)\sin(\frac{x}{2})+\sin(2x)\sin(\frac{x}{2})+\cdots\sin(Nx)\sin(\frac{x}{2})\\
&= \frac{1}{2}[\cos(\frac{x}{2})-\cos(\frac{3x}{2})+\cos(\frac{3x}{2})-\cos(\frac{5x}{2})+\\
&\quad \ldots+\cos(\frac{2N-1}{2}x)-\cos(\frac{2N+1}{2}x)]\\
&= \frac{1}{2}[\cos(\frac{x}{2})-\cos(\frac{2N+1}{2}x)]
\end{aligned}$$

ולכן

$$B_N(x)=\frac{\cos(\frac{x}{2})-\cos(\frac{2N+1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})}=\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

ובכל תת קבוצה בה B_N חסומה (למשל ב $[\pi/4, 3\pi/4]$) יש התכנסות במ"ש. שאלה למחשבה: האם יש התכנסות במ"ש בקטע שמכיל אפסים של $\sin(x/2)$?

סוף שיעור 10

5.3 בניית פונקציה רציפה ולא גזירה באף נקודה

בסעיף זה נבנה פונקציה שהיא רציפה אך איננה גזירה באף נקודה.

הערות 5.20 ראשית נעיר כמה הערות היסטוריות על בנייה שכזו. 1861 רימן מנחש את הדוגמא

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

ללא הוכחה.

1872 ויירשטראסס נתן דוגמא אחרת של פונקציה בעלת התכונות הללו, כולל הוכחה. הוא בחר $a \in (0,1)$ ו $1 < b \in \mathbb{N}$ כך ש $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ ולקח את

$$W(x) = \sum a^k \cos(b^k \pi x)$$

1916 הארדי מוכיח ש $R(x)$ איננה גזירה בכפולות אירציונליות של π ובכפולות מסוימות רציונלאיות שלו. 1969 Grever מוכיח ש $R(x)$ גזירה רק ב $\frac{p}{q}\pi$ עבור $p, q \in \mathbb{Z}$ אי זוגיים. לא נדון בדוגמאות אלה לעומק, אך מאנליזת פורייה כן נוכל להראות כי

$$\sum 2^{-\alpha n} \cos(2^n x)$$

איננה גזירה באף נקודה עבור $0 < \alpha < 1$.

נפנה לבניית הפונקצייה "שלנו". לשם כך נגדיר פונקציית מסור חיובית בעלת מחזור 1 ובעלת אמפליטודה $\frac{1}{2}$ על ידי

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \begin{cases} x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1-x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \\ u_0(x+1) &= u_0(x) \end{aligned}$$

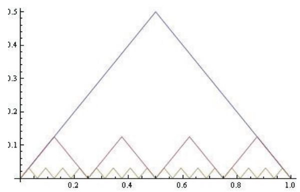
ונגדיר פונקציות מסור נוספות על ידי

$$u_k(x) = u_0(4^k x)/4^k$$

שהן חיוביות, בעלות מחזור $\frac{1}{4^k}$ ובעלות אמפליטודה $\frac{1}{2\cdot 4^k}$.

נביט בטור $\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)$. על פי הבוחן של וירשטראסס הוא מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$ ובפרט מגדיר פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$. נסמן אותה ב f.

משפט 5.21 הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהוגדרה מעלה איננה גזירה באף נקודה.



איור 20: הפונקציות u_0, u_1, u_2 בקטע $[0,1]$

הוכחה: נקבע נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ ונראה שלא קיימת $f'(x_0)$. נשים לב שכל פונקציה u_j היא ליניארית על אינטרוואלים מאורך $\frac{1}{4^j \cdot 2}$ שמתחילים במספר מהצורה $\frac{m}{2 \cdot 4^j}$ ל $m \in \mathbb{N}$. נסמן את המספר הטבעי המשוייך לפונקציה u_n ב m_n, דהיינו $m_n = [2 \cdot 4^n x_0]$ ומקיים $\frac{m_n}{2 \cdot 4^n} \leq x_0 \leq \frac{m_n+1}{2 \cdot 4^n}$. נסמן גם את תת הקטע המתאים ב $\Delta_n = [\frac{m_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{m_n+1}{2 \cdot 4^n}]$. מתקיים $|\Delta_n| = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$ וכן

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots \qquad \text{and} \qquad \cap \Delta_j = \{x_0\}$$

כעת נבנה סדרה $x_n \to x_0$ באופן הבא: ניתן לבחור בכל Δ_n נקודה x_n שנמצאת במרחק $\frac{1}{2}|\Delta_n|$ מהנקודה x_0. ממחזוריות של u_j עבור $j > n$ יתקיים לכל $j > n$ ש $u_j(x_n) = u_j(x_0)$ כי $|\Delta_n|/2$ הוא כפולה שלמה של מחזור של u_j כזו. לכן

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j(x_n) - u_j(x_0)}{x_n - x_0}$$

אבל עבור $j \leq n$ מתקיים כי x_n ו־x_0 נמצאים באותו אינטרואל Δ_j ולכן השיפוע של הגרף של u_j הוא $+1$ או -1 . מדובר אם כן בכל שלב בסדרה בסכום סופי שאיבריו הם ± 1. סכום כזה נותן מספר זוגי כאשר n איזוגי ומספר איזוגי כאשר n זוגי, ובפרט הסדרה לא יכולה להתכנס כאשר $n \to \infty$. אולם, $x_n \to x_0$ כאשר $n \to \infty$ ולכן אילו f הייתה גזירה ב־x_0 צריך היה להתקיים

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

ובפרט הגבול צריך היה להיות קיים. לכן אין גזירות בנקודה x_0. ■

5.4 משפט ויירשטראסס על צפיפות הפולינומים ברציפות

משפט 5.22 [ויירשטראסס] לכל $f \in C[a,b]$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $P(x)$ כך ש

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

הערות 5.23 באופן שקול ניתן לומר שלכל פונקציה רציפה יש סדרה של פולינומים P_n כך ש $P_n \xrightarrow{u} f$.
לכן ברור שלא כל תכונה טובה כמו גזירות למשל תעבור תחת לקיחת גבול במ"ש, אחרת לא היתה

אפשרות לדוגמא שבנינו בפרק האחרון. נעיר גם שהפולינומים הללו לא תמיד יהיו טור טיילור של הפונקציה, ובפרט ישנם מקרים בהם טור טילור סביב נקודה מסויימת יוצא כל הזמן 0 אף כי הפונקציה רציפה וניתן לקרב אותה עם פולינומים. זה אפילו לא מבטיח שהקירוב הוא "טור חזקות" שכן ייתכן שצריך לשנות את האיברים בכל שלב, נדון על כך בפרק הבא עלינו לטובה של טורי חזקות. הערה נוספת היא שהמקרה $[a,b]=[0,1]$ הוא כללי שכן ניתן לבצע שינוי משתנה ליניארי $F(t)=f(a+t(a-b))$, לקרב את F על ידי Q פולינום ואז להגדיר $P(x)=Q(\frac{t-a}{b-a})$.

הוכחה: על פי ההערה, מספיק להוכיח עבור $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה. נגדיר את

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

זו כמובן נוסחה שצריכה להזכיר לכם את הבינום מהסתברות. ליתר דיוק, אם $X_i\sim B(0,x)$ בלתי תלויים זאת אומרת כל אחד מקבל ערך 1 בהסתברות x ו־0 אחרת ומסמנים $X=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ אז אז $\mathbb{E}f(X)=B_n(x)$. נזדקק לשתי נוסחאות פשוטות שודאי נתקלתם גם בהן במבוא להסתברות:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{k}{n}-x)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}$$

כעת נחשב את

$$f(x)-B_n(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

ונפרק לשני גורמים כתלות בפרמטר δ שנבחר מייד:

$$\sum_{\{k:|\frac{k}{n}-x|<\delta\}}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{\{k:|\frac{k}{n}-x|\geq\delta\}}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

מרציפות במ"ש קיימת $\delta>0$ כך שאם $|x-\frac{k}{n}|<\delta$ אז $|f(x)-f(\frac{k}{n})|<\varepsilon/2$, ולכן הסכום הראשון חסום על ידי $\varepsilon/2$. הסכום השני מקיים, עבור M החסם של $|f|$,

$$\sum_{\{k:|\frac{k}{n}-x|\geq\delta\}}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq 2M\sum\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{\delta^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{2M}{\delta^2}\frac{1}{4n}$$

כך שעבור n גדולים מספיק, גם סכום זה חסום על ידי $\varepsilon/2$. ■

את ההוכחה של הנוסחאות, מי שלא מכיר ־ הראשונה זה פשוט הבינום והשנייה נובעת או מהסתברות סטנדרטית (שונות של סכום של משתנים בינומיים בלתי תלויים) או מחשבון פשוט של סכומים. הנה תקציר ההוכחות הללו: $X\sim B(0,x)$ אז $\mathbb{E}X=x$ ו $Var(X)=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)=x(1-x)$ ולכן אם

$S_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ סכום עותקים בת"ל יתקיים $\mathbb{E}S_n = x$ ו $Var(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}$. מצד שני חישוב ישיר יתן $Var(S_n) = \sum \binom{n}{k}(\frac{k}{n} - x)^2 x^k (1-x)^{n-k}$.

ללא ידע בהסתברות: הבינום הרגיל נותן

$$\sum_0^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$$

ונגזור לפי p ואז נכפול ב p ונקבל

$$\sum_0^n \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = p(\frac{d}{dp}(p+q)^n) = np(p+q)^{n-1}$$

נעשה זאת שנית ונקבל

$$\begin{aligned}\sum_0^n \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k} &= p(\frac{d}{dp} np(p+q)^{n-1}) \\ &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} = np(p+q)^{n-2}[np+q]\end{aligned}$$

ולאחר הצבת $p = x$ ו $q = 1 - x$ נקבל

$$\begin{aligned}\sum_0^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} &= nx \\ \sum_0^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} &= nx(1 + (n-1)x) \\ \sum_0^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} &= nx(1 + (n-1)x) - 2nx(nx) + n^2x^2 = nx(1-x)\end{aligned}$$

6 טורי חזקות

טורי חזקות נידונו במידה מסויימת בחדוא 1 א, אך כעת אנו שבים אליהם בפרספקטיבה יותר רחבה של טורי פונקציות. נחזור על חלק מהמשפטים וההוכחות עם תוספות חדשות (אך לא יזיק לקרוא שוב בעיון את הפרק הרלוונטי מהקורס של סמסטר א).

6.1 הגדרה

טור חזקות סביב $x_0 = 0$ זהו הסכום הפורמאלי

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

וטור חזקות סביב נקודה x_0 כללית זהו הסכום הפורמאלי

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

על פי רוב, משום שניתן לבצע שינוי משתנה $x' = x - x_0$, נדון בטורי חזקות סביב $x_0 = 0$. בעצם טור כזה הוא סדרת מספרים. המעניין הוא לברר עבור אילו xים הטור הזה מתכנס, ולכן איננו סתם סכום פורמאלי. נציין את העובדה הטריויאלית שבנקודה $x = x_0$ הטור תמיד מתכנס, שכן מדובר בסכום של אפסים. נציין גם שקל לייצר טור שלא מתכנס באף נקודה אחרת, למשל אם נבחר $a_k = k!$, מקרה בו האיבר הכללי לא שואף ל 0. נעיר גם שקל לבנות טור שיתכנס בכל $\mathbb{R}$, למשל על ידי בחירת $a_k = \frac{1}{k!}$ שנותן את טור טיילור של e^x.

6.2 רדיוס התכנסות של טור חזקות

כבר ראינו בחדו"א 1 כי קבוצת כל ה x ים עבורם טור חזקות מסויים (סביב 0 נאמר) מתכנס היא קטע סימטרי, למעט ההתנהגות בקצוות הקטע שלא חייבת להיות זהה. (למעשה כשמדובר במשתנה מרוכב, קבוצת ההתכנסות תהיה "דיסק", אך בקורס אנחנו דנים בעיקר בתחום ממשי.) נחזור על ההוכחה בצירוף הטענה שההתכנסות הינה במ"ש.

למה 6.1 [התכנסות בדיסק] נביט בטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. אם הטור מתכנס בנקודה x_0 כך ש $|x_0| = r$, אז לכל $r' < r$ הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r', r']$.

הוכחה: משום שהטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ מתכנס, האיבר הכללי שלו שואף לאפס ובפרט חסום. נאמר $\sup_k |a_k x_0^k| = M < \infty$. יהי $r' < r = |x_0|$ ונסמן $q = \frac{r'}{r}$ אז $|q| < 1$ ומתקיים עבור x כך ש $|x| \leq r'$

$$|a_k x^k| = |a_k x_0^k| \cdot |\left(\frac{x}{x_0}\right)^k| \leq M q^k$$

משום שהטור $\sum M q^k < \infty$ מהבוחן של ויירשטראסס הטור המקורי מתכנס בהחלט ובמ"ש על הקטע $[-r', r']$. ■

נעיר שבפרט מקבלים שהגבול רציף בקטע $(-r, r)$, ושניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר בתחום $[-r', r']$ לכל $r' < r$ ולכן גם בתחום כולו - אם האינטגרלים מתכנסים.

מסקנה 6.2 [משפט אבל] לכל טור חזקות $\sum a_k x^k$ קיים מספר $R \in [0, \infty]$ כך שבתחום $\{x : |x| < R\}$הטור מתכנס ובתחום $\{x : |x| > R\}$ הטור מתבדר.

הוכחה: נסמן $R = \sup\{|x| : \sum a_k x^k < \infty\}$ ועל פי הלמה סיימנו. ■

שוב, כבר נוכחנו בחדו"א 1 שיש נוסחא סגורה למספר הזה (שנקרא רדיוס ההתכנסות של הטור) במונחים של המקדמים. הנוסחא נתונה במשפט הבא.

משפט 6.3 [משפט קושי הדמרד] נביט בטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. רדיוס ההתכנסות שלו נתון על ידי הנסחא הבאה:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}$$

כאשר $\frac{1}{\infty} = 0$ ו $\frac{1}{0} = \infty$.

הוכחה: נסמן $\overline{R} = \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}\right)^{-1}$ ונראה התכנסות ב $(-\overline{R}, \overline{R})$ והתבדרות מחוץ לקטע הסגור.

(א) נניח ש $|x| < \overline{R}$. לכן קיים $q < 1$ כך ש $|x| < q\overline{R}$. לכן $|x| < q\frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}$ זאת אומרת $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} < \frac{q}{|x|}$. לפי הגדרת $\limsup$ קיים k_0 כך שלכל $k \geq k_0$ מתקיים $|a_k|^{1/k} \leq \frac{q}{|x|}$. לכן

$$|a_k x^k| \leq \left(|a_k|^{1/k} |x|\right)^k \leq q^k$$

ומשום ש $q < 1$ אנו עומדים בבוחן של ויירשטראס ויש התכנסות $\sum |a_k x^k| < \infty$.

(ב) נניח ש $|x| > \overline{R}$. אזי לאיזשהו $Q > 1$ מתקיים $|x| > Q\overline{R}$. ולכן $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} > \frac{Q}{|x|}$. לפי הגדרת $\limsup$ קיימת תת"ס $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ כך ש $|a_{k_j}|^{1/k_j} \geq Q/|x|$ לכל j, ולכן האיבר הכללי של הטור לא ישאף לאפס שכן על תת סדרה זו

$$|a_{k_j} x^{k_j}| \geq (Q)^{k_j} \to \infty$$

ובפרט לא תיתכן התכנסות. לכן, על פי המסקנה הקודמת, $R = \overline{R}$. ■

הדיון עד כה לא נתן לנו כלים להחליט מה קורה בקצות תחום ההתכנסות, דהיינו ב $\pm$ רדיוס ההתכנסות. ראשית שימו לב שעבור טור חזקות קונקרטי ניתן לרשום במפורש את הטור בקצוות ולהשתמש בכלים של טורים מספריים על מנת לחקור התכנסות. נפתח בכמה דוגמאות:

- הטור $\sum \frac{x^k}{k!}$ כאן $a_k = \frac{1}{k!}$ ולכן $\limsup a_k^{1/k} = 0$ ולכן $R = \infty$.
- הטור $\sum k! x^k$ כאן $a_k = k!$ ולכן $\limsup a_k^{1/k} = \infty$ ולכן $R = 0$.
- הטור $\sum \frac{1}{k} x^k$ כאן $a_k = \frac{1}{k}$ ולכן $\limsup a_k^{1/k} = 1$ ולכן $R = 1$. מה קורה בקצוות? ב- $x = 1$ הטור מתבדר וב $x = -1$ מתכנס.

ניתן לשאול, למשל, האם במידה ונתון (או גילינו על פי קריטריון מסוים) שבקצה הטור יש התכנסות, האם נובע שהגבול יהיה רציף? מסתבר שכן, ונדון בכך עוד מעט.

6.3 גזירות של טור חזקות

העובדה שאפשר לעשות אנטגרציה איבר איבר נובעת מהתכנסות במ"ש בכל תת קטע. מה שיותר מפתיע הוא שניתן לגזור גם איבר איבר, דבר שלא נובע ישירות מהתכנסות במ"ש כפי שכבר ראינו.

נשים לב שלטור $\sum a_k x^k$ יש טור של נגזרות $\sum k a_k x^{k-1}$ אם כי בשלב זה הוא עדיין רק טור פורמלי - כי עוד לא אמרנו כלום על התכנסות ועל גזירות איבר איבר, זאת אומרת האם הטור הזה מתכנס לפונקציה שהיא אכן הנגזרת של הפונקציה אליה מתכנס הטור השני. העובדה שאכן כך, תנבע בעזרת המשפט שכבר יש לנו על גזירות איבר איבר בתוספת של העובדה הבאה

טענה 6.4 [רדיוס התכנסות של נגזרת טור חזקות] לטור $\sum a_k x^k$ ולטור הנגזרות $\sum k a_k x^{k-1}$ יש את אותו רדיוס התכנסות.

הוכחה: מיידי:

$$\limsup\left((k+1)|a_{k+1}|\right)^{1/k} = \limsup\left(k|a_k|\right)^{1/k} = \limsup|a_k|^{1/k}$$

■

נעיר מיד שההתכנסות בקצוות יכולה להיות שונה בין טור לטור הנגזרות, למשל הטור $\sum \frac{x^n}{n}$ מתכנס ב $[-1,1)$ ואילו הנגזרות $\sum x^{n-1}$ מתכנס ב $(-1,1)$. [רדיוס

מסקנה 6.5 [טורי חזקות ניתן לגזור איבר איבר] נביט בטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, ונסמן את רדיוס ההתכנסות שלו ב R, ואת הפונקציה אליה הוא מתכנס ב $f(x)$. בכל נקודה בקטע $(-R,R)$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x)$$

הוכחה: לפי הטענה הקודמת יש לטורים את אותו רדיוס התכנסות. לכן בכל תת קטע סגור $[-r,r] \subset (-R,R)$ יש התכנסות במ"ש הן של הטור והן של טור הנגזרות. לכן ניתן להפעיל את משפט 5.16 על גזירות איבר איבר. אכן, כל תנאיו מתקיימים (בידקו זאת). ■

באינדוקציה, הדבר נכון גם לנגזרות מסדר יותר גבוה, ונקבל את המשפט הבא:

משפט 6.6 [טור טיילור של סכום טור חזקות] נביט בטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, ונניח שהוא מתכנס ל $f(x)$ בקטע $(-R,R)$. אזי לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in (-R,R)$ מתקיים ש

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k-m} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+m)!}{j!} a_{j+m} x^j$$

ובפרט, טור טיילור של f סביב 0 הוא $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ כי $f^{(m)}(0) = m! a_m$.

מסקנה מעניינת שנובעת מכאן היא שלא כל פונקציה ניתן להציג כטור של חזקות, כי טורי חזקות יוצאים גזירים אינסוף פעמים בפנים של תחום ההתכנסות שלהם. אפילו פונקציות שהן כן גזירות אינסוף פעמים ייתכן שלא ניתן להציג אותן כטור חזקות, למשל אפשר לראות ש

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

היא בעלת טור טיילור ששווה לאפס זהותית, ובפרט לא מקיימת את המסקנה של המשפט האחרון, ולכן בהכרח לא עומדת בתנאים שלו.

עוד דוגמא יכולה להיות

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in [-1,1] \\ g(x) & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

כאשר $g(x)$ לבחירתכם, שונה מ $\sin(x)$ אפשר לבחור את g כך ש f תהיה גזירה אינסוף פעמים. ברור שטור טיילור של f (סביב אפס) יהיה כמו זה של $\sin(x)$ ולכן לא יהיה שווה לה בכל תחום ההגדרה.

רואים אם כן שטורי חזקות ניתנים יחסית למניפולציות בקלות, וחלק מהדברים שעשיתם בטור טיילור בחדו"א 1 הם עכשיו יותר מדוייקים ופורמליים.

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ מתכנס ב $(-1,1)$ נגזור:
- $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$ מתכנס ב $(-1,1)$
- $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k$ מתכנס ב $[-1,1)$ (הנגזרת שלו - עד כדי סימן - זוהי דוגמא 1, נחזור אליו בקרוב)
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ מתכנס ב $(-1,1)$ נעשה אינטגרציה:
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$ השוויון נכון מיידית ב $(-1,1)$ ואילו הטור מתכנס בכל $[-1,1]$ נחזור אליו בקרוב כדי להראות שהשוויון נשמר גם בקצוות הקטע.

סוף שיעור 11

6.4 קצה רדיוס ההתכנסות.

ראינו דוגמאות להתנהגות בקצוות. כעת נדון בכמה תכונות שימושיות הקשורות בהתכנסות בקצוות. ראשית טענה פשוטה.

טענה 6.7 נביט בטור $\sum a_k x^k$, ונסמן את רדיוס ההתכנסות שלו ב R. נניח שהטור לא מתכנס ב $x_0 = R$. אזי אין התכנסות במ"ש של הטור ב $[0, R)$.

הוכחה: אילו הייתה התכנסות במ"ש בקטע $[0, R)$ אז קריטריון קושי במ"ש היה מתקיים בקטע זה זאת אומרת לכל $\varepsilon > 0$ היה n_0 כך שלכל $m, n > n_0$

$$|\sup_{x\in(-R,R)} \sum_{k=n}^{m} a_k x^k| < \varepsilon$$

ומרציפות (מדובר בסכום סופי של רציפות) היינו מקבלים שגם

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k R^k| \le \varepsilon$$

ולכן בנקודה R הטור (המספרי) $\sum a_k R^k$ היה מקיים את קריטריון קושי ובפרט מתכנס, בסתירה להנחה. ■

המשפט היותר מעניין ושימושי הוא בכיוון ההפוך, זאת אומרת שאם יש התכנסות בקצה התחום של ההתכנסות נאמר ב $+R$, יש התכנסות במ"ש בקטע $[0, R]$ כולו, ובפרט נובע שהפונקציה שהיא סכום הטור רציפה. משפט דומה תוכלו לנסח ולהוכיח עבור $[-R, 0]$.

משפט 6.8 [משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות] תהי $f(x) = \sum a_k x^k$ ונניח שיש התכנסות ב $x_0 = R$. אזי הטור מתכנס במ"ש ב $[0, R]$.

הוכחה: נשתמש במשפט של אבל למכפלת טורי פונקציות, משפט 5.18. נשכתב

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

מדובר בטור שהוא מכפלה $\sum c_k(x) d_k(x)$ כאשר $c_k(x) = a_k R^k$ (לא תלוי ב־x, ומתכנס, בפרט במ"ש) ואילו $d_k(x) = (\frac{x}{R})^k$ חסומה במידה אחידה (על ידי 1) מונוטונית יורדת ל 0. לכן מקריטריון אבל להתכנסות במ"ש של טורים שהם מכפלות, הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש ב $[0, R]$. ■

טענה 6.9 [תחום ההתכנסות לא גדל כשגוזרים] נניח שלטורים $\sum a_k x^k, \sum k a_k x^{k-1}$ רדיוס התכנסות R ונניח שטור הנגזרות מתכנס ב x_0 כך ש $|x_0| = R$. אזי הטור המקורי מתכנס גם הוא ב x_0.

הוכחה: משפט 6.8 מבטיח שיש התכנסות במ"ש של הטור $\sum ka_kx^{k-1}$ בקטע $[0,R]$ (בפרט האינטגרציה היא לפונקציה רציפה, ולכן אינטגרבילית). לכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר בקטע זה ולקבל

$$\int_0^R f(x)dx = \int_0^R \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^R ka_kx^{k-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_kR^k$$

וקיבלנו התכנסות של הטור המקורי בנקודה R. ■

מסקנה 6.10 [טור סכים הוא גם סכים לפי אבל והסכומים שווים] נניח שנתונה סדרת מספרים המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$. אזי השוויון הבא מתקיים

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_kr^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

הוכחה: יש שני מקרים, $R=1$ ו $R>1$ אך בשניהם (או סתם מהלמה על התכנסות בדיסק או ממשפט 6.8 של אבל על קצה רדיוס ההתכנסות) מכך שגבול במ"ש של רציפות הוא רציף, נקבל אחרי סימון $\sum_{k=0}^{\infty} a_kr^k = f(r)$ שפונקציה זו רציפה ב $r=1$ משמאל ולכן ניתן להציב $r=1$ בגבול דלעיל. ■

לדוגמא, נדון בטור טיילור של $\ln(1+x)$. כולכם יודעים לחשב אותו ולקבל

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

על פי משפטי שארית ניתן לראות שהוא מתכנס, ל $\ln(1+x)$, לכל $|x| < 1$. על פי לייבניץ יודעים גם שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ מתכנס. כעת, לפי המשפט האחרון, יש התכנסות במ"ש בקטע $[0,1]$ ולכן מתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k = \lim_{r\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$$

בדומה נוכל לחשב עבור $\arctan(x)$ שראינו קודם, משום שיש התכנסות בקצוות נקבל ש

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \quad = \quad \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

6.5 סוגי סכימות

המסקנה האחרונה מאפשרת לנו להגדיר שיטה אחרת לסכום טור חזקות, שיכולה להתכנס גם כשהשיטה הרגילה מתבדרת. למעשה, יש שיטה שלישית נוספת.

הגדרה 6.11 נביט בטור המספרי $\sum a_k$. נאמר שהוא מתכנס לפי אבל (סכים לפי אבל) אם קיים הגבול $\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ (ובפרט נדרוש כי $R \geq 1$). נסמן

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = (A)\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

מסקנה 6.10 משמעה שאם טור מתכנס, אז הוא מתכנס גם לפי אבל, ולאותו המספר. נשים לב שטור יכול להתכנס לפי אבל ולא להתכנס "רגיל", למשל הטור

$$\sum(-1)^k$$

כמובן לא מתכנס (שכן האיבר הכללי לא שואף ל-0) אבל

$$(A)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

זאת אומרת, הטור כן מתכנס לפי אבל.

ישנה הגדרה לגבול של סדרה לפי צזארו, שהיא יותר כללית מהגדרת הגבול הרגילה, (אך פחות כללית מההגדרה לפי אבל, כפי שנראה מייד) ובהתאמה יש גם הגדרה של סכימות של טור לפי צזארו.

הגדרה 6.12 תהי c_n סדרה. נאמר שיש לה גבול לפי צזארו אם קיים $\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=0}^{N} c_n}{N+1}$.
יהי טור החזקות $\sum a_k x^k$. נאמר שהוא מתכנס לפי צזארו (סכים לפי צזארו) אם לסדרת הסכומים החלקיים יש גבול לפי צזארו, זאת אומרת אם קיים הגבול $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n$, שזה כמו $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k$.
נסמן

$$(C)\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

נגדיר גם סימון עבור האיבר הכללי בגבול זה, סימון שיהיה לנו שמושי בהמשך:

$$\sigma_N(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

שימו לב שאם מסמנים, כרגיל, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ אז $\sigma_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n$. דבר אחרון שכדאי לשים לב אליו שכן הוא שימושי בתרגילים (ונידרש שנוסחא דומה באנליזת פורייה בקרוב) הוא ש

$$\sigma_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k\left[\frac{N+1-k}{N+1}\right] = \sum_{k=0}^{N} a_k\left[1-\frac{k}{N+1}\right]$$

כמובן שלא היה טעם בסכימה כזו ללא הלמה הבאה אותה למדנו בחדו"א 1

למה 6.13 תהי $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה ונניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. אזי גם עבור $b_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$ מתקיים $b_n \to_{n\to\infty} l$. באופן שקול, עבור טורים, אם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$ אזי גם $(C)\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$.

שוב, כמו במקרה של אבל, גבול על פי צזארו הוא מושג כללי יותר, ויש סדרות ללא גבול אבל עם גבול על פי צזארו, ובדומה טורים. דוגמא טובה היא שוב הטור $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$, שסכים על פי צזארו (ל $\frac{1}{2}$ כמובן) וכמובן אינו מתכנס. אפשר לעשות קורס שלם על שיטות סכימה, ולכן רק נראה שני דברים נוספים: דוגמא של טור שסכים על פי אבל ולא על פי צזארו, ומשפט שאומר שכל טור שסכים על פי צזארו הוא סכים גם על פי אבל.

הדוגמא היא:

$$1-2+3-4+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)$$

כמובן שהטור לא מתכנס שכן האיבר הכללי לא שואף לאפס. גם לפי צזארו הוא לא מתכנס שכן האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים הוא

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1) = \begin{cases} \frac{n}{2}+1 & n \text{ even} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\ldots)$$

בפרט $S_n = S_{n+1}$ כאשר n הוא זוגי, ולכן עבור N איזוגי $\sum_{n=0}^{N} S_n = 0$ ואילו עבור N זוגי $\sum_{n=0}^{N} S_n = S_N$ ולכן כאשר נמצע (נחלק בנוסף ב $N+1$) נקבל,

$$\frac{S_0+S_1+\cdots+S_{N-1}+S_N}{N+1} = \begin{cases} 0 & N \text{ odd} \\ \frac{k+1}{2k+1} & N=2k \text{ even} \end{cases} \to \begin{cases} 0 & N \text{ odd} \\ \frac{1}{2} & N=2k \text{ even} \end{cases}$$

ולכן אין לסדרה גבול. לעומת זאת, כדי לבדוק סכימות לפי אבל נחשב

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \lim_{r\to 1^-} -\sum_{k=0}^{\infty}[(-r)^{k+1}]' = \lim_{r\to 1^-} -[\frac{1}{1+r}]' = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{(1+r)^2} = \frac{1}{4}$$

כאשר השוויון האמצעי נכון על פי גזירה איבר איבר של טור חזקות.

משפט 6.14 [סכימות על פי צזארו גוררת סכימות על פי אבל] יהי טור החזקות $\sum a_k x^k$ ונניח שהוא מתכנס לפי צזארו. אזי הוא סכים על פי אבל ומתקיים

$$(C)\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (A)\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

הוכחה: ראשית שימושי לשים אליו לב שכשנסמן $S_{-1}=0, S_n=\sum_{k=0}^n a_k$ אז עבור N_0 כלשהו מתקיים

$$\sum_{k=0}^{N_0} a_k x^k \;=\; \sum_{k=0}^{N_0}(S_k-S_{k-1})x^k=\sum_{k=0}^{N_0} S_k x^k-\sum_{k=0}^{N_0-1} S_k x^{k+1}=(1-x)\sum_{k=0}^{N_0-1} S_k x^k+S_{N_0}x^{N_0}$$

מצד שני משום ש $S_n=(n+1)\sigma_n-n\sigma_{n-1}$, בהנתן שקיים הגבול של $\lim_{N\to\infty}\sigma_N=C$ בהכרח מתקיים שעבור $|x|<1$ הגבול הבא הינו אפס

$$\lim_{N_0\to\infty} S_{N_0}x^{N_0}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\sigma_n x^n-\lim_{n\to\infty} n\sigma_{n-1}x^n=0\cdot c-0\cdot c=0$$

על כן נוכל בשוויון הראשון לקחת גבולות ולהסיק כי

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;=\; (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$$

בדומה (ואף ביתר קלות, שכן ברור כי $(n+1)\sigma_n x^n\to 0$ עבור $|x|<1$ ו־$n\to\infty$) מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k$$

ההנחה שלנו היא שהטור סכים על פי צזארו זאת אומרת שקיים $\lim_{N\to\infty}\sigma_N=C$. נעיר גם שעל פי $|(n+1)\sigma_n|^{1/n}\to 1$ נובע כי רדיוס ההתכנסות של הטור מימין הינו 1. ראשית ניתן להניח בה"כ ש $C=0$ על ידי שינוי של a_0 [דבר שכמובן לא משפיע על התכנסות הטור]. אכן, אם מחליפים $a_0\to a_0+d$ קל לבדוק כי עבור כל n מתקיים $\sigma_n\to\sigma_n+d$. תחת הנחה זו, בהנתן $\varepsilon>0$ אפשר למצוא N_0 כך שלכל $N>N_0$ יתקיים $|\sigma_N|<\varepsilon$. לכן

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;&=\; (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k=(1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k\\ &=\; (1-x)^2\sum_{k=0}^{N-1}(k+1)\sigma_k x^k+(1-x)^2\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k\end{aligned}$$

נשים לב שכאשר N קבוע ו $x\nearrow 1$ הגורם הראשון שואף כמובן לאפס (שכן מדובר בפולינום, סופי, הכופל את $(1-x)$). לכן לכל N קבוע

$$\limsup_{x\nearrow 1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=\limsup_{x\nearrow 1}(1-x)^2\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k$$

וכעת נשתמש בנתון ונאמר כי עבטר כל $N>N_0$ קבוע

$$\limsup_{x\nearrow 1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\le\varepsilon\limsup_{x\nearrow 1}(1-x)^2\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)x^k$$

על מנת לסיים מספיק לשים לב כי לכל N ולכל $|x|<1$ מתקיים $(1-x)^2\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)x^k\le 1$ שהלא מדובר בטור חיובי ואילו $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{1}{(1-x)^2}$ כבר בדקנו (על ידי גזירה איבר איבר של הטור $\sum x^k$ למשל). ■

הערשה: משפט מסוג הפוך, שנקרה "משפט טאובריאני", שאומר שאם בנוסף יש תנאי דעיכה על המקדמים, אז סכימות על פי אבל גוררת את התכנסות הטור במובן הרגיל.

משפט 6.15 [טאובר] נביט בטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ונניח שהוא סכים על פי אבל, דהיינו קיים עבור $f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ הגבול $\lim_{r\to 1^-} f(r) = \rho$. נניח בנוסף כי $a_k = o(1/k)$. אזי מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$$

הוכחה: נסמן $x_m = 1 - \frac{1}{m}$ כך ש $x_m \nearrow 1$. נביט בסדרה

$$B_N = \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_N^k$$

ונראה שכאשר $N \to \infty$ היא מתכנסת לאפס. משום שהאיבר הימני הוא $f(x_N)$ ואנו יודעים ששואף ל ρ, זה יסיים את ההוכחה. אכן,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_N^k = \sum_{k=0}^{N} a_k(1 - x_N^k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k x_N^k := A_N + B_N$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} |A_N| &\leq \sum_{k=0}^{N} |a_k|(1 - x_N^k) = (1 - x_N)\sum_{k=1}^{N} |a_k| \left[1 + x_N + x_N^2 + \cdots + x_N^{k-1}\right] \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k|a_k| \to_{N\to\infty} 0 \end{aligned}$$

והשאיפה לאפס הנ"ל נובעת מכך ש $ka_k \to 0$ (ובפרט ממוצעי צזארו שלהם). בנוסף נחשב

$$\begin{aligned} |B_N| &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|\frac{1}{k}x_N^k \leq \left(\sup_{k\geq N+1} k|a_k|\right)\cdot\frac{1}{N+1}\sum_{k=N+1}^{\infty} x_N^k = \\ &= \left(\sup_{k\geq N+1} k|a_k|\right)\frac{1}{N+1}\frac{x_N^{N+1}}{1 - x_N} \leq \left(\sup_{k\geq N+1} k|a_k|\right) \to_{N\to\infty} 0 \end{aligned}$$

ולכן שני הגורמים אכן שואפים לאפס כרצוי, והטור המקורי מתכנס ל ρ. ■

נעיר שיש משפט חזק יותר של ליטלווד האומר כי מספיק לדרוש חסימות של ka_k אך הוכחתו קשה יותר.

סוף שיעור 12

6.6 כפל של טורי חזקות

ראשית נדון מעט בכפל של טורים מספריים (נושא זה מקומו יכירנו דווקא בקורס חדו"א 1 א). ראיתם את משפט רימן שאומר ששינוי בסדר הסכימה יכול לשנות את ההתכנסות ואת הסכום. כאשר כופלים שני טורים $\sum a_n$ ו $\sum b_k$, מקבלים למעשה טור שמכיל את כל המכפלות $\sum_{k,n} a_n b_k$, אך הסדר לפיו נבחר לסכום את הזוגות הללו (האינדקס הוא ב $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) יכול להשפיע על הסכום. מצד שני, כאשר נתונה התכנסות בהחלט של הטור (עם סדר סכימה מסויים), אין זה משנה אם נשנה את סדר הסכימה. ראיתם בתירגול את המשפט הבא:

משפט 6.16 בהנתן טור מספרים $\sum_{j=1}^{\infty} r_j$ שמתכנס בהחלט, לכל $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל יתקיים

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j = \sum_{j=1}^{\infty} r_{p(j)}$$

לכן מתקיים שאם שני הטורים $\sum a_n$ ו $\sum b_k$ מתכנסים בהחלט, אז לכל סידור של האברים $a_n b_k$ כסדרה r_j עם $j = 1, 2, \cdots$ יתקיים

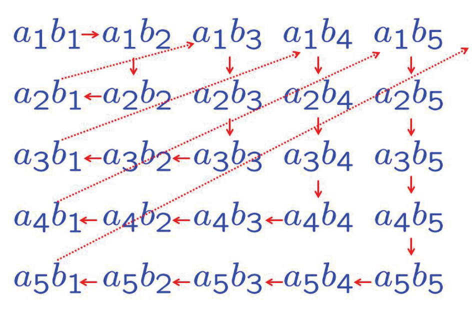
$$\sum_{j=1}^{\infty} |r_j| = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |r_j| \le \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n_N} |a_k| \sum_{k=1}^{m_N} |b_k| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$$

לכן הטור $\sum r_j$ מתכנס בהחלט ולכן סדר הסכימה לא חשוב ולכן אפשר למשל לסדר לפי ריבועים (ראו ציור מטה). במקרה כזה קל לכתוב נוסחא לתת הסדרה S_{N^2} שהרי

$$S_{N^2} = \sum_{j=1}^{N^2} r_j = \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=1}^{N} b_k \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

ומשום שאנו יודעים שיש התכנסות של הטור כולו, הוא מתכנס לאותו הגבול כמו תת הסדרה הזו, דהיינו

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$$



איור 21: סידור של המכפלות $\{a_j \cdot b_k\}$ לפי ריבועים

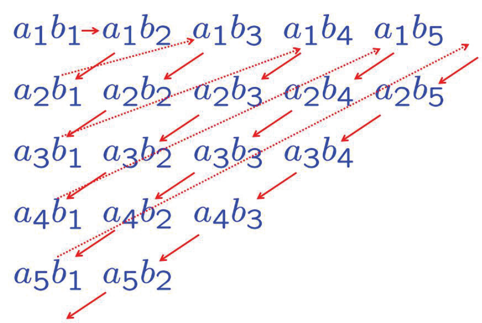
כעת נעבור לדון בכפל של טורי חזקות. נזכור שממילא בתוך רדיוס ההתכנסות יש התכנסות בהחלט ובמ"ש.

יש דרך טבעית לבחור סדר על פיו סוכמים את טור החזקות, כך שהמכפלה מסודרת גם היא כטור חזקות. זו נקראת מכפלת קושי:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} x^l$$

טענה 6.17 [מכפלות קושי] יהיו $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ו $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ טורי חזקות ונניח ששניהם מתכנסים בהחלט בתחום I. אזי גם טור החזקות $h(x) = \sum c_k x^k$ כאשר $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ מתכנס בהחלט בתחום זה ומתקיים $h(x) = f(x)g(x)$.

ההוכחה מיידית על פי המשפט האחרון, ברגע ששמנו לב שאכן הסכימה הנ"ל עוברת על כל הזוגות (i, j) וכל אחד נסכם בדיוק פעם אחת (ראו ציור - זו איננה הסכימה בסדר שעשינו לפני כמה רגעים).



איור 22: סידור קושי של המכפלות $\{a_j \cdot b_k\}$

זו לא הייתה סתם הערה, ניתן להשתמש במכפלת קושי על מנת לחשב סכומים של טורים. לדוגמא, נכפול את טור החזקות של $\frac{1}{1-x}$ בעצמו. נקבל

$$(\frac{1}{1-x})^2 = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{l} 1 \right) x^l = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) x^l$$

ואכן, זה בדיוק מסתדר עם היותו טור הנגזרות ועם גזירה איבר איבר.

6.7 נגיעה ראשונה במרוכבים - טורי חזקות

6.7.1 טורים של מספרים מרוכבים

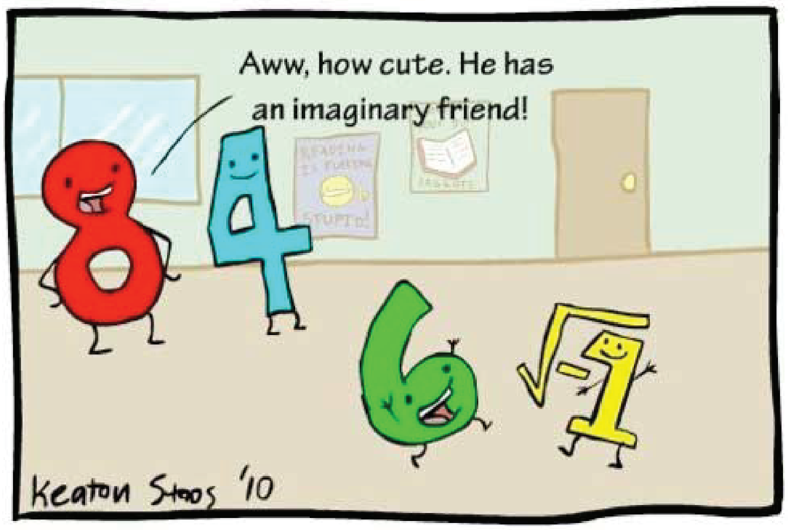
כאשר נתון טור $\sum_{k=0}^{\infty} u_k + i v_k = \sum z_k$ של מספרים מרוכבים, נתייחס אליו כאל סכום של שני טורים ממשיים שלאחד מהם מקדם i, דהיינו $\sum u_k + i \sum v_k$ כאשר $u_k = Re(z_k),\ v_k = Im(z_k)$ ונאמר שהוא

מתכנס אם כל אחד מהטורים הממשיים יתכנס. (באופן שקול, סדרה מרוכבת מתכנסת למספר מרוכב אם הדבר מתקיים בנפרד לחלק הממשי בסדרה ולחלק המדומה בה). מבחני התכנסות וכדומה אפשר לעשות (למשל) לכל טור בנפרד.

נאמר שהטור מתכנס בהחלט אם הטור הממשי $\sum |z_k| < \infty$.

משום שמספר מרוכב $z = a + ib$ מקיים $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ולכן $|a|, |b| \le |z| \le |a| + |b|$, מתקיים שהטור מתכנס בהחלט אם ורק אם כל אחד משני הטורים מתכנס בהחלט. בפרט, אם טור מרוכבים מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. עוד עובדה שימושית הנובעת בקלות מאי שוויונים אלה היא שאיבר כללי בטור מרוכב שמתכנס, חייב לשאוף לאפס (גם החלק המדומה וגם החלק הממשי, שזה כמו לומר $|z_k| \to 0$).

6.7.2 טורי חזקות מרוכבים



כאשר z מספר מרוכב, החזקות שלו מוגדרות כרגיל כך: $z = a + ib$ אז $z^2 = (a+ib)(a+ib) = a^2 - b^2 + i(2ab)$ ובאינדקוציה $z^n = (a+ib)z^{n-1}$. כאמור טור של מרוכבים זה פשוט לסכום בנפרד את החלק הממשי ואת החלק המדומה, כך שלמעשה אם נציג את אברי $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ כסכום של $\sum u_k + i \sum v_k$ יש צורך ששני הטורים יתכנסו. כמובן שכאן לא מדובר בשני טורי חזקות ממשיים, כי ל u_k ול־v_k מבנה יותר מעניין. (בנוסף, במקרה כללי גם המקדמים c_k עשויים להיות מרוכבים אבל בכך לא נדון כעת).

המשפט על התכנסות בדיסק (למה 6.1) עובד גם כאן כלשונו, שכן ההוכחה משתמשת בערכים מוחלטים, ואכן $|z^n| = |z|^n$ וזה מעביר אותנו לטורים ממשיים מייד. הבה ננסח אותו:

משפט 6.18 נביט בטור $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ כאשר נאפשר ל z לקבל ערכים ב $\mathbb{C}$. נניח שהטור מתכנס ב z_0 כך ש $R = |z_0|$ ויהיה $r < R$. אזי הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בתחום $D_r = \{x : |x| \le r\}$. דהיינו, קיימת $f : D_r \to \mathbb{C}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$

$$\sup_{|z| \le r} |S_n(z) - f(z)| \le \varepsilon$$

כאשר $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$.

ההוכחה זהה להוכחה הממשית, הדבר היחיד שדורש הסבר הוא העובדה שאיבר כללי בטור מרוכב שמתכנס גם צריך לשאוף לאפס (וזה די ברור) וכן שטור מרוכב שמתכנס בהחלט, מתכנס, כפי שציינו. בנוסף, השימוש במשפט ויירשטראסס להתכנסות במ"ש ישמש כאן לפונקציות שערכיהן מרוכבים, וגם הוא תקף - שכן בהוכחתו משתמשים בקריטריון קושי במ"ש שתקף גם הוא במקרה המרוכב.

נדון עוד די לעומק במרוכבים הנחוצים לנו לטורי פורייה, אבל אנו מציינים את המעט הזה כאן כי יש פה הסבר לתופעות "מפתיעות" שראינו, למשל, בעוד שהיה ברור לנו מדוע הטור של $\frac{1}{1-x}$ (הנתון על ידי $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$) מתבדר ב-1, מדוע הטור של $\frac{1}{1+x^2}$ שזו פונקציה חביבה, רציפה וחסומה, הנתון של ידי $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, לא מתכנס מעבר ל $x \in (-1,1)$? התשובה היא שאמנם הפונקציה ללא קטבים ב $\mathbb{R}$, אבל במרוכבים יש לה קוטב ב $z = i$ שהוא מרדיוס 1. לכן, משום שההתכנסות היא תמיד בדיסק, הטור שלה לא יכול להתכנס באף נקודה הרחוקה מהראשית יותר מ-1 . "צילם של המרוכבים", כמו במערה של אפלטון, נראה גם בעולם הממשיים!

6.7.3 הגדרת e^z ונסחת אוילר

גם רדיוס ההתכנסות של טור חזקות מרוכב נתון על ידי אותה נסחא של קושי הדמר (במקרה של מקדמים מרוכבים יש לקחת כמובן $\limsup |a_k|^{1/k}$ למקדמים המרוכבים) וההוכחה עובדת כלשונה. לכן למשל

$$\sum \frac{1}{k!} z^k$$

יתכנס בכל $\mathbb{C}$. עכשיו זה אך טבעי להגדיר את הביטוי הזה כ e^z. כעת הנסחאות הבאות ברורות מההגדרה (ומהאפשרות לכפול טורים המכנסים בהחלט)

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\theta)^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\sin(\theta) \end{aligned}$$

זו נקראת נסחת אוילר. בנוסף

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} w^j = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \frac{1}{(l-k)!} z^k w^{l-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} z^k w^{l-k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(z+w)^l = e^{z+w} \end{aligned}$$

ולכן למשל אם $z = a + ib$ זאת אומרת $a = Re(z),\ b = Im(z)$, אז $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$

כמובן שגם מתקיימת הנוסחא $(e^z)^k = e^{kz}$. אכן, ניתן להוכיח זאת באינדוקציה על k. עבור $k = 1$ זה טריוויאלי. נניח נכונות עבור $k-1$ ונרשום

$$(e^z)^k = (e^z)^{k-1} e^z = e^{(k-1)z} e^z = e^{(k-1)z+z} = e^{kz}$$

ולכן גם מתקיים שאם

$$z = Re^{i\theta} \qquad (R = |z|,\, \theta = arg(z))$$

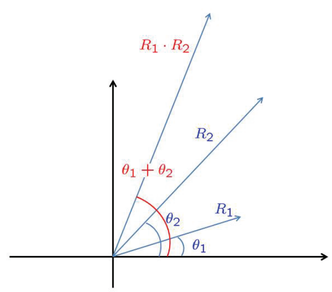
אז מקומוטטיביות הכפל

$$z^k = R^k e^{ik\theta}$$

וכמוכן

$$z_1 \cdot z_2 = R_1 e^{i\theta_1} R_2 e^{i\theta_2} = (R_1 R_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

זאת אומרת ־ רדיוס נכפל וזויות נסכמות בכפל מרוכבים.



איור 23: כפל מרוכבים

שימו לב שלמשל נקבל את השוויון

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = e^{i2\theta} = e^{i\theta}e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$$

וממנו הנסאות הטריגונומטריות

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$$

מי צריך דפי נוסחאות!

נזכיר גם את הפעולה המרוכבת של "צמוד", אם $z = a+ib$ אז $\bar{z} = a-ib$ כשבקואורדינטות פולריות $z = Re^{i\theta}$ אז $\bar{z} = Re^{-i\theta}$. כמובן

$$z + \bar{z} = 2a = 2Re(z) \qquad z - \bar{z} = 2ib = 2iIm(z)$$

כעת שוב נחזור לטורי חזקות: בכתיבה פולרית נקבל שהטור $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ הוא למעשה הטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k e^{ik\theta}$$

לכן אם דנים בהתכנסות בהחלט עוסקים למעשה בטור הממשי $\sum |c_k| R^k$. החלק $e^{ik\theta}$ נקרא הפאזה (של הגורם ה kי) , והוא בסה"כ המספר המרוכב (בעל ערך מוחלט 1)

$$\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$$

אלה היו הערות קטנות יחסית על מרוכבים, כי הפרק הבא על טורי פורייה דורש עבודה צמודה איתם.

7 טורי פורייה

7.1 הקדמה על פונקציות עם ערכים מרוכבים

כל פונקציה $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ניתן לרשום כ $f = u + iv$ כאשר $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$. מבחינות רבות אפשר לעבוד כביכול עם "זוג פונקציות", אולם המבנה של כפל של מרוכבים מוסיף עניין. בתת פרקים הבאים נעבור בקצרה על הפעולות הבסיסיות שעושים עם פונקציות (גזירה, אינטגרציה וכו) כאשר הפונקציות מחזירות ערכים מרוכבים.

7.1.1 אינטגרציה

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ונרשום $f = u + iv$ כאשר $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$. נאמר ש $f \in R([a,b])$ אם $u, v \in R([a,b])$ ובמקרה כזה נגדיר את

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$$

נשים לב שהתוצאה גם היא מספר מרוכב. נשים לב שהשתמשנו באותו סימון $R([a,b])$ גם עבור פונקציות ממשיות וגם עבור פונקציות עם ערכים מרוכבים.

דוגמא:

$$\int_2^3 x(1+ix)dx = \int_2^3 xdx + i\int_2^3 x^2dx = \frac{x^2}{2}|_2^3 + i\frac{x^3}{3}|_2^3 = \frac{5}{2} + i\frac{19}{3}$$

7.1.2 כללים פשוטים

הכללים שלמדנו על אינטגרציה עובדים יפה. למשל

- $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ ברור עבור $c \in \mathbb{R}$ אבל גם תקף עבור $c \in \mathbb{C}$ פשוט כי
$$i\int (u+iv) = -\int v + i\int u = \int i(u+iv)$$
- $\int_a^b \bar{f} = \int_a^b u - i\int_a^b v = \overline{\int_a^b f}$

7.1.3 גזירה

את הנגזרת של פונקציה עם ערכים מרוכבים נגדיר כרגיל כגבול, אך נקבל מייד
$$f'(x) = \lim_{h\to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u'(x) + iv'(x)$$
כך שאין כאן משהו מיוחד. (לא לבלבל עם פונקציות שמוגדרות על תחום מרוכב, ואז גם h מרוכב והמצב הרבה יותר מעניין). לדוגמא: $f(t) = e^{it}$ אז $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$ ולכן
$$f'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = ie^{it}$$
גם הנוסחא של נגזרת של מכפלה עובדת שהרי
$$\begin{aligned}(fg)' &= [(u+iv)(q+ip)]' = [uq-vp]' + i[vq+up]' \\ &= u'q + uq' - v'p - vp' + i[v'q + vq' + u'p + up'] \\ &= [u'+iv'](q+ip) + (u+iv)[q'+ip'] = f'g + fg'\end{aligned}$$

7.1.4 ניוטון לייבניץ והמשפט היסודי

גם כאן, העובדה שהמשפטים נכונים עבור u ו v בנפרד וליניאריות האינטגרל גורמות להכל לעבוד. למשל, אם $f' = g$ אז (תחת ההנחה ש g אינטגרבילית למשל)
$$\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$$
נשים לב שהמשפט שימושי כי הוא מונע את הצורך לפרק לחלק מדומה וחלק ממשי. לדוגמא, משום ש $(e^{it})' = ie^{it}$ נוכל לבצע ישירות
$$\int_a^b e^{it}dt = -i\int_a^b ie^{it} = -i[e^{it}]_a^b = -i[\cos t + i\sin t]_a^b$$
ולמשל -
$$\int_0^{2\pi} e^{it}dt = 0 \quad \int_0^{\pi} e^{it} = -i[e^{i\pi} - e^{i0}] = 2i, \quad \int_0^{\pi/2} e^{it} = -i[e^{i\pi/2} - e^{i0}] = -i(i-1) = i+1$$

7.1.5 בחלקים

כמובן שכשיש נסחא כמו $(fg)' = f'g + fg'$ ויש משפט ניוטון לייבניץ, אז יש גם אינטגרציה בחלקים

$$(fg)|_a^b = \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

ואפשר להשתמש למשל

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} te^{int}dt &= t\frac{e^{int}}{in}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{in}dt = \frac{\pi}{in}\left[e^{in\pi} + e^{in(-\pi)}\right] - \frac{e^{int}}{(in)^2}|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -i\frac{\pi}{n}2\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}[e^{in\pi} - e^{-in\pi}] = 2i\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

במקום זה כמובן שניתן היה להשתמש בפירוק לסינוס וקוסינוס ולכל אחד לעשות בנפרד אינטגרציה בחלקים.

7.1.6 פשוט ושימושי

למה 7.1 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ונניח $f \in R[a,b]$. אזי גם $|f| \in R[a,b]$ ומתקיים

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

הוכחה: אינטגרביליות מיידית כי נשמרת תחת $\sqrt{u^2+v^2} \mapsto u,v$. כאשר הפונקציה מקבלת ערכים ממשיים, מדובר פשוט בהשוואת אינטגרלים. כעת הערכים מרוכבים, וגם האינטגרל הוא מרוכב, אז נסמן $\int_a^b f(x)dx = z \in \mathbb{C}$. נסמן גם $\lambda = \frac{\bar{z}}{|z|}$ אז מתקיים $|\lambda| = 1$ וכן $\lambda z \in \mathbb{R}$ כי $\lambda z = |z|$. זה פשוט לסובב אותו, אם $z = Re^{i\theta}$ אז $\lambda = e^{-i\theta}$. נקבל

$$|\int_a^b f(x)dx| = |z| = \lambda z = \int_a^b \lambda f = Re(\int_a^b \lambda f) = \int_a^b Re(\lambda f) \leq \int_a^b |\lambda f| = \int_a^b |f|$$

■

סוף שיעור 13

7.2 פונקציות מחזוריות

נאמר שפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ היא מחזורית בעלת מחזור T אם $f(x+T)=f(x)$ לכל x. כמובן שאם $f(x)$ בעלת מחזור T אז $g(x)=f(Tx)$ היא בעלת מחזור 1.

לדוגמא, הפונקציה $e_n(t)=e^{int}$ היא בעלת מחזור $2\pi/|n|$. אבל בפרט, אם $n\in\mathbb{N}$, גם בעלת מחזור 2π. על פי רוב נזהה פונקציות מחזוריות בעלות מחזור 2π נאמר, עם פונקציות על $[0,2\pi)$, או עם פונקציות על $[0,2\pi]$ כך ש $f(0)=f(2\pi)$. מבחינת תורת הקבוצות מדובר באותו אובייקט, אולם מבחינת חדו"א יש הבדלים מינוריים, למשל כשנרצה לדבר על רציפות, בהגדרה האמצעית יהיה צורך לבקש $\lim_{t\to2\pi}f(t)=f(0)$. בהגדרה האחרונה אם נרצה לדבר על גזירות בנקודה 0 "$=$" 2π יהיה צורך לדרוש שהנגזרת משמאל ב 2π תזדהה עם הנגזרת מימין ב 0, ולכן נוח יותר לעבוד עם פונקציות 2π מחזוריות על $\mathbb{R}$ שזה כמו פונקציות על המעגל

$$\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

כאשר הדבקנו בעצם את הנקודות 0 ו2π יחדיו ליצירת מעגל (טורוס חד מימדי - מכאן האות $\mathbb{T}$). נגדיר את $R(\mathbb{T})$ להיות אוסף הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ בעלות מחזור 2π שהן אינטגרביליות בקטע $[0,2\pi]$.

הגדרה 7.2 נסמן $e_n(t)=e^{int}$ עבור $n\in\mathbb{N}$. פולינום טריגונומטרי זהו צרוף ליניארי סופי של פונקציות כאלה עם מקדמים מרוכבים,

$$P(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne_n(t)$$

והדרגה של הפולינום היא N. (אם c_N או c_{-N} לא מתאפסים.)

נשים לב שכל פולינום כזה ניתן להצגה כ

$$P(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}=\sum_{n=-N}^{N}c_n(\cos(nt)+i\sin(nt))$$

זאת אומרת כצרוף ליניארי של סינוסים וקוסינוסים. ואם $c_n=a_n+ib_n$ נקבל

$$\begin{aligned}P(t) &= c_0+\sum_{n=1}^{N}(c_n+c_{-n})\cos(nt)+i(c_n-c_{-n})\sin(nt)\\ &= c_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{-n})\cos(nt)+(b_{-n}-b_n)\sin(nt)\\ &\quad +i\sum_{n=1}^{N}(b_n+b_{-n})\cos(nt)+(a_n-a_{-n})\sin(nt)\end{aligned}$$

כך שיש הצגה מפורשת של החלק הממשי והחלק המרוכב. גם את ההתאמה ההפוכה קל לבצע, דהיינו אם נתונה פונקציה מהצורה

$$Q(t)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\cos(nt)+i\beta_k\sin(nt)$$

אז קל למצוא את ההצגה המתאימה כפולינום טריגונומטרי, זאת אומרת לפתור $\alpha_0 = c_0$, $\alpha_k = c_k + c_{-k}$ ו $\beta_k = c_k - c_{-k}$.

7.3 מכפלה פנימית

על מרחב הפונקציות $R[\mathbb{T}]$ יש מבנה של מכפלה פנימית. (זהו כמובן מרחב וקטורי, מעל המרוכבים ־ אם כי די ברור שהמימד שלו כמרחב וקטורי הוא אינסוף ־ נדון בכך בקרוב). נגדיר את המכפלה הפנימית באופן הבא

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

לכל זוג פונקציות מותאם על כן מספר מרוכב באופן זה. זה כמובן צריך להזכיר לכם את המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ומי שמכיר במרחב $\mathbb{C}^n$ מגדירים $\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$. נגדיר גם את

$$\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

שכמובן מזכיר לנו אורך של וקטור $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

7.3.1 תכונות פשוטות

ישנן תכונות שהן האקסיומות של מרחב מכפלה פנימית, וכדאי לוודא שמתקיימות

1. $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$
2. $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$
3. $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$
4. $\langle f, f\rangle \geq 0$ (ובפרט ממשי) ו $\langle f, f\rangle = 0$ ($\|f\| = 0$) אם ורק אם $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 0$.

   נדון בתכונה זו מעט: אילו $||f|| = 0$ אז בכל נקודת רציפות קל לראות ש $f(x) = 0$. אם מצטמצמים לפונקציות רציפות, קיבלנו שפשוט $f \equiv 0$. לפונקציות כלליות לא דנו כל כך בנושא של מידה אפס, ולא הוכחנו שלפונקציה אינטגרבילית יש מידה אפס של נקודות אי רציפות, אם כי הדבר נכון. מה שעושים במקרה כללי הוא לקחת מרחב מנה תחת יחס השקילות $f \sim g$ אם $\int |f-g|^2 = 0$ ולעבוד שם. אחרת החלק החסר של תכונה 4 שאומר ש $\|f\| = 0$ רק לפונקציית האפס לא תקף. או שאפשר באמת להצטמצם לפונקציות רציפות. או להצטמצם לרציפות למקוטעין ומשמאל, או כל מיני אפשרויות אחרות.

ישנם דברים רבים שנובעים אוטומטית מהתכונות הללו, ללא צורך בידע על ההגדרה המסויימת של הממ"פ שלנו. נעיר שהעובדה ש $\langle f,f\rangle \in \mathbb{R}$ נובעת מהתכונה הראשונה מיידית. ליניאריות במשתנה השני נובעת גם היא מתכונות 1 ו־2, כמוכן מתכונות 1 ו־3 נובע כי $\langle f,\lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f,g\rangle$. קל לראות לכן גם ש $\|\lambda f\| = |\lambda|\cdot\|f\|$.

7.3.2 מושג האורתוגונליות

היתרון הגדול במבנה של מכפלה פנימית (שנקרא גם מבנה אוקלידי) הוא שיש מושג של להיות "מאונך". כשנעבוד רק עם התכונות האבסטרקטיות ולא עם המרחב הקונקרטי שלנו, נסמן את מרחב המכפלה הפנימית ב V.

הגדרה 7.3 תהיינה $f,g\in V$. נאמר שהן אורתוגונליות אם $\langle f,g\rangle = 0$ ונסמן $f\perp g$.

למה 7.4 [משפט פיתגורס] יהיו $f,g\in V$ ונניח $f\perp g$. אזי $\|f+g\|^2 = \|f\|^2+\|g\|^2$.

הוכחה: אכן

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g,f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|^2+\|g\|^2$$

■

לדוגמא, כשנסמן כרגיל $e_n = e^{int}$ עבור $n\in\mathbb{Z}$ בממ"פ שלנו,

$$\langle e_n,e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)}}{i(n-m)}\Big|_0^{2\pi} & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases} = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ 1 & n=m \end{cases}$$

זאת אומרת שמדובר במערכת אורתונורמלית של פונקציות. היא מזכירה במידה מסויימת את המערכת האורתונורמלית הסופית $\{e_i\}_{i=1}^n$ ב $\mathbb{R}^n$ או ב $\mathbb{C}^n$ המוגדרת על ידי $\vec{e}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ כשהאחד הוא במקום ה i.

אם נתרגם את העובדה האחרונה למונחים של סינוסים וקוסינוסים, נראה שלמעשה

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e_n+e_{-n}}{2}\overline{\frac{e_m+e_{-m}}{2}} = \begin{cases} 0 & n\neq \pm m \\ 1/2 & n=\pm m\neq 0 \\ 1 & n=m=0 \end{cases} \\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e_n-e_{-n}}{2i}\overline{\frac{e_m-e_{-m}}{2i}} = \begin{cases} 0 & n\neq \pm m \\ 0 & n=m=0 \\ 1/2 & n=+m\neq 0 \\ -1/2 & n=-m\neq 0 \end{cases} \\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\sin(mt) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e_n+e_{-n}}{2}\overline{\frac{e_m-e_{-m}}{2i}} = 0
\end{aligned}$$

7.3.3 אי שוויון קושי שוורץ

למה 7.5 יהיו $f,g\in V$ אזי מתקיים

$$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\cdot\|g\|$$

לעיתים מגדירים את הזוית ביניהם על ידי $\cos(\angle f,g)=\frac{|\langle f,g\rangle|}{\|f\|\cdot\|g\|}$.

הוכחה: לכל $\lambda\in\mathbb{C}$ מתקיים

$$0\le\langle f-\lambda g,f-\lambda g\rangle=\|f\|^2-\lambda\langle g,f\rangle-\overline{\lambda}\langle f,g\rangle+|\lambda|^2\|g\|^2$$

כעת נציב את $\lambda=\frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}$ ונקבל

$$0\le\|f\|^2-2\frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2}+\frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2}=\|f\|^2-\frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2}$$

■

אפשר לתת עוד הרבה הוכחות (זה אי שוויון שימושי ביותר) למשל ניתן הוכחה לממ"פ הספציפי שלנו

הוכחה: מאי שויון הממוצעים $A\cdot B\le\frac{CA^2+\frac{1}{C}B^2}{2}$ לכל $A,B,C>0$. לכן

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)||g(x)|dx\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C|f|^2+\frac{1}{C}|g|^2}{2}\right)dx\\ &= C\frac{\|f\|^2}{2}+\frac{1}{C}\frac{\|g\|^2}{2}\end{aligned}$$

נבחר את $C=\|g\|/\|f\|$ וסיימנו. ■

7.3.4 אי שוויון המשולש

למה 7.6 יהיו $f,g\in V$ אזי מתקיים

$$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$$

הוכחה: מיידית מקושי שוורץ

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \|f\|^2+\|g\|^2+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle=\|f\|^2+\|g\|^2+\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}\\ &= \|f\|^2+\|g\|^2+2Re\langle f,g\rangle\le\|f\|^2+\|g\|^2+2|\langle f,g\rangle|\\ &\le \|f\|^2+\|g\|^2+2\|f\|\cdot\|g\|=(\|f\|+\|g\|)^2\end{aligned}$$

וניקח שורשים בשני הצדדים. ■

7.4 פורייה למתחילים

נביט בפונקציות $e_n(t) = e^{int}$. הן פורשות את המרחב הוקטורי של פולינומים טריגונומטריים ־ צרופים ליניאריים סופיים שלהן. אם נתונה

$$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$$

מגדירים את מקדם פורייה ה mי של הפונקציה להיות $\langle f, e_m\rangle$ ואז מתקיים

$$\hat{f}(m) := \langle f, e_m\rangle = \sum_{n=-N}^{N} c_n \langle e_n, e_m\rangle = c_m$$

ולכן יתקיים

$$f = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n$$

ובנוסף, אילו $g = \sum_{n=-N}^{N} d_n e_n$ אזי גם עבורה יתקיים $g = \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n) e_n$ וכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g} = \langle f, g\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

ובפרט

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2$$

סוף שיעור 14

7.5 פורייה למתקדמים

הגדרה 7.7 [מקדמי פורייה] תהי $f \in R(\mathbb{T})$. נגדיר

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

ונקרא למספר מרוכב זה "מקדם פורייה ה nי של f". נגדיר את

$$S_N f = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n \ \ , \ \ \left(S_N f\right)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}$$

קצת היסטוריה: החבר'ה (אוילר, ברנולי, לגרנז') ידעו באופן "ניסיוני" שלפונקציות פשוטות כאשר $N \to \infty$ מתקיים

$$S_N f(t) \to f(t)$$

ופורייה היה הראשון שטען שהדבר מתקיים בצורה יותר כללית. מה שיותר חשוב - הוא הראה שעובדה זו יכולה לפתור בעיות פיסיקליות המתוארות על ידי משוואות דיפרנציאליות ליניאריות שהיו נפוצות במאה ה 19. דיריכלה היה הראשון שהראה באופן ריגורוזי ומדוייק שאכן עבור למשל פונקציות גזירות ברציפות ומחזוריות 2π הדבר מתקיים. התנאי של הגזירות ברציפות היה נראה די עקרוני, שכן היתה דוגמא (של דו-בואה-ריימונד) של פונקציה רציפה בה $\limsup_{N\to\infty} S_N f(0) = \infty$. עדיין ניתן היה לשאול האם אפשר לשחזר את $f(t)$ בעזרת מקדמי פורייה, והתשובה לכך (במקרה הרציף) היא כן - כפי שהראה פייר, אבל במקום לקחת גבול צריך לקחת גבול במובן של צזארו, ובכך נדון גם כן על קצה המזלג.

בשלב הראשון נדון בכלל לא בהתכנסות נקודתית אלא רק בהתכנסות בנורמה:

$$\int_0^{2\pi} |S_N(x) - f(x)|^2 dx \to 0$$

ורק אחר כך נעבור לדון בהתכנסות נקודתית.

הערה 7.8 הרבה פעמים אנחנו מצטמצמים ל $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, ואז זה נשמע מצחיק לקרב אותן עם $S_N f$ שיכול להחזיר ערכים בכלל מרוכבים. דרך מלאכותית היא לומר פשוט שניקח את $Re(S_N f)$ בתור הקירוב. אבל אין צורך בכך! נשים לב שלפונקציה ממשית

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
\hat{f}(-n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n)e^{int} &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right]\cos(nt) + \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right]\sin(nt) \\
&+ i\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right]\sin(nt) - i\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right]\cos(nt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(-n)e^{-int} &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right]\cos(nt) + \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right]\sin(nt)\\ &- i\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right]\sin(nt) + i\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right]\cos(nt)\end{aligned}$$

כך שנקבל ממילא

$$\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{-int} = \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right]\cos(nt) + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right]\sin(nt) \in \mathbb{R}$$

זו כמובן היתה דרך ארוכה ומסורבלת לומר ש $\hat{f}(-n) = \langle f, e_{-n}\rangle = \langle f, \overline{e_n}\rangle = \overline{\langle f, e_n\rangle} = \overline{\hat{f}(n)}$ ולכן

$$\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{-int} = \hat{f}(n)e^{int} + \overline{\hat{f}(n)e^{int}} \in \mathbb{R}$$

ולכן גם עבור הסכום כולו, כאשר f מחזירה ערכים ממשיים, גם $S_N f$ מחזירה רק ערכים ממשיים.

7.5.1 הזנב מאונך לקירוב

טענה 7.9 תהי $f \in R([0, 2\pi])$ אזי מתקיים

$$S_N - f \perp S_N$$

וביתר כלליות $S_N - f \perp e_k$ לכל $|k| \le N$.

הוכחה: פשוט נחשב $\langle f - S_N f, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle - \langle \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n, e_k\rangle = \hat{f}(k) - \hat{f}(k) = 0$.

■

מסקנה 7.10 תהי $f \in R([0, 2\pi])$ אזי מתקיים

$$\|f\|^2 = \|S_N f\|^2 + \|f - S_N f\|^2$$

7.5.2 אי שוויון בסל

טענה 7.11 תהי $f \in R([0, 2\pi])$ אזי מתקיים $\|S_N f\|^2 \le \|f\|^2$ לכל N וגם בגבול

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|^2$$

ובפרט הטור של ערך מוחלט של מקדמי פורייה בריבוע, מתכנס.

הוכחה: הדבר מייד מהטענה הקודמת

$$\|f\|^2 = \|S_N f\|^2 + \|f - S_N f\|^2 \geq \|S_N f\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2$$

ועל ידי לקיחת גבול כאשר $N \to \infty$ סיימנו. ■

7.5.3 הלמה של רימן ולבג

טענה 7.12 תהי $f \in R([0, 2\pi])$ אזי מתקיים

$$\lim_{n \to \pm\infty} |\hat{f}(n)| = 0$$

הוכחה: זהו איבר כללי בטור מספרי שמתכנס לפי הטענה הקודמת. ■

7.5.4 התכנסות ב L_2.

הגדרה 7.13 תהי סדרת פונקציות $f_n \in R[0, 2\pi]$ ותהי $f \in R[0, 2\pi]$. נאמר שהן מתכנסות אליה בנורמת L_2, ונסמן $f_n \xrightarrow{L_2} f$ אם מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| \to 0$$

נשים לב שגבול במובן זה איננו יחיד, שכן שינוי של f למשל במספר סופי של נקודות לא משנה.

מטרתנו בסעיף זה להראות שעבור פונקציה אינטגרבילית, טור פורייה שלה מתכנס אליה במובן L_2. זו טענה כללית דהיינו תקפה לכל הפונקציות האינטגרביליות. רעיון ההוכחה פשוט: מבין כל הפולינומים הטריגונומטריים הקיימים, מדרגה מסויימת, פולינום פורייה הוא הקרוב ביותר (בנורמה) לפונקציה (זו טענה 7.20 מטה). לכן כל שצריך להראות זה צפיפות של הפולינומים הטריגונומטריים במובן L_2. אנו כב יודעים צפיפות במ"ש של פולינומים רגילים ברציפות, ואפשר להסיק מכאן צפיפות של טריגונומטריים ברציפות, במ"ש, ובתוספת עם צפיפות L_2 של רציפות באינטגרביליות, לסיים. למעשה יהיה לנו את הצפיפות של הטריגונומטריים ברציפות בהוכחה אחרת בהמשך, ולכן נדלג על צפיפות במ"ש של טריגונומטריים ברציפות, אם כי דרך להסיק זאת ממשפט ויירשטראסס תינתן לכם בתירגול.

קודם כל נראה את העובדה שהתכנסות במ"ש גוררת התכנסות במובן L_2.

למה 7.14 תהי סדרת פונקציות $f_n \in R[0, 2\pi]$ ותהי $f \in R[0, 2\pi]$ ונניח $f_n \xrightarrow{u} f$. אזי $f_n \xrightarrow{L_2} f$.

הוכחה: עלינו להראות $\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ וזה נובע מיידית משפט 5.13 על החלפת איטגרל וגבול יחד עם העובדה שגם $|f_n - f|^2 \xrightarrow{u} 0$ (כי מדובר בפונקציות חסומות במידה אחידה שהרי הן מתכנסות במ"ש לחסומה). ■

מסקנה 7.15 פולינומים צפופים ברציפות גם במובן L_2. לכל $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה קיימים פולינומים $P_n(x),Q_n(x)$ כך ש

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(x)+iQ_n(x)-f(x)\|\to 0$$

אנו נזדקק למשפט דומה העוסק בפולינומים טריגונומטריים

משפט 7.16 תהי $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ רציפה עם $f(0)=f(2\pi)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי $P_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke_k(t)$ כך ש

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}|P_n(t)-f(t)|<\varepsilon$$

אנו נראה הוכחה ישירה של משפט זה בהמשך שתסתמך על גרעין פייר, וכרגע רק נשתמש בו ללא הוכחה.

הערה 7.17 הוכחה נוספת שמתבססת על משפט ויירשטראס לפולינומים רגילים תראו בתרגיל הבית [לאחר פרסום הפתרון נוסיף את ההוכחה גם ברשימות].

משפט 7.18 תהי $f\in R[0,2\pi]$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים פולינום טריגונומטרי P כך ש $\|P-f\|<\varepsilon$ ובפרט קיימת סדרת פולינומים טריגונומטריים $P_n(t)$ כך ש $P_n\overset{L_2}{\to}f$.

הוכחה: ראשית נראה שכל פונקציה אינטגרבילית ניתנת לקירוב L_2 על ידי פונקציות רציפות. אכן, בהנתן פונקציה אינטגרבילית ניתן להניח בלי הגבלת הכללית כי $f(0)=f(2\pi)$ כי שינוי פונקציה בנקודה בודדת לא משפיע על אינטגרביליות, וגם לא על נורמת L_2 של ההפרש שלה מכל פונקציה אחרת. נבחר חלוקה שמקיימת $\omega(f,\Pi)\leq\varepsilon/2$ ונגדיר פונקציה g שעל תת הקטע ה i-י של החלוקה היא ליניארית ומזדהה עם f בנקודות x_i של החלוקה. נשים לב שבבניה זו g היא רציפה. זו פונקציה רציפה שמקרבת את f במובן הבא: בכך תת קטע $[x_{i-1},x_i]$ מתקיים $|g(x)-f(x)|\geq\omega(f,[x_{i-1},x_i])$. ולכן אם נסמן את החסם של f ב M אז

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|^2\leq\frac{2M}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f-g|\leq\frac{M}{\pi}\Sigma_{i=1}^{K}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i=\frac{M}{\pi}\omega(f,\Pi)\leq\varepsilon/3$$

ומשום ש ε היה כלשהו, קרבנו את f על ידי רציפה בנורמה. כעת g מקיימת את תנאי משפט 7.16 לכן נוכל לקרב את g במ"ש (ובפרט ב L_2) על ידי פולינום טריגונומטרי P עד כדי $\varepsilon/2$, ונקבל את המשפט:

$$\|P-f\|\leq\|P-g\|+\|g-f\|<\varepsilon.$$

■

משפט 7.19 תהי $f \in R([0,2\pi])$ אזי מתקיים $\lim_{N\to\infty}\|S_N f - f\| = 0$ דהיינו

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi}|f(x)-S_N(x)|^2dx = 0$$

ובפרט מתקיים שוויון פרסבל

$$.\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2$$

בשביל המשפט נראה טענת עזר שגם היא שימושית בתורת הקירובים:

טענה 7.20 תהי $f \in R[0,2\pi]$. אזי הפולינום הטריגונומטרי מדרגה $N \geq$ הקרוב ביותר ב L_2 ל f הוא $S_N f = \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n$, זאת אומרת שמתקיים לכל $c_k \in \mathbb{C}$

$$.\|\sum_{n=-N}^{N}c_n e_n - f\|^2 \geq \|\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n - f\|^2$$

הוכחה: נחשב, תוך שימוש בכך ש $S_N f - f \perp e_n$ לכל $n \leq N$ (טענה 7.9) ומשפט פיתגורס

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=-N}^{N}c_n e_n - f\|^2 &= \|\sum_{n=-N}^{N}c_n e_n - S_N f + S_N f - f\|^2\\
&= \|\sum_{n=-N}^{N}c_n e_n - \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n\|^2 + \|S_N f - f\|^2\\
&\geq \|\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n - f\|^2
\end{aligned}$$

כרצוי ■

הוכחה: [של טענה 7.19] על פי משפט 7.18 קיימת סדרה Q_N של פולינומים טריגונומטריים (כאשר הפולינום Q_N הוא מדרגה N) כך ש $Q_N \xrightarrow{L_2} f$, אך על פי הטענה האחרונה מתקיים

$$\|S_N f - f\| \leq \|Q_N - f\| \to_{N\to\infty} 0$$

ולכן בפרט $\lim_{N\to\infty}\|S_N f - f\| = 0$. שוויון פרסבל נובע גם הוא שכן

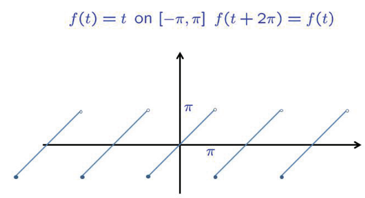
$$\sum_{n=-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2 = \|S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \|S_N f - f\|^2 \to_{N\to\infty} \|f\|^2$$

■

סוף שיעור 15

7.5.5 דוגמא חישובית

נרצה לקרב את $f(t)=t$ (נדון דווקא בקטע $[-\pi,\pi]$) על ידי פולינומים טריגונומטריים, עד כמה שאפשר במ"ש (היא לא רציפה, אז אי אפשר ממש), זה כיוון אחר לנסות ולהוכיח בעזרתו את משפט 7.16 בעזרת משפט ויירשטראסס (משפט 5.22), (ברגע שקירבת את t, תוכלי לקרב גם חזקות על ידי חזקות של הקירוב) אך בגלל בעיית הרציפות זה לא עובד ישירות. בתת פרק זה נחשב בדיוק את טור פורייה של פונקציה זו. נעיר שוב שהיא לא פונקציה רציפה על $\mathbb{T}$ שכן יש לה ערכים שונים ב π וב $-\pi$, אולם יש לה רק נקודת אי רציפות אחת כזו בכל קטע מאורך 2π.



איור 24: פונקציית המסור

כמובן שנמשיך אותה מחזורית, כך שנקבל פונקצייה הדומה למסור.

למה 7.21 תהי $f:[-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(t)=t$, ונמשיך אותה מחזורית לכל $\mathbb{R}$. מקדמי פורייה שלה נתונים על ידי $\hat{f}(n)=i(-1)^n/n$ עבור $n\neq 0$ ו $\hat{f}(0)=0$. פולינום פורייה מסדר N שלה נתון על ידי $S_Nf(t)=\sum_{n=1}^{N}2(-1)^{n+1}\frac{\sin(nt)}{n}$. הוא מתכנס במ"ש בכל תת קטע סגור של $(-\pi,\pi)$, לפונקציה f. בפרט הוא מתכנס נקודתית ל f בקטע הפתוח.

הערה 7.22 הבעייתיות בנקודות $\pm\pi$ נובעת כמובן מחוסר הרציפות שם. הטור עצמו יתכנס כמובן לאפס בנקודות אלה, שכן זה פשוט טור אפסים. אבל ההתכנסות בקטע כולו לא תהיה במ"ש. נעיר גם שבקרוב נראה משפטים כלליים על התכנסות נקודתית, ולעיתים במ"ש, של הטור לפונקציה.

הוכחה: משום שהפונקציה איזוגית, ברור ש $\hat{f}(0)=0$. נחשב עבור $n\neq 0$

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}te^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}t\frac{i}{n}e^{-int}|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{i}{n}e^{-int}dt\\ &= \frac{i}{2\pi n}\pi 2e^{in\pi}=\frac{i}{n}(-1)^n\end{aligned}$$

נסכום אותם לקבלת

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{0\neq n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} = \sum_{0\neq n=-N}^{N} \frac{i}{n}(-1)^n e^{int} = \sum_{0\neq n=-N}^{N} \frac{i}{n}(-1)^n[\cos(nt)+i\sin(nt)] \\ &= \sum_{0\neq n=-N}^{N} \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin(nt) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nt) \end{aligned}$$

את הביטול של הגורם עם קוסינוס אפשר היה לבצע ללא מחשבה על פי הערה 7.8. את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nt)$ עבור $e^{it} \neq -1$ נסיק מקריטריון דיריכלה (שגם יתן לנו התכנסות במ"ש בתת קטעים סגורים שלא מכילים את $\pm\pi$). לשם כך נסמן $a_n(t) = \frac{1}{n}$ שהיא מונוטונית יורדת לאפס (במ"ש ב t שכן היא איננה תלויה ב t), ו $b_n(t) = (-1)^n\sin(nt) = (-1)^n Im(e^{int})$. יש לבדוק שסדרת הסכומים החלקיים $\sum_{n=1}^{N} b_n(t)$ חסומה במידה אחידה. יותר נוח לסכום בהצגה המרוכבת. נשים לב שלא השתמשנו בנוסאות מיוחדות, רק בטלסקופיות של הטור שהיא עובדה אלגברית.

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\sin(nt) \quad = Im[\textstyle\sum_{n=1}^{N}(-e^{it})^n] = \quad Im[\frac{(-e^{it})-(-1)^{N+1}e^{i(N+1)t}}{1+e^{it}}$$

אם אנו מצטמצמים לנקודות t עבורן נאמר $|1+e^{it}| > \delta$ אז ניתן לחסום לכל N

$$|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n e^{int}| \leq \frac{2}{\delta}$$

ובפרט הטור $\sum b_n(t)$ חסום במידה אחידה ולכן על פי משפט 5.19, גם הטור כולו מתכנס במ"ש בכל קטע מהצורה $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$.

יש כמה דרכים פשוטות לראות שההתכנסות היא ל f עצמה. ראשית נצטמצם לקטע מהצורה $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. ההתכנסות היא במ"ש ובפרט לפונקציה רציפה לכן ההתכנסות היא לפונקציה רציפה בקטע $(-\pi, \pi)$, נסמן אותה ב g. מצד שני אנו יודעים שיש התכנסות במובן L_2 לפונקציה עצמה, שגם היא רציפה. נקבל לכן שהפונקציה הגבולית מוכרחה להזדהות עם f במובן L_2, $\|f-g\|_2 = 0$. מכיוון ששתיהן רציפות, נובע פשוט $f \equiv g$ בקטע. בהמשך נראה הוכחה נוספת ללא שימוש במשפט על התכנסות בנורמה. ■

הערה 7.23 שוויון פרסבל עבור הפונקציה הספציפית הזו נותן לנו גם שוויון מספרי:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

ואת אחד משני הצדדים אנו יודעים לחשב

$$\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{1}{3}(-\pi^3)] = \sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

כך שקיבלנו

$$\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

אם לא ידענו זאת קודם. המון חישובים מסוג זה בטורי פורייה מניבים נסחאות יפות לסכומי טורים אינסופיים. אפילו ללא פרסבל, מרגע שאנו יודעים התכנסות נקודתית אנו יכולים להציב בפונקציה ערכים כלשהם, נאמר נציב $t = \pi/2$ ונקבל

$$\pi/2 = f(\pi/2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi/2)}{n} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(2k-1)+1}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

זאת אומרת $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$. זהו הטור ההרמוני האלטרננטי אבל רק על האיזוגיים.

למה 7.24 תהי $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(t) = \frac{1}{4}(\pi - t)^2$, ונמשיך אותה מחזורית לכל $\mathbb{R}$. מקדמי פורייה שלה נתונים על ידי $\hat{f}(n) = \frac{1}{2n^2}$ עבור $n \neq 0$ ו $\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{12}$. פולינום פורייה מסדר N שלה נתון על ידי $S_N f(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(nt)}{n^2}$. הוא מתכנס נקודתית ובמ"ש ב$[0, 2\pi]$, לפונקציה f. טור פורייה שמתקבל הוא $\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}$. שוויון פרסבל נותן $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

הוכחה: החישוב פשוט, שימוש באינטגרציה בחלקים. $\hat{f}(0) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)^2 dt = \frac{1}{8\pi}[-\frac{(\pi-t)^3}{3}]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{24\pi} = \frac{\pi^2}{12}$ וכן

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)^2 e^{-int}dt = \frac{1}{8\pi}(\pi - t)^2\frac{e^{-int}}{-in}|_0^{2\pi} - \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(-2(\pi - t))\frac{e^{-int}}{-in}dt \\ &= 0 - i\frac{1}{4\pi n}\int_0^{2\pi} te^{-int}dt = \frac{-i}{4\pi n}t\frac{e^{-int}}{-in}|_0^{2\pi} + \frac{i}{4\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-int}}{-in}dt = \frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

וקיבלנו את מקמי פורייה האמורים. הסכימה והזוגיות של קוסינוס נותנת את הביטוי לפולינום פורייה, ולטור. נשים לב שהטור מתכנס בהחלט (הפונקציה עצמה רציפה, שזה שיפור לעומת הקודמת) ובמ"ש על פי הבוחן של ויירשטראסס. בפרט, הפונקציה הגבולית רציפה, וגם f רציפה, ומשום ש $\|f - S_N f\| \to 0$ נקבל שהפונקציה הגבולית היא f עצמה. פרסבל ייתן לנו (נרשום את הטור באופן מלא כך $\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{int}+e^{-int}}{2n^2}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\pi - t)^4}{16}dt = \frac{\pi^4}{144} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{4n^4}$$

$$\pi^4[\frac{1}{80} - \frac{1}{144}] = -\frac{1}{2\pi}\frac{(\pi - t)^5}{5 \cdot 16}|_0^{2\pi}dt - \frac{\pi^4}{144} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^4}$$

זאת אומרת קיבלנו $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. ■

מההתכנסות הנקודתית נובע שמותר להציב כל מיני t ולקבל שוויונות. בנקודה 0 נציב ונקבל

$$\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}$$

שמסתדר עם החישוב הקודם.

בנקודה $t=\pi/2$ נציב, עבור n איזוגי הקוסינוס יתאפס, ועבור $n=2k$ זוגי, הסימן תלוי בזוגיות של k. נקבל

$$\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2}=\frac{\pi^2}{16}$$

שהופך לנוסחא $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}$. למעשה נוסחא זו יכולנו להסיק גם כן מהקודמות באופן הבא:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

ועל ידי העברת אגפים נקבל את הנסחא מעלה. לדוגמה נוכל להציב $t=\pi$ ולקבל

$$\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$$

שוב לא דבר חדש (אבל טוב שהכל מסתדר).

7.6 התכנסות נקודתית של טור פורייה

7.6.1 דעיכת המקדמים

הלמה של רימן ולבג, משפט 7.12, אומרת שמקדמי פורייה תמיד דועכים, שואפים לאפס, פשוט משום שהטור של הריבועים שלהם מתכנס. זה למעשה אומר קצת יותר מסתם שאיפה לאפס, כי זה לא יכול לשאוף יותר מידי לאט.

אולי שמתם לב לכך שכשהפונקציה לה עשינו פורייה הייתה לא רציפה ($f(t)=t$ ב $[-\pi,\pi)$ ומחזורית 2π) המקדמים דעכו כמו $1/n$ ואילו בפונקציה השנייה שכן הייתה רציפה, הם דעכו מהר יותר, בקצב של $1/n^2$. הדבר איננו מקרי, ואולי מזכיר לכם טענה מהעבר הרחוק: טענה 3.63, שאפילו קראנו לה "דעיכת מקדמי פורייה" אם כי עוד לא עסקנו אז במרוכבים כך שניסחנו אותה רק על סינוסים וקוסינוסים.

למה 7.25 תהי $f\in C^1(\mathbb{T})$ זאת אומרת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, מחזורית 2π, וגזירה ברציפות. אזי $\hat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$ ובפרט $n\hat{f}(n)\to 0$.

הוכחה: נחשב

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-int}dt=\frac{f(t)e^{-int}}{2\pi}|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)(-ine^{-int})dt=in\hat{f}(n)$$

כרצוי. נעיר שלמעשה לא היה צורך ברציפות f' כי אינטגרציה בחלקים אפשר לעשות גם אם, נאמר, f רציפה, גזירה למקוטעין ו־f' רציפה למקוטעין. לבסוף, השאיפה לאפס נובעת מרימן לבג עבור f'. ■

אפשר כמובן להכליל לנגזרות מסדר k, ולקבל באינדוקציה

למה 7.26 תהי $f \in C^k(\mathbb{T})$ זאת אומרת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, מחזורית 2π , וגזירה ברציפות k פעמים. אזי $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \hat{f}(n)$ ובפרט $n^k \hat{f}(n) \to 0$.

הוכחה: באינדוקציה. המקרה $k = 1$ ראינו, וכעת

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt &= \frac{f^{(k-1)}(t)e^{-int}}{2\pi}|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k-1)}(t)(-ine^{-int})dt \\ &= in\widehat{f^{(k-1)}}(n) = in(in)^{k-1}\widehat{f^{(k-1)}}(n)\end{aligned}$$

כרצוי. שוב השאיפה לאפס מרימן לבג, הפעם עבור $f^{(k)}$. ■

הערה 7.27 משפט בכיוון הפוך (על כך שאם מקדמי פורייה דועכים בקצב מסויים נתון, הפונקציה חייבת להיות גזירה מספר פעמים מסויים) ינתן לכם בתירגול.

מסקנה 7.28 תהי $f \in C^1(\mathbb{T})$ כמו בלמה. אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ ובפרט $S_N f \to f$ במ"ש.

הוכחה: לפי הלמה $|\hat{f'}(n)|^2 = n^2|\hat{f}(n)|^2$ ולכן לפי בסל $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 < \infty$. אולם מאי שוויון הממוצעים לכל $n \neq 0$ $|\hat{f}(n)| = |\hat{f}(n)|n\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}[|\hat{f}(n)|^2n^2 + \frac{1}{n^2}]$ ולכן אחרי סכימה נקבל

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 + |\hat{f}(0)| + \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

כעת לפי הבוחן של ויירשטראסס, הטור הרלוונטי של הפונקציות מתכנס בהחלט ובמ"ש. בפרט הוא מתכנס לפונקציה רציפה, ולכן, כפי שראינו שנובע מהתכנסות במובן L_2 ל f יחד עם התכנסות במ"ש לאיזושהיא פונקציה, שהפונקציה המקורית רציפה נובע כי ההתכנסות במ"ש היא בהכרח ל f עצמה. ■

במסקנה האחרונה למעשה השתמשנו בטיעון מעט יותר כללי ושימושי

טענה 7.29 תהי י $f \in C(\mathbb{T})$ זאת אומרת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ רציפה ומחזורית 2π. אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ אזי $S_N f \to f$ במ"ש על $[0, 2\pi]$ ובפרט נקודתית.

הוכחה: לפי הבוחן של ויירשטראסס, הטור הרלוונטי של הפונקציות מתכנס בהחלט ובמ"ש. בפרט הוא מתכנס לפונקציה רציפה, ולכן בהכרח ל f עצמה. ■

סוף שיעור 16

7.6.2 קונבולוציה

הגדרה 7.30 תהיינה $f,g\in R(\mathbb{T})$ זאת אומרת $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ מחזוריות 2π ואינטגרביליות על $[0,2\pi]$. נגדיר את

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(x-t)dt$$

הפעולה הזאת, במובן מסויים, שומרת את התכונות הטובות של שתי הפונקציות. הדרך העיקרית בה אנו נשתמש בה היא כאשר g תנסה לקרב לנו את "הזהות" על $R(\mathbb{T})$. תראו בתרגיל שלא יקיימת g שפועלת "כמו הזהות", זאת אומרת ש $f*g=f$ לכל f, אבל אפשר לנסות ולהתקרב לכך. (בידקו לעצמכם: מה קורה כשעושים קונבולוציה עם פונקציה קבועה?).

לדוגמא, אם
$$g_n(x)=\begin{cases}4\pi n & x\in[-1/n,1/n]\\ 0 & x\in\mathbb{T}\setminus[-1/n,1/n]\end{cases}$$

$$(f*g_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x-t)dt=2n\int_{x-1/n}^{x+1/n}f(t)dt\simeq f(x)$$

כאשר ה"בערך שוויון" האחרון הוא בגבול כאשר $n\to\infty$, ותקף למשל אם f רציפה ב x. הרעיון בקונבולוציות שלנו הוא על פי רב "להחליק" את f, למצע את ערכיה סביב x על פי פונקציית "משקל" המגולמת על ידי g. ברור בדוגמא זו שהפונקציה $f*g_n$ רציפה לכל n. למעשה תמיד קונבולוציה יוצאת רציפה.

עוד דוגמא שרלוונטית אלינו: נזכיר $e_k(t)=e^{ikt}$, אזי

$$\left(f*e_k\right)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ik(x-t)}dt=e^{ikx}\langle f,e_k\rangle=e^{ikx}\hat{f}(k)$$

זאת אומרת שאת הסוכם ה kי בטור פורייה אפשר להציג כקונבולוציה עם המונומים הטריגונומטריים.

קונבולוציה היא כלי מאוד שימושי במתמטיקה, ויש לה תכונות נהדרות שרק את חלקן נודא כאן.

- $g*f=f*g$: אכן על ידי שינוי משתנה
  $s=x-t$, $t=x-s$, $ds=-dt$, $s(0)=x,s(2\pi)=x-2\pi$,
  $$\begin{aligned}2\pi(g*f)(x) &= \int_0^{2\pi}g(t)f(x-t)=-\int_x^{x-2\pi}g(x-s)f(s)\\ &= \int_{x-2\pi}^{x}g(x-s)f(s)ds=\int_0^{2\pi}f(s)g(x-s)ds\end{aligned}$$
  כשהשתמשנו במחזוריות על מנת להזיז את תחום האינטגרציה.
- $f*(g+h)=f*g+f*h$: קל לבדוק לפי ליניאריות האינטגרל.
- $(cf)*g=c(f*g)$: קל לבדוק לפי הגדרות ותכונות האינטגרל

- $(f*g)*h=f*(g*h)$ [לא בחומר]: נסמן לכל s קבוע את $r(t)=t-s$ ונבצע שינוי משתנה. בדרך גם החלפנו סדר אינטגרציה ללא תירוצים, אותם תוכלו לקבל בקורס חדו"א 3.

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(t)h(x-t)dt=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(s)g(t-s)ds]h(x-t)dt\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)[\int_{-\pi}^{\pi}g(t-s)h(x-t)dt]ds\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)[\int_{-\pi}^{\pi}g(r)h(x-s-r)dt]ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)[(g*h)(x-s)]ds=(f*(g*h))(x)\end{aligned}$$

- $f*g$ תמיד רציפה : בתירגול.

- $(f\hat{*}g)(n)=\hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)$[שוב לא בחומר, אך נתאר זאת השיעור]: אם נרשה החלפת סדר אינטגרציה באינטגרל כפול (מותר למשל אם כולן רציפות, ואח"כ ניתן לקרב על ידי רציפות) נקבל זאת כי

$$\begin{aligned}2\pi(f\hat{*}g)(n) &= \int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(t)e^{-int}dt=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)g(t-s)ds]e^{-int}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)g(t-s)e^{-in(t-s)}e^{-ins}dsdt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)[\int_{-\pi}^{\pi}g(t-s)e^{-in(t-s)}dt]e^{-ins}ds\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}f(s)\hat{g}(n)e^{-ins}ds=2\pi\hat{f}(n)\hat{g}(n)\end{aligned}$$

- קונבולוציה עם פולינום ממעלה n תמיד מחזירה פולניום ממעלה $\leq n$: הבה נחשב דוגמא קלה ואת המקרה הכללי תעשו באינדוקציה: נסמן $g(t)=t^2$. אזי

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(x-t)^2dt\\ &= x^2[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt]+x[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(-2t)dt]+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)t^2dt\end{aligned}$$

הרעיון הכללי בשימוש שלנו יהיה לעשות קונבולוציה עם משהו שמרוכז סביב 0 ולקבל קירוב של הפונקציה עצמה. ראינו את זה בדוגמא הראשונה, ובאופן כללי זה נעשה כך

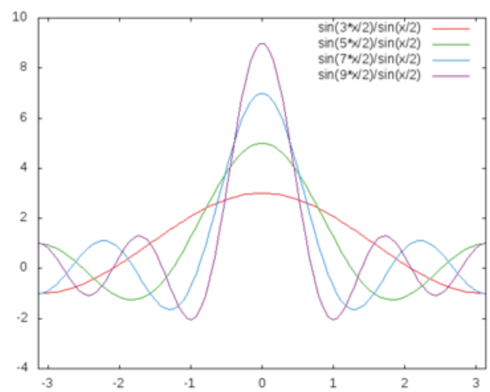
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x-t)g(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{|x|>\delta}f(x-t)g(t)dt$$

ועבור g המרוכזת היטב סביב 0 ובעלת אינטגרל כולל 1, הגורם הראשון הוא בערך $f(x)$ והגורם השני בערך 0, ל δ קטן מספיק. למשל, אפשר להוכיח את המשפט על קירוב כל פונקציה רציפה על $[-\pi,\pi]$ בעזרת פולינומים אם עושים קונבולוציה של הפונקציה עם $C_N(\sqrt{\pi}-x^2)^N$ (מנורמל להיות מאינטגרל כללי 1) כאשר N מאוד גדול. פרטים - בתירגול.

7.6.3 גרעין דיריכלה

הגדרה 7.31 נגדיר את הפונקציה המחזורית הבאה, שנקראת גרעין דיריכלה:

$$D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}=\sum_{n=-N}^{N} e_n$$



איור 25: גרעין דיריכלה

למה 7.32 [תכונותיו של גרעין דיריכלה]

1. מתקיים לכל $f\in R(\mathbb{T})$ כי $D_N*f=S_Nf$ וכן

$$\hat{D_N}(n)=\begin{cases}1 & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$$

2. לכל $y\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $|D_N(y)|\le 2N+1$
3. מתקיים $D_N(y)=\begin{cases}2N+1 & y=0\\ \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)} & y\neq 0\end{cases}$ ובפרט $D_N(y)$ זוהי פונקציה זוגית, ממשית, אך לא תמיד חיובית. כמו כן מתקיים $D_N(y)=0$ אם ורק אם $y=y_k=\frac{2\pi}{2N+1}k$ עבור $k=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N$.
4. יש לפונקציה $D_N(y)$ מינימום מקומי ב N נקודות ומקסימום מקומי ב $N+1$ נקודות (שהאחת מהן היא 0).

5. מתקיים $|D_N(y)| \le |1/\sin(y/2)|$ ובפרט $|D_N(y)| \le \pi/|y|$.
6. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)dy = 1$ (זו תכונה שמגדירה "גרעין")

הוכחה: ראינו כבר $e_n * f = \hat{f}(n)e^{int}$ ויש ליניאריות של קונבולוציה. מכאן $D_N * f = S_N f$. בנוסף מהגדרה

$$\hat{D_N}(n) = \langle D_N, e_n\rangle = \sum_{k=-N}^{N}\langle e_k, e_n\rangle = \begin{cases} 1 & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

והראינו את (1). גם (6) נובע מההגדרה כי האינטגרל המנורמל ב 2π זה פשוט $\hat{D_N}(0) = 1$. סעיף (2) נובע מאי שוויון המשולש. את הנוסחא בסעיף (3) נוכיח ישירות: (עבור $y = 0$ זו ההגדרה)

$$D_N(y) = \frac{e^{-iNy} - e^{i(N+1)y}}{1 - e^{iy}} = \frac{e^{-i(N+1/2)y} - e^{i(N+1/2)y}}{e^{-iy/2} + e^{iy/2}} = \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}$$

מכאן גם נובעות התכונות האחרות, וגם אפסיו, כאשר $(N+\frac{1}{2})y = k\pi$ עבור $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. כדי למצוא נקודות קריטיות נגזור אותו:

$$D_N'(y) = \frac{(N+1)\cos((N+1)/2)y)\sin(y/2) - \sin((N+1/2)y)\cos(y/2)}{2\sin^2(y/2)}$$

ונראה שהנגזרת מתאפסת כאשר $(N+1)\cos((N+1)/2)y)\sin(y/2) = \sin((N+1/2)y)\cos(y/2)$. עבור $y \neq 0$ זה כאשר $\cot((N+1/2)y) = \frac{1}{N+1}\cot(y/2)$ ולפי משפט ערך הביניים (ציירו את שתי הפונקציות הללו) הדבר קורה בדיוק $2N+1$ פעמים בקטע, כשספרנו גם את ההתאפסות ב־0. תכונה (5) מתקיימת מהנוסחא על ידי חסימת המונה ב־1 וה"בפרט" נובע מכך שלמשל $\sin(y/2) \ge \frac{1}{\pi}y$ בקטע $[0,\pi]$. ■

טענה 7.33 [בתירגול] $\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|dx \ggg 1$ שזה חיסרון (לא "גרעין טוב"). לא נחשב זאת בשיעור, אם כי הדבר איננו מסובך, וניתן כתרגיל מודרך בשיעורי הבית.

לסיכום, את הסכומים שחקרנו $S_N f$ אפשר להציג כקונבולוציות עם "גרעין" שמרוכז (במובן מסויים, שלא ניתחנו כאן אבל נראה במשפט הבא) סביב 0 והאינטגרל הכללי שלו הוא אחד, אבל לא מקבלים משפט התכנסות טוב במיוחד (אם כי לא רע, נראה מייד שתחת ליפשיץ מקומי וכולי הכל עובד) משום שהגרעין איננו חיובי ומשום שהאינטגרל של הערך המוחלט של הגרעין גדל ומתבדר כאשר N גדל.

7.6.4 התכנסות נקודתית תחת ליפשיץ מקומי

משפט 7.34 תהי $f \in R(\mathbb{T})$ ותהי $x_0 \in \mathbb{T}$ ונניח ש f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי בx_0 זאת אומרת שקיים $\delta > 0$ וקיים M כך שלכל $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ מתקיים $|f(x) - f(x_0)| \le M|x - x_0|$. אזי מתקיים

$$S_N f(x_0) \to_{N\to\infty} f(x_0)$$

בפרט, אם f גזירה ברציפות בסביבת x_0, אז יש התכנסות נקודתית של $S_N f$ ל f.

הערה 7.35

הוכחה: נחשב

$$\begin{aligned}
(S_Nf)(x_0)-f(x_0) &= (D_N*f)(x_0)-f(x_0)= \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]D_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]\frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]\frac{\sin(Nt)\cos(t/2)+\sin(t/2)\cos(Nt)}{\sin(t/2)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left([f(x_0-t)-f(x_0)]\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\right)\sin(Nt)dt \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]\cos(Nt)dt
\end{aligned}$$

שני הביטויים הם מהצורה של מקדמי פורייה לפונקציות שונות. אכן, נסמן את הראשונה

$$h_1(t)=[f(x_0-t)-f(x_0)]\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$$

ואת השניה

$$h_2(t)=[f(x_0-t)-f(x_0)]$$

נקבל כי

$$.(S_Nf)(x_0)-f(x_0)=\left(\hat{h_1}(-N)-\hat{h_1}(N)\right)/2+\left(\hat{h_2}(N)+\hat{h_2}(-N)\right)/2$$

נתחיל ב־h_2שהיא פשוט הזזה ושיקוף של f, בפרט היא אינטגרבילית ולכן מקדמי פורייה שלה על פי רימן לבג שואפים לאפס. לגבי h_1, על פי ההנחות שלנו היא חסומה עבור $t\neq 0$ (באפס היא מוגדרת להיות 0 כי הגרעין מוגדר להיות $(2N+1)$ ואילו הכופל שלו מתאפס). אכן

$$|[f(x_0-t)-f(x_0)]\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}|\le|\frac{[f(x_0-t)-f(x_0)]}{t}||\frac{t}{\tan(t/2)}|\le M\pi$$

ומכאן זוהי פונקציה אינטגרבילית ושוב על פי רימן לבג, מקדמי פורייה שלה שואפים לאפס. ■

7.6.5 גרעין פייר

הגדרה 7.36 תהי $f\in R(\mathbb{T})$ נגדיר את סכומי פייר שלה להיות ממוצעי צזארו של פולינומי פורייה שלה

$$(\sigma_Nf)(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_nf(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

ואת גרעין פייר להיות

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(y)$$

למה 7.37 [תכונות ראשונות של גרעין פייר] מתקיים

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2})y)}{\sin(y/2)}\right)^2$$

ובפרט הוא חיובי (וממשי). מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} F_N = 2\pi$, וכן עבור $f \in R(\mathbb{T})$ מתקיים $\sigma_N f = f * F_N$. בנוסף,

$$\hat{F_N}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & n \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

הוכחה: האינטגרל הכולל נובע מלינאריות האינטגרל ומהתכונה המקבילה לגרעין דיריכלה. ההוכחה של המקדמים והנוסחא היא חישוב. אכן לפי הגדרה

$$\begin{aligned} F_N(y) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky} \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{m=-N}^{N} e^{imy}\#\{k \in [0,N] : m \in [-k,k]\} \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{m=-N}^{N} e^{imy}(N+1-|m|) = \sum_{m=-N}^{N} e^{imy}(1-\frac{|m|}{N+1}) \end{aligned}$$

ומכאן מקדמי פורייה שלו הם כפי שנטען. מצד שני אם נכפול ונשנה אינדקסים $m = k - N$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{N} e^{iky}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{2N}(N+1-|k-N|)e^{iky} = \sum_{m=-N}^{N}(N+1-|m|)e^{i(m+N)y} \\ &= e^{iNy}(N+1)F_N(y) \end{aligned}$$

נקבל, אחרי סכימת טור הנדסי,

$$\begin{aligned} F_N(y) &= \frac{1}{N+1}e^{-iNy}\left(\frac{1-e^{i(N+1)y}}{1-e^{iy}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{e^{-i(N+1)y/2}-e^{i(N+1)y/2}}{e^{-iy/2}-e^{iy/2}}\right)^2 = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}y)}{\sin(\frac{1}{2}y)}\right)^2 \end{aligned}$$

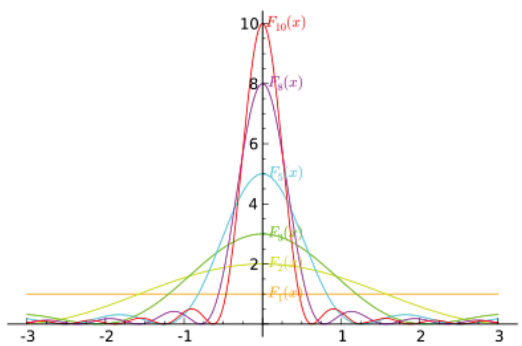
כפי שטענו. לבסוף, קונבולוציה היא דבר לינארי ולכן

$$f * F_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f * D_n = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f$$

את הסכימה של הגרעין אפשר לעשות גם בדרך נוספת

$$\begin{aligned}
F_N(y) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky} \\
&= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-iny}-e^{i(n+1)y}}{1-e^{iy}} \\
&= \frac{1}{N+1}\frac{1}{1-e^{iy}}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(e^{-iy}\right)^n - \sum_{n=1}^{N+1}(e^{iy})^n\right] \\
&= \frac{1}{N+1}\frac{1}{1-e^{iy}}\left[\frac{1-e^{-iy(N+1)}}{1-e^{-iy}} - \frac{e^{iy}-e^{iy(N+2)}}{1-e^{iy}}\right] \\
&= \frac{1}{N+1}\frac{1}{1-e^{iy}}\left[\frac{1-e^{-iy(N+1)}}{1-e^{-iy}} + \frac{1-e^{iy(N+1)}}{1-e^{-iy}}\right] \\
&= \frac{1}{N+1}\frac{-1}{(e^{-iy/2}-e^{iy/2})^2}[2-e^{-iy(N+1)}-e^{-iy(N+1)}] \\
&= \frac{1}{N+1}\frac{[e^{iy(N+1)/2}-e^{-iy(N+1)/2}]^2}{(e^{-iy/2}-e^{iy/2})^2}
\end{aligned}$$

■



איור 26: גרעין פייר

למה 7.38 [תכונה חשובה של גרעין דיריכלה] לכל $\delta > 0$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $N \geq N_0$ מתקיים

$$\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x)dx + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x)dx \leq \varepsilon$$

או באופן שקול $\int_{-\delta}^{\delta} F_N(x)dx \geq 2\pi - \varepsilon$

הוכחה: מהלמה הקודמת נובע

$$F_N(x) \le \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2(x/2)}$$

ולכן על הקטעים $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ מתקיים

$$F_N(x) \le \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$$

ובפרט F_N שואפת במ"ש לאפס בקטעים אלה. כל שנותר הוא לבחור את N_0 כך ש $N_0+1 \ge 2\pi\frac{1}{\varepsilon\sin^2(\delta/2)}$.

■

כמסקנה נקבל את המשפט המרכזי הבא של פייר:

משפט 7.39 [פייר] תהי $f\in C(\mathbb{T})$, אזי $\sigma_N f \xrightarrow{u} f$.

הוכחה: משום ש f רציפה היא גם רציפה במ"ש. נניח שחסומה על ידי M. יהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. נבחר את N_0 כך שלכל $N\ge N_0$

$$\int_{-\pi}^{-\delta}F_N(x)dx+\int_{\delta}^{\pi}F_N(x)dx \le \varepsilon/M$$

ואז יתקיים לכל $x\in\mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
|\sigma_N f(x)-f(x)| &= |F_N * f - f| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(y)[f(x-y)-f(x)]dy| \\
&\le |\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_N(y)[\varepsilon/2]dy| + \frac{2M}{2\pi}[\int_{-\pi}^{-\delta}F_N(y)+\int_{\delta}^{\pi}F_N(y)dy] \\
&\le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon
\end{aligned}$$

כרצוי. ■

באופן דומה ניתן להראות, אם כי לא נבצע זאת בשיעור משיקולי זמן, כי

משפט 7.40 [פייר] תהי $f\in R(\mathbb{T})$, אזי בכל נקודה בה f רציפה מימין ומשמאל מתקיים $\sigma_N f(x)\to \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. בפרט יש שאיפה נקודתית ל f בכל נקודת רציפות.

הוכחה: משום ש f אינטגרבילית היא חסומה על ידי נאמר M. יהי $x\in\mathbb{T}$ עבורו קיימים הגבולות החד צדדיים. יהי $\varepsilon>0$ אזי מקיום הגבולות נובע שקיים $\delta>0$ כך שאם $x<y<x+\delta$ אז $|f(x^+)-f(y)|<\varepsilon/2$ ובדומה אם $x-\delta<y<x$ מתקיים $|f(x^-)-f(y)|<\varepsilon/2$. נבחר את N_0 כך שלכל $N\ge N_0$

$$\int_{-\pi}^{-\delta}F_N(x)dx+\int_{\delta}^{\pi}F_N(x)dx \le \varepsilon/4M$$

ואז יתקיים עבור x שלנו

$$\begin{aligned}|\sigma_N f(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}| &\le |\int_{-\pi}^{0} F_N(y)[f(x-y) - \frac{f(x^+)}{2}]dy| \\ &\quad +|\int_{0}^{\pi} F_N(y)[f(x-y) - \frac{f(x^-)}{2}]dy| \\ &\le |\int_{-\delta}^{\delta} F_N(y)[\varepsilon/2]dy| + 2M[\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(y) + \int_{\delta}^{\pi} F_N(y)dy] \\ &\le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

והסתיימה ההוכחה. ■

הערות 7.41 [בתירגול] ההוכחה תקפה עבור גרעין פייר, אבל למעשה עבור גרעין כללי שמקיים את התכונות של חיוביות, של אינטגרל כללי אחד ושל שאיפה במ"ש לאפס על כל קטע סגור שלא מכיל את הראשית. למשל, כזה הוא גרעין פואסון הנתון על ידי

$$P_r(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{iny} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(y)+r^2}$$

אכן,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(re^{it}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (re^{-it})^n = \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} = \frac{1-r^2}{1-r[e^{-it}+e^{it}]+r^2}$$

קל לחשב כי

$$(f*P_r)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} r^{|n|}$$

ולכן

$$\lim_{r\to 0^+} (F*P_r)(x) = (A)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

וגם לא קשה לבדוק שהגרעין הזה הוא גרעין "טוב".

מסקנה 7.42 תהי $f\in R(\mathbb{T})$ עם גבולות חד צדדיים ב x ונניח ש $S_N f(x)\to c$. אזי $c=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

הוכחה: מכך שהסדרה מתכנסת נובע שגם סדרת הממוצעים שלה מתכנסת לאותו c, אך ממשפט פייר אנו יודעים כעת מהו c. ■

מסקנה 7.43 הפולינומים הטריגונומטריים $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ צפופים במ"ש ב $C(\mathbb{T})$.

הוכחה: תהי $f\in C(\mathbb{T})$, אזי $\sigma_N f \overset{u}{\to} f$ ואך $\sigma_N f$ הוא פולינום טריגונומטרי לכל N. ■

מסקנה 7.44 [יחידות] תהינה $f,g\in C(\mathbb{T})$ ונניח שלכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\hat{f}(n)=\hat{g}(n)$. אזי $f=g$.

הוכחה: $f\overset{u}{\to}\sigma_N f=\sigma_N g\overset{u}{\leftarrow} g$ וחסל. ■

שני חישובים אחרונים לפני שנסיים את הפרק.

טענה 7.45

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

הוכחה:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}dt=$$

$$= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((N+1/2)t)}{(t/2)}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((N+1/2)t)[\frac{1}{\sin(t/2)}-\frac{1}{t/2}]dt$$

כעת נעשה לאינטגרל הראשון שינוי משתנה $s=(N+1/2)t$ ונקבל $\frac{dt}{t/2}=\frac{ds}{s/2}$ ולכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((N+1/2)t)}{(t/2)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-(N+1/2)\pi}^{(N+1/2)\pi}\frac{\sin(s)}{s/2}ds=\frac{1}{\pi}\int_{-(N+1/2)\pi}^{(N+1/2)\pi}\frac{\sin(s)}{s}ds$$

כך שבגבול $N\to\infty$ נקבל כפולה של האינטגרל אותו רצינו לחשב. באשר לאינטגרל השני נשים לב שהגורם בסוגריים המרובעים כפונקציה של t מתנהג לא רע. נסמן

$$h(t)=[\frac{1}{\sin(t/2)}-\frac{1}{t/2}]$$

רואים שהוא מסדר גודל

$$h(t)=[\frac{t/2-\sin(t/2)}{\sin(t/2)t/2}]=[\frac{t^3/48+O(t^5)}{t^2/4+O(t^4)}]=t/12+O(t^2)$$

ובפרט הוא פונקציה אינטגרבילית (רציפה - למעט נקודת אי הגדרה אחת - וחסומה) ולכן האנטגרל הרלוונטי שלה שואף לאפס. זה נובע מרימן לבג על אף שמדובר ב $\sin(N+1/2)x$ שהוא לא באמת מקדם פורייה, וזה משום שאפשר לפתוח אותו ולקבל (עד כדי כפל בעוד שתי פונקציות רציפות) את הביטוי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((N+1/2)t)h(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(Nt)h(t)\cos(t/2)+h(t)\sin(t/2)\cos(Nt)dt$$

כעת נציב ונקבל בגבול כאשר $N\to\infty$ כי

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(s)}{s}ds=1$$

כרצוי. ■

טענה 7.46 יהי $\alpha \notin \mathbb{Z}$ אזי

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$$

הוכחה: נחשב את טור פורייה של $f(x) = e^{i(\pi-t)\alpha}$. נקבל

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\pi\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+\alpha)t} dt = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\pi} [\frac{e^{-i(n+\alpha)t}}{-i(n+\alpha)}]_0^{2\pi} \\ &= e^{i\pi\alpha} \frac{i}{2\pi(n+\alpha)} [1 - e^{-2\pi i\alpha}] = \frac{i}{2\pi(n+\alpha)} \sin(\pi\alpha) \end{aligned}$$

כעת נשתמש בשוויון פרסבל ונקבל

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\pi^2(n+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1$$

וחסל. ■

הערה 7.47 ישנם דברים רבים שלא נלמד אם כי יכלו להיות בחומר: לדוגמא תופעת גיבס - כשאין רציפות אך יש גבולות חד צדדיים, מובן שלא תיתכן התכנסות במ"ש (נאמר על הקטע הפתוח שאינו מכיל את הנקודה הבעייתית), זאת אומרת שמתקיימת השלילה שלה, דהיינו קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיימת x עם $|S_N f(x) - f(x)| > \varepsilon$. לא קשה להשתכנע שלמשל אם הפונקציה גזירה למקוטעין אז זה אותו ε לכל הפונקציות הללו (אותו יחס מהקפיצה) כי שתיים שונות ניתן לקחת הפרש שיתאפס על פי ליפשיץ מקומית או קריטריון אחר. לכן אפשר לחשב אותו על פונקציה ספציפית - נאמר מדרגה. ובאמת מתקבל בערך 0.09 מהקפיצה בכל צד.

סוף שיעור 17

7.7 רקע - מה פתאום טורי פורייה? [לא בחומר]

המשוואה, עבור $y : [0,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$, שמתארת תנועה של מיתר:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

מיתר מתנועע עם קצוות קבועים. מתקבל על ידי שימוש בחוקי ניוטון לשרשרת עם n חרוזים ואז $n \to \infty$ והמאסה הכוללת קבועה. (הקבוע c הוא $\sqrt{T/M}$ כאשר T הוא המתח). בידקו שהפונקציה הבאה היא פתרון

$$y(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$

כאשר f איזוגית ובעלת מחזור 2. כיוון שיש צורך בגזירות פעמיים של y על מנת להגדיר את המשוואה, נראה שתנאי ההתחלה צריך להיות גזיר פעמיים גם הוא, וזה קצת חבל אם רוצים לנגן מה שנקרא "פיציקאטו". ברנולי חשב על מיתרים, על טונים ואוברטונים, והציע פתרון כללי מהצורה (כאן אורך המיתר הוא l)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \cos(\frac{n\pi ct}{l})$$

ואז בזמן 0 כמובן מתקבלת הפונקציה

$$y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

אוילר, שהיה אולי המתמטקאי החשוב של המאה ה18, אמר שאין מצב שזו צורה כללית של תנאי התחלה, ושזה יהיה פתרון של מקרה מאוד פרטי (שהוא כבר חשב עליו בעבר), ודלאמבר הסכים איתו ואמר שפונקציות כאלה תמיד תצאנה גזירות למשל.

אז הגיע תורו של פורייה. הוא דווקא עבד על משוואת החום. בכלל הוא התעניין בפיזור של חום (כדה"א כולו גם) הוא היה זה שהטביע את השם "אפקט החממה". הוא התייחס לפלטה חצי אינסופית ברוחב 1, נאמר שמרכזה על ציר x החיובי, וערכי y שלה רצים ב $[-1,1]$. ששפה אחת שלה (השפה הסופית, $\{0\} \times [-1,1]$) בטמפרטורה קבועה 1 ושאר השפה שלה בטמפרטורה קבועה 0, (זו אי רציפות קטנטונת בפינה) . הוא רצה לדעת מה המצב היציב שבו הטמפרטורה מפולגת כך שאיננה משתנה בזמן. המשוואה שקיבל היא

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

על מנת לפתור אותה הוא עשה הפרדת משתנים, $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, וקיבל משוואות

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} = -\frac{\psi(y)}{\psi''(y)} = A$$

והפתרונות שקיבל עם תנאי השפה הללו הם כמובן

$$u(x,y) = e^{nx}\cos(ny)$$

כאשר $A = \frac{1}{n^2}$. לכן גם כל קומבינציה ליניארית שלהם תתן פתרון. כדי לפתור עם תנאי ההתחלה שלו הוא היה צריך לרשום את הפונקציה הקבועה 1 כטור

$$1 = a_1\cos\frac{\pi y}{2} + a_2\cos\frac{3\pi y}{2} + a_3\cos\frac{5\pi y}{2} + a_1\cos\frac{7\pi y}{2} + \cdots$$

וזה אמור להיות תקף לכל $y \in [-1,1]$. הוא היה צריך לפתור משוואה כזו עם אינסוף משתנים. הוא עשה זאת על ידי גזירה הרבה פעמים. (כיצד אתם יכולים לעשות זאת כעת?). הוא הסביר לאן הפונקציה מתכנסת לשאר ה yים (חישבו לאן?).

הוא חישב את "טור פורייה" לעוד תנאי התחלה, משפחות שלמות להן אוילר אמר שלא יוכל להימצא פירוק כטור טריגונומטרי. ואז פנה למקרה הכללי והראה דברים רבים שתקפים גם עליו (למה התכוונו ב"פונקציה כללית" אז גם אפשר לדון, לא הייתה ההגדרה של "התאמה" כמו היום, זו היתה הצעה של דיריכלה ב־1837).

לורד קלווין: בנה מכונה לחזות גאות ושפל בעזרת חישוב מקדמי פורייה של הפונקציה $h(t)$, הגובה בזמן t (נקרא "אנליזטור הרמוני").

מיכלסון בנה מכונה כזו, וכדי לבדוק אותה הכניס לתוכה את 80 מקדמי פורייה הראשונים של פונקציית המסור. להפתעתו הוא קיבל מסור כמעט מדוייק אבל ליד אי הרציפות היו בליטות, שגובהן כ 18% מהקפיצה. כשהוסיף מקדמים המשיך לקבל בליטות צרות יותר ויותר אך באותו גובה. גיבס הוא זה שהסביר תופעה זו (שנובעת כפי שהסברנו מכך שאין התכנסות במ"ש). זה נקרא "אובר־שוט" (overshoot) וחשוב מאוד היום לחישובים, אם כי כשזה התגלה עוד לא היה כזה כוח חישוב ולכן נחשב לקוריוז.

המרתף של פורייה: באיזה עומק לבנות מרתף כך שהפרשי הטמפרטורה בו יהיו לא יותר מחמש מעלות בין החורף לקיץ? גם את זה פותרים עם פורייה ויש גם "פאזה" כך שבעומק של 4.5 מטרים החורף והקייץ מתחלפים (כמו שהמים בים התיכון שלנו חמים ביותר בספטמבר דווקא ולא ביולי אוגוסט) ויש דעיכה של ההפרש (האמפליטודה) של בערך 1:16. בשביל בכלל לחוש בהבדל (נאמר 1:16) בין יום ללילה המרתף צירך להיות בעומק $23cm$ בלבד (skin effect).

אם כבר בחישוב עסקינן ־ יש מושג דומה של טרנספורם פורייה דיסקרטי שהוא זה שמשתמשים בו כיום ברוב המערכות.

יש נושא של כיצד לחשב אותו מהר ־ חישוב בסדר גודל $N\log N$ במקום N^2 בעזרת טריק של Colley and Tuckey ממעבדות IBM שנת 1965 שלאחר מכן הסתבר שגאוס בכלל המציא אותו והשתמש בו על מנת לנבא את מיקומו של האסטרואיד $Ceres$ בשנת 1801. ועוד ועוד ועוד.

ג. פונקציות בכמה משתנים

8 טופולוגיה של $\mathbb{R}^n$

8.1 מבנה כללי

אנחנו מדברים על המרחב $\mathbb{R}^n$ שהוא מרחב וקטורי. יש לנו את כל הכלים של אלגברה ליניארית - מעברי בסיס וכדומה, אז נקבע לנו את הבסיס הסטנדרטי ונעבוד עם קואורדינטות, $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ כאשר $e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$. חיבור וכפל בסקלר מוגדים באופן טבעי וניתן לבצע אותם קואורדינטה קואורדינטה

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \;\; \lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

בפרק זה נדון בפונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא $\mathbb{R}^n$ או תת קבוצה שלו, בשונה ממה שעשינו עד עכשיו שם דנו בעצם במקרה $n = 1$. כאשר הטווח של הפונקציה הוא $\mathbb{R}$, נאמר שמדובר בפונקציה ממשית $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ או $f : A \to \mathbb{R}$ כש $A \subset \mathbb{R}^n$. מושג כללי יותר הוא של פונקציה וקטורית, דהיינו

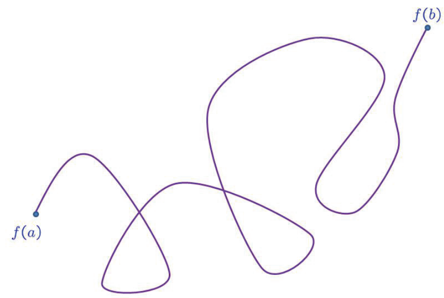
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

או כשהתחום הוא $A \subset \mathbb{R}^n$. אתם מכירים דוגמא מאוד חשובה של פונקציות כאלה: פונקציות ליניאריות (המיוצגות למשל על ידי מטריצה). כדאי כבר לשים לב שפונקציה כזו היא בסך הכל m־יה של פונקציות ממשיות

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \qquad f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

כך שלהרבה צרכים יספיק לנו לחקור את המקרה הפרטי $m = 1$. לעיתים נוח לכתוב דווקא את f כווקטור עמודה, או באופן שקול כ $(f_1(x), \dots, f_m(x))^T$.

יש מקרה נוסף דומה שנדון בו והוא כאשר $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. למשל אם מזהים את $\mathbb{C}$ עם $\mathbb{R}^2$ אז אפשר לחשוב על הפונקציות עם הערכים המרוכבים מפרק ב כעל פונקציות מסוג זה. אם מדובר על פונקציה f כזו רציפה (וטרם הגדרנו מה זה אומר רציפה לתוך $\mathbb{R}^m$, אם כי תוכלו לנחש מה ההגדרה) נאמר שזו "מסילה", "עקומה" (או "עקם") ונצייר משהו כזה



איור 27: למי קראת עקומה?

8.2 מרחק

את המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$ מסמנים

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

והיא לא משתנה תחת שינוי בסיס אורתונורמלי. היא מקיימת את כל התכונות הטובות של ממ"פ, שהן

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle$
3. $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,$\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 1$ אם ורק אם $x = 0$.

מייצרים בעזרתה את פונקציית הנורמה על $\mathbb{R}^n$ המוגדרת להיות

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

שמקיימת

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ההוכחה למשל מהעלאה בריבוע ואז אי שוויון קושי שוורץ שנראה מייד)

וכן מתקיים אי שוויון קושי שוורץ

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$$

כדי להוכיח אותו אפשר או להעלות בריבוע ולפתוח סוגריים, או להעביר קצת אגפים באי השוויון

$$\langle x-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y, x-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y\rangle \ge 0$$

או לכתוב שהדיסקרימיננטה של הביטוי הריבועי ב λ:

$$Q(\lambda)=\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle$$

חייבת להיות אי חיובית שכן אין לו ערכים שליליים.

בעזרת הנורמה מגדירים מרחק בין שני וקטורים ב $\mathbb{R}^n$ על ידי

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

והוא מקיים את האקסיומות של להיות מרחק (אבל הוא גם הומוגני שזה יתרון על פני פונקציית מרחק כללית)

1. $d(x,y)\ge 0$, $d(x,y)=0$ אם ורק אם $x=y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (אי שוויון המשולש)

נשים לב שנובע מייד גם אי שוויון המשולש "ההפוך" הבא

$$d(x,y)\ge d(x,z)-d(y,z)$$

ושניהם יחד שימושיים מאוד. (בכך שאומרים שאם z קרוב ל y אז לכל x שלא קרוב מידי לשניהם, המרחק $d(x,y)$ דומה למרחק $d(x,z)$)

אי השוויון הבא יהיה לנו שימושי

למה 8.1 מתקים לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ ולכל $j\in[1,\dots,n]$

$$|x_j-y_j|\le\|x-y\|\le\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|\le\sqrt{n}\|x-y\|$$

הוכחה: שני האי שוויונים השמאליים נובעים מיידית על ידי העלאה בריבוע של כל האגפים. אי השוויון הימני ביותר נובע מקושי שוורץ על הוקטורים $z=x-y$ והווקטור w הנתון על ידי

$$w_i=\begin{cases}1 & x_i\ge y_i\\ -1 & x_i<y_i\end{cases}$$

שכן אורכו $\sqrt{n}$ ואילו המכפלה שלו עם z נותנת את הביטוי השני מימין. ■

מסקנה 8.2 תהינה סדרות $x_i^{(m)} \in \mathbb{R}$ כאשר $i = 1, \dots n$ ואילו $m \in \mathbb{N}$ ונסמן $x_m = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in$ $\mathbb{R}^n$. אזי מתקיים $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = y_i$ לכל i אם ורק אם עבור $y = (y_1, \dots, y_n)$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m - y\| = 0$$

הוכחה: אכן, נניח ש $\lim_{m\to\infty} \|x_m - y\| = 0$ אז משום ש $|x_i^{(m)} - y_i| \le \|x_m - y\|$ נובע גם $\lim_{m\to\infty} |x_i^{(m)} - y_i| = 0$ כרצוי. להפך, אם לכל i מתקיים $\lim_{m\to\infty} |x_i^{(m)} - y_i| = 0$ אז גם $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n |x_i^{(m)} - y_i| = 0$ ולכן על פי השוואת סדרות חיוביות (סנדוויץ) גם $\lim_{m\to\infty} \|x_m - y\| = 0$.
■

הערה 8.3 למעשה כל שתי נורמות המוגדרות על $\mathbb{R}^n$ הן שקולות במובן שקיימים שני קבועים כך ש

$$c_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le c_2\|x\|_2$$

, דבר שניתן להוכיח אך עוד אין לנו הכלים. הביטוי $\sum_{i=1}^n |w_i|$ גם הוא נורמה על $\mathbb{R}^n$.

בשלב זה אנו כבר יכולים להתחיל לעשות קצת חדו"א, לדבר על גבולות של סדרות, להגדיר ש $x_m \to y$ אם $\|x_m - y\| = 0$ וכולי. אנחנו נמתין עם זה קצת מהסיבה הבאה: כשנרצה לדבר על רציפות, נרצה גם קריטריוני ε/δ ולא רק "רציפות סדרתית", ובשביל זה צריך לדעת מה האנלוג של "קטע פתוח" או "סביבת אפסילון" של נקודה, במקרה הרב מימדי.

8.3 קבוצה פתוחה, פנים

הגדרה 8.4 [כדור פתוח, כדור סגור וספירה] תהיה $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ו $r > 0$ נגדיר כדור פתוח סביב x_0 מרדיוס r כך

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

כדור סגור יוגדר $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le r\}$ וספירה מרדיוס r סביב x_0 תוגדר כך

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\} = \overline{B}(x_0, r) \setminus B(x_0, r)$$

הגדרה 8.5 [נקודה פנימית, פנים, קבוצה פתוחה] תהי $A \in \mathbb{R}^n$ ונקודה $x_0 \in A$. נאמר שהיא נקודה פנימית של A אם קיים $r > 0$ כך ש $B(x_0, r) \subset A$. אוסף כל הנקודות הפנימיות של A נקרא ה"פנים" שלה, ומסומן $int(A)$. קבוצה נקראת "פתוחה" אם $A = int(A)$ או, באופן שקול, אם לכל $x_0 \in A$ קיים כדור קטן $B(x_0, r)$ שכולו בתוך A. כמובן $int(A) \subset A$.

לדוגמא, כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה, שכן אם $y_0 \in B(x_0,r)$ אז $|y_0 - x_0| = s < r$ ואם נבחר את $\varepsilon = r - s$ אז $B(y_0,\varepsilon) \subset B(x_0,r)$. אכן, לכל $z \in B(y_0,\varepsilon)$ מתקיים

$$\|z - x_0\| \le \|z - y_0\| + \|y_0 - x_0\| < \varepsilon + s = r$$

כרצוי. דוגמא זו חשובה שכן היא מראה ש $int(A)$ בעצמה תמיד פתוחה, כי כל נקודה בה מוכלת בכדור פתוח סביבה (נאמר מרדיוס r) שכולו ב A, ולכן לכל נקודה בכדור זה יש כדור (קטן יותר) סביבה שכולו ב A ולכן הכדור $B(x_0,r)$ כולו בעצם נמצא ב $int(A)$. קיבלנו את העובדה הבאה

למה 8.6 לכל $A \subset \mathbb{R}^n$ מתקיים $int(int(A)) = int(A)$.

הערה 8.7 אפשר להגדיר "פתוחה" עם קבוצה אחרת, למשל קוביה, במקום כדור. קוביה זו קבוצה מהצורה

$$Q(x_0,r) = \{x : |x_i - (x_0)_i| < r \ \forall i = 1,\dots,n\}$$

ומשום שמתקיים (בידקו) $B(x_0,r) \subset Q(x_0,r) \subset \sqrt{n}B(x_0,r)$, להיות "פתוחה לפי קוביות" או "פתוחה לפי כדורים" זה בדיוק אותו הדבר. כדורים מעט יותר נוחים לנו כי הם כל כך סימטריים (לא אכפת להם משינוי קואורדינטות אורתונורמלי).

משפט 8.8 (1) איחוד של קבוצות פתוחות הוא פתוח.

(2) חיתוך של מספר סופי של פתוחות הוא פתוח

(3) $\emptyset$ ו $\mathbb{R}^n$ הן פתוחות

הוכחה: מיידי לפי ההגדרות, כשב(2) נבחר את הרדיוס המינימלי מבין מספר סופי. ■

נשים לב ש (2) לא נכון עבור חיתוך אינסופי, ניתן בקלות לבנות חיתוך אינסופי של פתוחות שאיננו פתוח, למשל $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

טענה 8.9 תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ אזי

$$int(A) = \cup A'$$

כאשר האיחוד הוא על פני כל $A' \subset A$ כך ש A' פתוחה.

הוכחה: אגף ימין מוכל כמובן באגף שמאל שכן כל $A' \subset A$ שהיא פתוחה מקיימת שכל נקודה בה היא בפנים של A' ובפרט בפנים של A. לכן גם האיחוד כולו מוכל. מצד שני $int(A)$ בעצמה היא קבוצה פתוחה ולכן משתתפת באיחוד, כך שאגף שמאל מוכל באגף ימין וסיימנו. ■

באופן דומה קל להראות (בתרגיל) שכל קבוצה פתוחה ניתן לכתוב כאיחוד של כדורים, וגם, לכל r_0, כאיחוד של כדורים מרדיוסים קטנים מ r_0. (איננו טוענים כמובן שהאיחוד הוא של מספר סופי של כדורים, אם כי לא קשה להראות שניתן לכתוב אותה כאיחוד בן מניה של כדורים).

8.4 קבוצה סגורה, סגור

הגדרה 8.10 נאמר ש $A \subset \mathbb{R}^n$ היא סגורה אם $\mathbb{R}^n \setminus A$ היא קבוצה פתוחה.

לדוגמא בידקו שכדור סגור הוא אכן קבוצה סגורה, וגם ספירה היא קבוצה סגורה. גם ה"אלכסון"

$$D = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

קבוצה סגורה. כל קבוצה סופית היא גם סגורה. נעיר שישנן (המון) קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

ההגדרה לעיל של "סגירות" היא לא בהכרח ההגדרה שתמצאו בספרות, ואותה נביא כמשפט ממש מיד. לשם כך עלינו להגדיר

הגדרה 8.11 [נקודת סגור, סגור] תהי $A \in \mathbb{R}^n$ ונקודה $x_0 \in \mathbb{R}^n$. נאמר שהיא נקודת סגור של A אם לכל $r > 0$ מתקיים

$$B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$$

ונסמן $\overline{A}$ את אוסף כל נקודות הסגור של A. מתקיים כמובן $A \subset \overline{A}$.

לדוגמא, קל לוודא ש $\overline{B(x_0,r)} = \overline{B}(x_0,r)$. כיוון שכבר הגדרנו מעלה מהי קבוצה סגורה, התכונה שלקבוצה סגורה $A = \overline{A}$ היא כבר משפט

משפט 8.12 $A \subset \mathbb{R}^n$ היא סגורה אם ורק אם $A = \overline{A}$.

הוכחה: נניח ש A סגורה ותהי $x \in \overline{A}$. נניח בשלילה ש $A \notin x$ אז $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ואז יש כדור שלם $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ ולכן $B(x,r) \cap A = \emptyset$ בסתירה להנחה. כעת נניח ש $A = \overline{A}$ ונראה ש $\mathbb{R}^n \setminus A$ פתוחה. אכן, כל $x \notin A$ מקיימת $x \notin \overline{A}$ זאת אומרת יש כדור כך ש $B(x,r) \cap A = \emptyset$ וזאת אומרת $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ כרצוי. ■

למה 8.13 תהי $A \in \mathbb{R}^n$ אזי $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus int(\mathbb{R}^n \setminus A)$ וכן $int(A) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$

הוכחה: בתרגיל. ■

כמובן שבקרוב נאמר שנקודות סגור הן גבולות של סדרות של אברים ב A.

8.5 שפה

הגדרה 8.14 [שפה] תהי $A \in \mathbb{R}^n$ ונגדיר

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \overline{A} \setminus int(A)$$

כאשר השיוויון מתקיים בגלל הלמה שציטטנו כרגע.

זאת אומרת שבכל סביבה של A יש הן נקודה מ-A והן נקודה מ $\mathbb{R}^n \setminus A$. דוגמאות: האלכסון ב $\mathbb{R}^2$ הוא השפה של עצמו (כך גם כל קבוצה סגורה ללא פנים). הספירה היא השפה של הכדור $\partial(B(x_0,r)) = S(x_0,r)$. השפה של אינטרואל ב $\mathbb{R}$ היא שתי נקודות $\partial[a,b] = \{a\} \cup \{b\}$. נשים לב שכששולאים מהי השפה של קבוצה, מאוד חשוב לציין מהו "העולם" ביחס אליו לוקחים "פנים", כי למשל אם לוקחים שתי נקודות $a,b \in \mathbb{R}^n$ עבור $n > 1$ ומגדירים את הקטע $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b : \lambda \in [0,1]\}$, אז כתת קבוצה של $\mathbb{R}^n$ יתקיים $\partial[a,b] = [a,b]$ בשונה מהמקרה החד מימדי.

8.6 קבוצה קמורה וקבוצה קשירה פוליגונלית

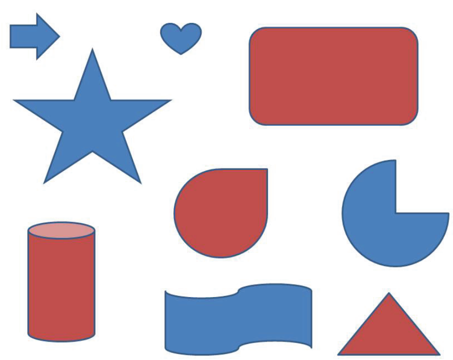
נסמן עבור $x,y \in \mathbb{R}^n$ את הקטע המחבר אותן

$$[x,y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\}$$

נשים לב שאפשר לחשוב על הקטע גם כעל התמונה של הפונקציה הפשוטה הבאה: $f:[0,1] \to \mathbb{R}^n$, המוגדרת על ידי $f(t) = (1-t)x + ty$.

הגדרה 8.15 קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת קמורה אם לכל $x,y \in A$ גם $[x,y] \subset A$.

למשל, כדור הוא קמור אבל ספירה לא. האדומות קמורות (כל אחת בנפרד, האיחוד של שתיים כבר לא), הכחולות לא קמורות.



איור 28: מי מאיתנו קמור ומי לא?

הגדרה 8.16 [קו פוליגונלי] בהנתן שתי נקודות $x,y \in \mathbb{R}^n$ נגדיר קו פוליגונלי המחבר אותן: יהיו (הקדקדים) $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_{N-1}$, $x_N = y$, ונגדיר את

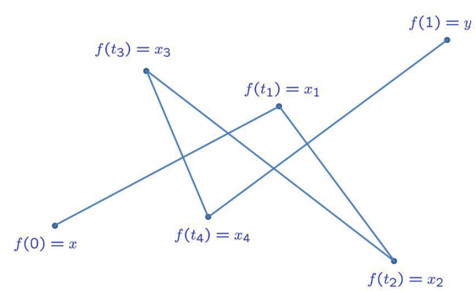
$$\Gamma = \cup_{i=1}^{N}[x_{i-1}, x_i]$$

נעיר גם שיש דרך שימושית לבנות העתקה ש Γ הוא התמונה שלה. נביט בפונקציה $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת באופן הבא. בוחרים $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$ חלוקה של הקטע ואז

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} x_i + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} x_{i+1} & t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

הקו הפוליגונלי עצמו מוגדר להיות $\gamma([0,1])$ זאת אומרת התמונה של γ כתת קבוצה של $\mathbb{R}^n$.

זאת אומרת שבקטע ה"זמן" $[t_i, t_{i+1}]$ הפונקציה עוברת על הקטע $[x_i, x_{i+1}]$. אפילו שעוד לא הגדרנו רציפות, קל להשתכנע שההגדרה שנתנו משרטטת קו ללא "קפיצות" ב $\mathbb{R}^n$. משהו כזה למשל



איור 29: קו פוליגונלי

הגדרה 8.17 [קבוצה קשירה פוליגונלית] נאמר שקבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ היא קשירה פוליגונלית אם לכל $x, y \in A$ קיים קו פוליגונלי המחבר את x ו y שכולו נמצא ב A.

בפרט, כל קבוצה קמורה היא קשירה פוליגונלית. גם איחוד של שתי קבוצות קשירות פוליגונלית שנחתכות, נותן קבוצה קשירה פוליגונלית. בקרוב נגדיר מושג של קשירות מסילתית (שזו האפשרות להעביר קו "כללי" שיחבר את שתי הנקודות וישאר בקבוצה, לא דווקא קו פוליגונלי) ונראה שבמקרה של קבוצה פתוחה, המושגים מזדהים.

סוף שיעור 18

8.7 סדרות ב $\mathbb{R}^n$

הגדרה 8.18 תהי $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של וקטורים. נאמר ש $x \in \mathbb{R}^n$ הוא הגבול שלה ונסמן $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ אם

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = 0$$

באופן שקול, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים k_0 כך שלכל $k \geq k_0$ מתקיים $x_k \in B(x,\varepsilon)$.

ראינו כבר במסקנה 8.2 שמתקיים

טענה 8.19 $x_k \to x$ אם ורק אם $(x_k)_i \to x_i$ לכל $i = 1,\ldots,n$.

מכאן נסיק ישירות את העובדות הבאות

טענה 8.20 אם $x_k \to x$ וגם $x_k \to y$ אז $x = y$

(אפשר גם להוכיח זאת ישירות כי $\|x - y\| \leq \|x - x_k\| + \|x_k - y\| \to 0$)

טענה 8.21 [ליניאריות הגבול] אם $\{x_k\},\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ו $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}$ ומתקיים $x \to x_k$, $y_k \to y$ ו $\alpha_k \to \alpha$ אזי מתקיים $\alpha_k x_k + y_k \to \alpha x + y$.

הוכחה: קואורדינטה קואורדינטה. ∎

טענה 8.22 אם $\{x_k\},\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ומתקיים $x_k \to x$, $y_k \to y$ אזי מתקיים $\langle x_k, y_k\rangle \to \langle x, y\rangle$. (נאמר אח"כ שמשמעות הדבר הוא שהפונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא רציפה.)

הוכחה: לפי הגדרה וטענות קודמות, $(x_k)_i \to x_i$ וגם $(y_k)_i \to y_i$ ולכן גם $\sum (x_k)_i (y_k)_i \to \sum x_i y_i$. ∎

הגדרה 8.23 [סדרת קושי] סדרה $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $k, m \geq N_0$ מתקיים $\|x_k - x_m\| \leq \varepsilon$.

טענה 8.24 סדרה $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ היא סדרת קושי אם ורק אם קיים $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

הוכחה: אי שוויון מלמה 8.1 גורר ש $\{x_k\}$ היא סדרת קושי אם ורק אם לכל i הסדרה $\{(x_k)_i\} \subset \mathbb{R}$ היא סדרת קושי וזה אם ורק אם כל סדרה ממשית כזו מתכנסת (ממשפט קושי חדו"א 1) וזה, ממסקנה 8.2, אם ורק אם הסדרה הוקטורית מתכנסת. כמובן שניתן גם להוכיח ישירות אך אין צורך. ∎

8.8 נקודות הצטברות

הגדרה 8.25 [נקודת הצטברות] תהי $A \in \mathbb{R}^n$ ונקודה $x_0 \in \mathbb{R}^n$. נאמר שהיא נקודת הצטברות של A אם לכל $r > 0$ מתקיים

$$(B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

זאת אומרת יש נקודה הקרובה r ל x_0 בתוך A שאיננה x_0 עצמו.

כמובן שכל נקודת הצטברות היא גם נקודת סגור, אך להפך לא נכון, ונקודת סגור שאיננה נקודת הצטברות חייבת להיות ב A בעצמה, והיא נקראת נקודה מבודדת של A. ברור גם שכל נקודות הפנים של A הן נקודות הצטברות.

טענה 8.26 תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת הצטברות של A אם ורק אם קיימת סדרה $x_k \in A \setminus \{x\}$ כך ש $x_k \to x$. יתר על כן, ניתן לבחור את $\{x_k\}$ כך שכל איבריה שונים זה מזה. בפרט, A אינסופית.

הוכחה: זו כמעט ההגדרה. אכן, בכל סביבה של x קיימות נקודות מ $A \setminus \{x\}$, אז נביט בכדור $B(x, 1/k)$ ונבחר נקודה ממנו שהיא ב A ואיננה $x, x_1, \ldots, x_{k-1}$. אילו אין כזו, בכדור מרדיוס $r = \min(\|x_i - x\|; i = 1, \ldots, k-1)$ לא היתה אף נקודה בסתירה לבגדרת נקודת הצטברות. כך בנינו סדרה שלפי הגדרתה מתכנסת ל x. להפך, אם x הוא גבול של סדרה כזו, אז בכל כדור סביב A נמצאים כל אברי הסדרה החל ממקום מסוים, ובפרט x היא נקודת הצטברות. ■

מסקנה 8.27 תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. אזי $x \in \overline{A}$ אם ורק אם קיימת סדרה $\{x_n\} \subset A$ כך ש $x_n \to x$. בפרט A סגורה אם ורק אם לכל x עבורו קיימת סדרה $\{x_n\} \subset A$ המתכנסת אליו מתקיים $x \in A$.

8.9 קבוצה חסומה, וקבוצה קומפקטית

הגדרה 8.28 [חסימות] תהי $A \in \mathbb{R}^n$ נאמר שהיא חסומה אם קיים R כך ש $A \subset B(0, R)$.

למשל, כל קבוצה סופית היא חסומה. נוח גם להגדיר קוטר של קבוצה על ידי

$$diam(A) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}$$

ולא קשה לבדוק שקבוצה היא חסומה אם ורק אם הקוטר שלה סופי.

טענה 8.29 תהי $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ סדרה חסומה. אזי יש לה תת סדרה מתכנסת.

הוכחה: תהי סדרה חסומה $\{x_k\}$. כל קואורדינטה שלה היא סדרה ממשית חסומה. נבנה ראשית תת סדרה עבורה הקואורדינטה הראשונה מתכנסת, לתת סדרה זו נבנה תת סדרה עבורה הקואורדינטה השניה מתכנסת, וכן הלאה. אחרי מספר סופי (n בדיוק) של שלבים, נקבל תת סדרה של הסדרה המקורית עבורה כל הקואורדינטות מתכנסות. ■

מסקנה 8.30 לקבוצה חסומה ואינסופית יש נקודת הצטברות.

הוכחה: מאינסופיות הקבוצה נבנה סדרה של איברים שכולם שונים זה מזה. מהטענה הקודמת ניקח לסדרה תת"ס מתכנסת. הגבול שלה הוא נקודת הצטברות (שכן האיבר הגבולי מופיע כאיבר בסדרה לכל היותר פעם אחת). ■

הגדרה 8.31 [קומפקטיות] תהי $A \in \mathbb{R}^n$ נאמר שהיא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.

הערה 8.32 ההגדרה ה"אמיתית" של קבוצה קומפקטית היא "אם לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי". ההגדרה של "קומפקטית סדרתית" היא "אם לכל סדרה יש תת"ס מתכנסת". במקרה של $\mathbb{R}^n$ ההגדרות הללו מזדהות עם ההגדרה הפשוטה שניתנה למעלה.כפי שנוכיח בקרוב. גם ההוכחות עם הכיסויים אינן קשות (ודומות למשפט של קנטור מחדו"א 1 על חיתוך של קטעים סגורים הולכים וקטנים). בכל מקרה לצרכים שלנו ההגדרה שנבחרה היא זו שכתובה מעלה, אך כדאי לזכור שזו לא ההגדרה של קבוצה קומפקטית במקרה כללי של מרחב טופולוגי.

משפט 8.33 [קומפקטיות זו שקולה לקומפקטיות סדרתית] קבוצה היא קומפקטית אם ורק אם לכל סדרה של איברים בקבוצה יש תת סדרה מתכנסת לאיבר בקבוצה (זו נקראת "קומפקטיות סדרתית").

הוכחה: [של משפט 8.33] תהי קבוצה בה לכל סדרה יש תת"ס מתכנסת לאבר בקבוצה. ברור לכן שהיא סגורה וחסומה, אחרת אפשר לבנות סדרה שתתכנס לנקודת סגור שאיננה בקבוצה במקרה הלא סגור (זה מהגדרת נקודת סגור - כשהיא איננה בקבוצה היא בהכרח נקודת הצטברות), או סדרה שלא תתכנס כלל במקרה הלא חסום. להפך - תהי קבוצה סגורה וחסומה A. תהיה סדרה כלשהי $\{x_k\} \subset A$. לפי טענה 8.29 יש לה תת סדרה מתכנסת, נאמר מתכנסת ל y. מטענה 8.26, y נמצא בסגור של A ומסגירות הקבוצה A , גם $y \in A$, וסיימנו. ■

המשפט הבא הוא הכללה של השמפט במימד אחד בו השתמשנו על מנת להוכיח את משפט דיני.

משפט 8.34 קבוצה A היא קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של A על ידי קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (זאת אומרת $A \subset \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$) קיים N וקיימות $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ כך ש $A \subset \cup_{i=1}^N U_{\alpha_i}$. (זו ההגדרה הטופולוגית של קבוצה קומפקטית).

משפט עזר ששימושי באופן כללי הוא האקוויולנט של הלמה של קנטור על קטעים מקוננים במימד גבוה:

טענה 8.35 סדרה יורדת של קבוצות קומפקטיות $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ (דהיינו שלכל i מתקיים $K_{i+i} \subset K_i$) מקיימת $\cap K_i \neq \emptyset$.

הוכחה: [של טענה 8.35] תהי סדרה כנ"ל. נבנה סדרת נקודות על ידי בחירה של נקודה מכל קבוצה. הסדרה היא חסומה שכן הקבוצה K_1 בעצמה חסומה. לכן יש לה תת סדרה מתכנסת. כעת מסגירות K_i, ומשום שכל אברי הסדרה החל מהמקום ה iי שייכים ל K_i, נקבל שגם האיבר הגבולי שייך ל K_i. היות ש i היה כללי, קיבלנו שהאיבר הגבולי נמצא בחיתוך לכן החיתוך איננו ריק. ■

הוכחה: [של משפט 8.34] נניח ש A איננה קומפקטית, ונמצא לה כיסוי אינסופי ללא תת כיסוי סופי. אם היא איננה קומפקטית, או שהיא לא חסומה או שהיא לא סגורה (או שניהם). נניח שאיננה חסומה. נכסה אותה על ידי כדורים פתוחים ברדיוס 1, $B(x,1)$ הממורכזים בנקודות של A (זה אוסף ענקי, שכן לקחנו כדור לכל נקודה ב A). ברור שזה כיסוי פתוח. אבל כל אוסף סופי שלו (נאמר עם מרכזים $\{x_i\}_{i=1}^N$) בהכרח יהיה חסום בכדור מרדיוס $\max_{i=1,\dots,N}(\|x_i\|+1)$ ולכן לא יכול לכסות את A כולה שאיננה חסומה. נניח שאיננה סגורה לכן יש נקודת סגור של A שאיננה איבר של A . נניח שזו הנקודה x_0. נביט בכיסוי הפתוח הבא של A. לכל נקודה $x\in A$ ניקח כדור פתוח ברדיוס $r(x)=\|x-x_0\|/2$. כמובן שזה כיסוי פתוח. אילו היה לו תת כיסוי סופי, נאמר על ידי $\cup_{i=1}^N B(x_i,r_i)$, הוא לא היה מכיל סביבה מרדיוס $\min r_i$ של x_0. זו סתירה לכך ש x_0 נקודת סגור של A .

כעת נוכיח את הכיוון החשוב - אם A קומפקטית אז לכל כיסוי פתוח שלה יש תת כיסוי סופי. נעשה זאת על דרך השלילה. משום ש A חסומה ניתן לחסום אותה בתוך קוביה מאורך צלע סופי כלשהו R. נבנה סדרה של קבוצות קומפקטיות A_i כך ש $A_{i+1}\subset A_i$ וכך שכל אחת מהקבוצות אי אפשר לכסות על ידי מספר סופי של איברי U_α, ויתר על כן, נדאג ש $diam(A_i)\to 0$. קל לעשות זאת על ידי חלוקה חוזרת של הקוביה ל 2^n תת קוביות שאורך צלע מחצית מהקודם, נסמן אותן Q_j, ונביט ב $A_i\cap Q_j$. אילו לכולן היה תת כיסוי סופי היה גם תת כיסוי סופי לכיסוי כולו. לכן לפחות לאחת אין תת כיסוי סופי, ואותה נגדיר כ A_{i+1}. היא גם קומפקטית כחיתוך של שתי קומפקטיות. אנו טוענים כי $\cap A_i=\{x\}$. אכן, החיתוך איננו ריק מטענת העזר, אך הקוטר שלו קטן שווה לקוטרה של A_i לכל i וזה בתורו שואף ל 0 ולכן קוטר החיתוך אפס, זאת אומרת הוא נקודה אחת בלבד. כעת, משום שנקודה זו היא איבר של A, ישנה קבוצה פתוחה U_{α_0} אליה x שייך. מפתיחות, קיים כדור קטן $B(x,r_0)\subset U_{\alpha_0}$. נבחר i מספיק גדול כך ש $diam(A_i)\le r_0$ אז מתקיים $A_i\subset B(x_0,r_0)\subset U_{\alpha_0}$, וזאת בסתירה לכך שאין תת כיסוי סופי של A_i לאף i. ■

סוף שיעור 19

9 פונקציות וקטוריות של משתנה וקטורי

בפרק זה נדון בפונקציות מהצורה

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

או ביתר כלליות $f : A \to \mathbb{R}^m$ כאשר $A \subset \mathbb{R}^n$. על פי רוב נוכל להצטמצם למקרה $m = 1$ אם נסמן $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

9.1 הגדרת רציפות, גבולות, דוגמאות

נשים לב שאם ננסה להשתמש בהגדרות שלנו של גבול במשתנה אחד ללא מחשבה על ידי לקיחת גבול ביחס למשתנה אחד ואז ביחס לשני, נקבל דברים "לא כל כך הגיוניים" למשל

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ * & (0,0) \end{cases}$$

(אין זה משנה כיצד נגדיר אותה בראשית כי כמו במשתנה אחד, כשמחשבים גבול בנקודה אף פעם לא דורכים על הנקודה עצמה) מתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} 1 = 1 \\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) &= \lim_{y\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

זאת אומרת שינוי סדר הגבולות משפיע על התוצאה. זה כמובן לא דבר רצוי. במקרה כזה הגבול לא קיים. אנו רוצים מגבול שכאשר הוקטור (x,y) קרוב לוקטור (x_0,y_0), ערך הפונקציה יהיה קרוב למספר (או לוקטור, תלוי מה מימד הטווח), שהוא הגבול.

הגדרה 9.1 [גבול של פונקציה] תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ו $l \in \mathbb{R}^m$. נאמר כי

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

אם לכל סדרה $x_k \to x$ כך ש $x_k \neq x$ לכל k, מתקיים $f(x_k) \to l$. באופן יותר כללי, עבור $A \subset \mathbb{R}^n$ ו $f : A \to \mathbb{R}^m$ ועבור x_0 שהיא נקודת הצטברות של A נגדיר את

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in A}} f(x) = l$$

אם לכל סדרה $\{x_k\} \subset A$ כך ש $x_k \to x$ וכן $x_k \neq x$ לכל k, מתקיים $f(x_k) \to l$.

הגדרה 9.2 תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ ו $f : A \to \mathbb{R}^m$, נאמר ש f רציפה בנקודה $x_0 \in A$ אם x_0 נקודה מבודדת או ש x_0 נקודת הצטברות וכן

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in A}} f(x) = f(x_0)$$

נאמר ש f פונקציה רציפה אם היא רציפה בכל $x_0 \in A$.

דוגמאות פשוטות לפונקציות רציפות, למשל $f(x,y,z)=(\cos(x),xyz,e^z x,y,y,y)$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^6$.
כמו במשתנה אחד, גם כאן לעיתים נוח לעבוד עם רציפות אפסילון־דלתא במקום רציפות סדרתית. לכן נוכיח

משפט 9.3 תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ ו $f:A\to\mathbb{R}^m$. מתקיים ש f רציפה בנקודה $x_0\in A$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in B(x_0,\delta)\cap A$ מתקיים

$$f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$$

(ובאופן שקול, $\|x-x_0\|<\delta$ גורר $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$).

הוכחה: נניח רציפות סדרתית ונניח בשלילה שהתנאי של המשפט לא מתקיים. זאת אומרת שעבור ε_0 מסוים אין δ מתאים. לכן לכל k המספר $\delta=\frac{1}{k}$ לא יתאים, זאת אומרת שניתן למצוא $x_k\in B(x_0,1/k)\cap A$ כך ש $\|f(x_k)-f(x_0)\|\ge\varepsilon_0$. מתקיים $x_k\to x$ אבל לא מתקיים $f(x_k)\to f(x_0)$ בסתירה. בכיוון השני, נניח שמתקיים התנאי במשפט ותהי סדרה ב A עם $x_k\to x_0$. נביט בסדרה $f(x_k)$ ויהי $\varepsilon>0$. עלינו למצוא N_0 כך שלכל $k>N_0$ מתקיים $\|f(x_k)-f(x_0)\|<\varepsilon$. נשתמש בתנאי המשפט על מנת למצוא δ כך שלכל $x\in B(x,\delta)\cap A$, מתקיים $f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$. משום ש $x_k\to x_0$, קיים N_0 כך שלכל $k\ge N_0$ מתקיים $x_k\in B(x_0,\delta)\cap A$ ולכן בפרט $f(x_k)\in B(f(x_0),\varepsilon)$ כרצוי. ■

טענה 9.4 תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ ופונקציה $f:A\to\mathbb{R}^m$ ונניח $f=(f_1,\dots,f_m)$. היא רציפה אם ורק אם f_i רציפה לכל $i=1,\dots,m$.

הוכחה: מיידית מאי השוויון שראינו בלמה 8.1

$$|f_i(x)-f_i(x_0)|\le\|f(x)-f(x_0)\|\le\sum_{i=1}^m|f_i(x)-f_i(x_0)|$$

והשאפת x ל x_0 (בתוך A). ■

הגדרה 9.5 [רציפות במ"ש] נאמר שפונקציה $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה במ"ש ב A אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in A$ המקיימים $\|x-y\|<\delta$ מתקיים $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

דוגמא נחמדה לפונקציה רציפה (במ"ש) זו פשוט הפונקציה

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\qquad f(x)=\|x\|$$

כי מתקיים

$$|f(x)-f(y)|\le\|x-y\|$$

מאי שוויון המשולש, לכן אם $\|x-y\|<\varepsilon$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ וזו אפילו רציפות במ"ש. למעשה כל פונקציה שמקיימת את התכונות של נורמה תהיה רציפה שכן יתקיים

$$|||x|||=|||\sum_{i=1}^n x_ie_i|||\le\sum_{i=1}^n|x_i|\cdot|||e_i|||\le\max_{i=1,\dots,n}|||e_i|||\cdot\sum_{i=1}^n|x_i|\le\max_{i=1,\dots,n}|||e_i|||\sqrt{n}\|x\|=c\|x\|$$

ומהומוגניות

$$|||x-y|||\leq c\|x-y\|$$

זאת אומרת שוב יש רציפות ואפילו במ"ש. (שנגדיר עוד רגע)

9.2 משפטים בסיסיים - סגירות לחיבור, כפל, הרכבה

משפט 9.6 תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ ו $f,g:A\to\mathbb{R}^m$ רציפות ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\alpha f+\beta g:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה וגם $\langle f,g\rangle:A\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכחה: חוקי גבולות של סדרות, אין קל מזה. ■

משפט 9.7 תהי $x_0\in A\subset\mathbb{R}^n$ ו $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהי $B\subset\mathbb{R}^m$ כך ש $f(A)\subset B$. תהי $g:B\to\mathbb{R}^l$. נניח ש f רציפה ב x_0 ונניח ש g רציפה ב $y_0=f(x_0)$. אזי $h=g\circ f:A\to\mathbb{R}^l$ רציפה ב x_0.

הוכחה: שוב מדובר בחוקי גבולות של סדרות, ושוב אין קל מזה. ■

9.3 תכונות גלובאליות

9.3.1 קנטור: על קומפקט - רציף במ"ש

משפט 9.8 [משפט קנטור] תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית ו $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה. אזי f רציפה במ"ש.

הוכחה: ניתן לשחזר בקלות את ההוכחה של משפט קנטור המקורי. אכן, אם נניח בשלילה שf איננה רציפה במ"ש אז קיים ε_0 שמעיד על כך, לכן לכל $\delta_k=1/k$ קיימים x_k,y_k כך ש $\|x_k-y_k\|\leq\delta_k$ ואילו $\|f(x_k)-f(y_k)\|>\varepsilon_0$. מקומפקטיות A יש ל $\{x_k\}$ תת"ס מתכנסת, נאמר $x_{k_j}\to x_0$ ולכן גם $y_{k_j}\to x_0$ אבל מרציפות נקבל $f(x_{k_j})\to f(x_0)$ וגם $f(y_{k_j})\to f(x_0)$ וזו כבר סתירה כי עבור j מספיק גדול נקבל $\|f(x_{k_j})-f(y_{k_j})\|<\varepsilon_0$. ■

9.3.2 ויירשטראסס: חסום, מקביל מין ומקס

משפט 9.9 תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית ותהי $f:K\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית רציפה. אזי f חסומה ומשיגה את חסמיה, דהיינו קיימים $x_M\in K$ ו $x_m\in K$ כך שלכל $x\in K$ מתקיים $f(x_{min})\leq f(x)\leq f(x_{MAX})$.

הוכחה: ראשית היא חסומה שכן אילו היינו יכולים למצוא $|f(x_k)|>k$ היינו בונים תת"ס מתכנסת של x_k, נאמר $x_{k_j}\to x\in K$ ומרציפות $f(x_{k_j})\to f(x)\in\mathbb{R}$ בסתירה לאי חסימות $f(x_{k_j})$. כעת נסמן $M=\sup_{x\in K}f(x)$ ונבנה סדרה x_k עבורה $f(x_k)>M-1/k$. ניקח לה תת"ס מתכנסת $x_{k_j}\to x_{MAX}$ ומרציפות $M\geq f(x_{MAX})=\lim f(x_{k_j})\geq\lim M-1/k=M$ וקיבלנו את הדרוש. בדומה נמצא את x_{min}. ■

הערה 9.10 ניתן להראות באופן דומה: אם $f : A \to \mathbb{R}^m$ רציפה כאשר $A \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית, אזי $B = f(A) \subset \mathbb{R}^m$ גם היא קומפקטית.

לדוגמא, נוכל להשתמש במשפט זה על מנת להראות שכל נורמה (פונקציה $|||\cdot||| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ שמקיימת את אי שוויון המשולש, $|||\lambda x||| = |\lambda|\cdot|||x|||$ ומתאפסת רק ב 0) שקולה לנורמה הרגילה, זאת אומרת קיימים c, C כך ש $c\|x\| \le |||x||| \le C\|x\|$ לכל x. זה יעשה בתרגיל. הרעיון הוא ראשית שמספיק להראות זאת על הספירה בגלל ההומוגניות, שנית שראינו כבר רציפות, לכן על הספירה שהיא קומפקטית יש חסם מלעיל ומלרע, ולבסוף החסם מלרע מתקבל על הספירה ולכן איננו אפס.

9.3.3 תכונת דרבו על קשירה פוליגונלית

משפט 9.11 [תכונת דרבו על קשירה פוליגונלית] תהי $f : A \to \mathbb{R}$ ונניח כי A קבוצה קשירה פוליגונלית וכי f רציפה. יהיו $x, y \in A$ ו$c \in \mathbb{R}$ כך ש $f(x) < c < f(y)$. אזי קיים $z \in A$ כך ש $f(z) = c$.

הוכחה: הרעיון הוא לבנות עקום פוליגונלי המחבר את הנקודות, וכך להפוך את השאלה לחד מימדית. אכן, אם נסמן $\gamma(t) : [0,1] \to A$ את העקום, הוא רציף ומקיים $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, וכעת נרכיב $g = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ זו פונקציה רציפה ולכן מקיימת את משפט ערך הביניים מחדו"א 1, ולכן קיים t כך ש $g(t) = c$, ועבור $z = \gamma(t)$ נקבל $f(z) = c$ כרצוי. ∎

9.4 עקום רציף, עקום פוליגונלי, קשירות מסילתית

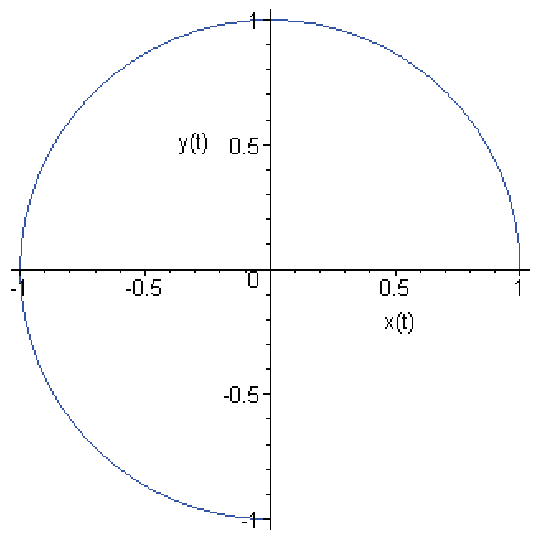
הגדרה 9.12 [מסילה] פונקציה רציפה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ נקראת מסילה. היא נקראת סגורה אם $\gamma(a) = \gamma(b)$. היא נקראת פשוטה אם היא חח"ע על $[a,b]$ או אם היא סגורה וחח"ע על $(a,b]$.

הגדרה 9.13 בהנתן מסילה $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ נגדיר את $-\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ על ידי

$$-\gamma(t) = \gamma(1-t)$$

כל העתקה רציפה חח"ע ועל $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ מגדירה מסילה חדשה $\gamma_2 = \gamma \circ \varphi^{-1}$. זהו יחס שקילות על מסילות שנקרא גם רה־פרמטריזציה. דוגמאות חשובות למסילות אלה למשל הפוליגונליות שראינו, אבל גם

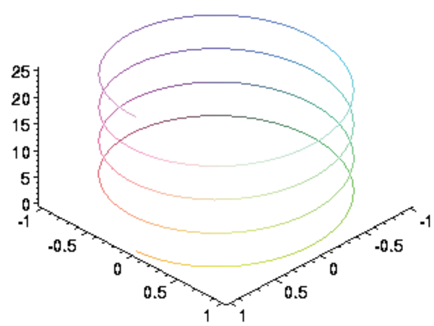
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad \gamma : [0, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$$



איור 30: עקומה אחת

או

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \qquad \gamma : [0,25] \to \mathbb{R}^3$$



איור 31: ועוד אחת

הגדרה 9.14 [קשירות מסילתית] תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה כלשהי. נאמר שהיא קשירה מסילתית אם לכל $x, y \in A$ קיימת עקומה (רציפה) $\gamma : [0,1] \to A$ כך ש $\gamma(0) = x$ ו $\gamma(1) = y$.

הגדרה 9.15 [תחום] קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת תחום אם היא פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה 9.16 כל קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית היא גם קשירה פוליגונלית.

הוכחה: נניח ש A קשירה מסילתית ופתוחה, יהיו $x, y \in A$, נביט בעקום המחבר אותן $\gamma : [0,1] \to A$, ונביט בקבוצה $\gamma([0,1]) \subset A$. ז אנו טוענים שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $t \in [0,1]$, ולכל $z \notin A$ מתקיים $\|\gamma(t) - z\| \geq \varepsilon$. אכן, אם נניח בשלילה שלא זה המקרה נוכל למצוא סדרות מתאימות t_k ו z_k עם $\|\gamma(t_k) - z_k\| \to 0$ ולהן תת"ס מתכנסות, ובגבול נקבל $t \in [0,1]$ ו $z \notin A$ (שכן A פתוחה) עם $\gamma(t) = z$ וזו סתירה. מרציפות γ וממשפט קנטור היא גם רציפה במ"ש. נבחר עבור ε שלנו את δ כך שאם $|t-s| < \delta$ מתקיים $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \varepsilon$. יהיה $N > \frac{1}{\delta}$ ונביט ב $t_j = \frac{j}{N}$. נתייחס לנקודות $x_j = \gamma(t_j)$ אז $B(x_j \varepsilon) \subset A$ ומתקיים $[x_{j-1}, x_j] \subset B(x_{j-1}, \varepsilon)$ ובפרט

$$\cup_{j=1}^{N} [x_{j-1}, x_j] \subset A$$

כך שמצאנו עקום פוליגונלי המחבר את x עם y וכולו בתוך A כרצוי. ■

מסקנה 9.17 קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ היא קשירה אם ורק אם כל f קבועה מקומית עליה היא קבועה ממש, אם ורק אם כל f רציפה עליה מקיימת את תכונת דרבו.

9.5 גבול בשני משתנים לעומת גבול חוזר

כמו שבפרקים קודמים עסקנו לא מעט בשאלות כמו החלפת גבול ואינטגרל, החלפת גבול ונגזרת, החלפת גבול וסכום אינסופי, כאשר אנו עוסקים בשני משתנים אפשר לעשות גבול ביחס למשתנה אחד וגבול ביחס למשתנה אחר, וניתן לשאול מתי הדבר זהה ללקחת גבול ביחס לשני המשתנים גם יחד. יהיה קל להבין את ההבדלים על ידי דוגמאות.

דוגמא ראשונה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

נחשב את

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0x}{x^2+0} = 0$$

ובאופן דומה

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

ומצד שני לא קיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

משום שלמשל אם ניקח את $(x,y) = (t,t)$ אז לכל t יתקיים $f(t,t) = t^2/(2t^2) = 1/2 \neq 0$ זאת אומרת הפונקציה לא רציפה כפונקציה של שני משתנים.

דוגמא שנייה:

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נשים לב שיש דווקא רציפות ב $(0,0)$ שכן אם $(x_k,y_k)\to(0,0)$ מתקיים

$$|f(x_k,y_k)|\leq|x_k|+|y_k|\to 0$$

מצד שני לכל $y\neq 0$ לא קיים הגבול

$$\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}x+y\sin(\frac{1}{x})$$

ובפרט לא קיים הגבול החוזר $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}$. מצד שני כן קיים הגבול

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}x=0$$

דוגמא שלישית:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

כאן קל לבדוק שלכל t מתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x,tx)=\lim_{x\to 0}\frac{tx^3}{x^4+t^2x^2}=0$$

זאת אומרת בכל כיוון "ליניארי" בו נתקדם לעבר $(0,0)$ הגבול יהיה קיים ושווה לאפס. האם זה גורר רציפות? לא ולא. למשלת

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2}$$

לכל x וגם כאשר $x\to 0$, לכן אין רציפות, שהרי בכל סביבה של $(0,0)$ יש נקודה מצורה זו. כאן אנו למדים שגבול בשני משתנים הוא מורכב הרבה יותר מגבול במשתנה אחד, ובמילים אחרות אי אפשר לעבוד תמיד "קואורדינטה קואורדינטה", אפילו לא "כיוון כיוון", לפעמים צריך עקומות יותר כלליות כדי להבין מה קורה. נזכיר שאם לכל סדרה x_k השואפת לנקודה יש גבול ל $f(x_k)$, (השווה ל $f(x_0)$) אז יש רציפות, כך שאם נלך על "כל המסילות" (דבר שעוד לא ממש הגדרנו) ונקבל שעל כל אחת מהן יש גבול, יהיה גם גבול בנקודה.

סוף שיעור 20

9.6 העתקות ליניאריות ומטריצות

מושג הנגזרת אליו נגיע בקרוב ידרוש מאיתנו הבנה בסיסית של העתקות ליניאריות. משום שהן בעצמן גם פונקציות מ $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^m$ כדאי שנדון בהן קצת.

העתקה (פונקציה) $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ נקראית ליניארית אם היא מקיימת לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$A(\lambda x+\mu y)=\lambda A(x)+\mu A(y)$$

ואז מסמנים $A(x)=Ax$. אוסף כל ההעתקות הליניאריות הללו מסומן $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, והוא בעצמו מרחב ליניארי עם חיבור (של פונקציות) וכפל בסקלר. מרגע שקבענו בסיסים $e_1,\dots,e_n$ של $\mathbb{R}^n$ ו $f_1,\dots f_m$ של $\mathbb{R}^m$ יש לנו ייצוג מטריציוני של A כזו על ידי כך שנסמן $Ae_j=\sum_{j=1}^m a_{i,j}f_i$ שכן אז לכל $x=\sum_{j=1}^n x_je_j$ נקבל

$$Ax=\sum_{j=1}^n x_jAe_j=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m x_ja_{ij}f_i=\sum_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)f_i$$

לכן בעצם יש התאמה חח"ע ועל בין $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ לבין $\mathbb{R}^{nm}$. נהוג לרשום התאמה זו באופן של מטריצה, עם הגדרת כפל מטריצה בווקטור המתאימה:

$$Mat(A)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

(לצורך זה יש להתייחס לוקטור כוקטור עמודה). כמובן, הרכבה של העתקות (נאמר $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ עם $B\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k)$) מתאימה לכפל מטריצות (כאן BA), כפי שלומדים בליניארית 1.

טענה 9.18 תהי $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, אזי היא רציפה.

הוכחה: נסמן את עמודותיה בוקטורים $v_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,m$, אז מספיק להראות שההעתקה $f_i(x)=\langle x,v_i\rangle$ היא רציפה לפי טענה 9.4 כי $f_i(x)=(Ax)_i$. הרציפות של פונקציה כזו (שנקראת גם "פונקציונל ליניארי") נובעת ישירות משום ש

$$|f_i(x)-f_i(y)|=|\langle x-y,v_i\rangle|\le\|x-y\|\cdot\|v_i\|$$

לכן יש רציפות במ"ש. השתמשנו בקושי שוורץ כמובן. ■

הערות 9.19 על $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ יש כמה נורמות טבעיות (שכולן שקולות כי כולן נורמות על $\mathbb{R}^{nm}$ למעשה). בתרגיל תראו כי

$$N(A)=\|A\|_{op}=\sup_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

היא נורמה (שנקראת הנורמה האופרטורית) ותשוו אותה לנורמה ה"רגילה" על $\mathbb{R}^{nm}$ שהיא

$$\|A\| = \|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

נשתמש בנורמה זו מייד.

משפט 9.20 לכל $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ מוגדרת העתקה ליניארית $e^A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ על ידי הגבול

$$e^A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x$$

והיא רציפה.

נזדקק לטענת העזר הבאה

טענה 9.21 יהיו $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. בפרט $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$.

הוכחה: נסמן ב u_j את וקטורי העמודות של B וב v_i את וקטורי השורות של A. לכן $(AB)_{i,j} = \langle v_i, u_j \rangle$. כמובן $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$ ובדומה $\|B\|^2 = \sum_{j=1}^n \|u_j\|^2$. נקבל

$$\|AB\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |\langle v_i, u_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 \|u_j\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$$

כרצוי. כעת באינדוקציה $\|A^k\| \leq \|A^{k-1}\| \cdot \|A\| \leq \|A\|^k$. ■

מסקנה 9.22 תהי $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ונגדיר את המטריצה

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

אזי כל קואורדינטה (מבין ה n^2) מתכנסת ומתקיים עבור המטריצה הגבולית e^A ש

$$\|e^A\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq e^{\|A\|}$$

הוכחה: [של המסקנה, ושל משפט 9.20] אכן, על פי אי שוויון המשולש והטענה הקודמת, הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ מתכנס בהחלט כי אפשר לעשות לו את מבחן ההשוואה עם הטור $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)_i$ שמתכנס. אי השוויון נובע על פי אי השויון הסופי ולקיחת גבול שהרי $\| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k \| \leq e^{\|A\|}$ לכל N. בפרט קיבלנו שהמטריצה e^A מוגדרת. לכן ההעתקה המשוייכת אליה היא רציפה, כי היא ליניארית וכל העתקה ליניארית היא רציפה. ■

הערות 9.23 [יעשה בתירגול כנראה] חשבו לעצמכם את e^A עבור מטריצה אלכסונית, ועבור מטריצה המצויה בצורת זורדן. בידקו כיצד ההתאמה $A \mapsto e^A$ מתנהגת עם הצמדה. נסו להראות שההתאמה $A \mapsto e^A$ היא העתקה רציפה בין $\mathbb{R}^{n^2}$ לעצמו. המקרה $n = 1$ זו כמובן ההעתקה $x \to e^x$. הדבר יהיה לכם קל יותר כאשר תעריכו את $\|e^A - e^B\|$ כשהן מתחלפות, אך לא קשה מידי גם במקרה כללי.

9.7 עקום פיאנו [הערה: לא בחומר]

נגדיר את

$$\gamma_{peano} : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$$

שיהיה עקומה רציפה הממלאת את הריבוע כולו. לשם כך נגדיר איטראציות של עקומה נתונה באופן הבא. תהי

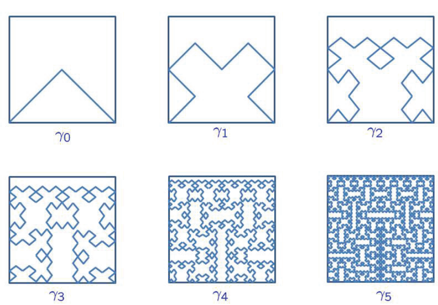
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$$

ונגדיר את

$$(\Phi\gamma)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y(t_1), x(t_1)) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \quad t_1 = 4t \\ \frac{1}{2}(x(t_2), y(t_2)) + (0, \frac{1}{2}) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \quad t_2 = 4t - 1 \\ \frac{1}{2}(x(t_3), y(t_3)) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \quad t_3 = 4t - 2 \\ \frac{1}{2}(-y(t_4), -x(t_4)) + (1, \frac{1}{2}) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \quad t_4 = 4t - 3 \end{cases}$$

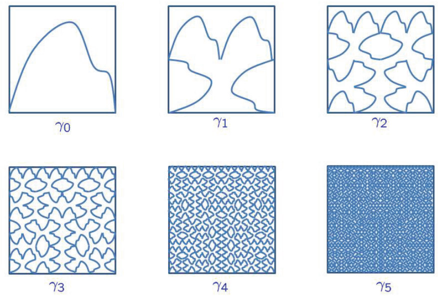
זו תהיה איטראציה אחת של העקומה המקורית. נגדיר סדרת עקומות על ידי $\gamma_n = \Psi\gamma_{n-1}$. נצייר לדוגמא מה קורה כשמתחילים עם עקומה

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1/2 \\ 1 - t & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$



איור 32: דוגמא לעקום פאנו

יפה, לא? תעשו גוגל "עקום פיאנו" (Peano curve) ותקבלו תמונות יותר יפות ממה שאני ייצרתי כאן.
ואם נתחיל מעקומה אחרת, נקבל למשל את הציור



איור 33: ועוד אחת

אנו רואים שככל שמתקדמים באיטראציות, העקומות "מכסות" יותר ויותר מהריבוע. בכל שלב, עדיין, מדובר באיחוד סופי של עקומות שאנחנו מבינים (במקרה הראשון ־ ממש של אינטרואלים) ולכן בשום שלב סופי לא נוכל לומר שכיסינו את כל הריבוע. לשם כך עלינו לקחת גבול של ההעתקות הללו. כדי לעשות זאת נגדיר נורמה על עקומות

$$\|\gamma\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |\gamma(t)|$$

וכך נוכל גם למדוד מרחק בין שתי עקומות

$$\|\gamma - \mu\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - \mu(t)|$$

נשים לב שמתקיים עבור ההעתקה שלנו Φ (שמתאימה לעקומה עקומה חדשה) כי

$$\|\Phi\gamma - \Phi\mu\|_\infty = \frac{1}{2}\|\gamma - \mu\|_\infty$$

לכן מתקיים שלכל $m > k$ המרחק

$$\|\gamma_m - \gamma_k\|_\infty \leq \frac{1}{2^k}\|\gamma_{m-k} - \gamma_0\|_\infty \leq \frac{1}{2^k}\sqrt{2}$$

כך שמדובר בסדרת קושי במ"ש של עקומות. לכן ברור שנקודתית היא מתכנסת, ומכך שהקושי הוא במ"ש גם הפונקציות הגבוליות (מדובר בעקומה גבולית, זאת אומרת זוג פונקציות $(x_\infty(t), y_\infty(t))$ המוגדרות על $[0,1]$) הן רציפות. התמונה של γ_∞ היא קבוצה קומפקטית, והיא גם קרובה כרצוננו לכל נקודה בריבוע שכן העקומה ה jית מבקרת בכל תת־ריבוע מבין ה 4^j תת־ריבועים, ולכן גם γ_∞ מבקרת בכל תת ריבוע כנ"ל, וזה לכל j. לכן התמונה של γ_∞ היא קבוצה צפופה בריבוע, וגם סגורה, אז היא מוכרחה להיות הריבוע כולו. מדהים לא?

ניתן להראות (ולא נעשה זאת) כי הפונקציות הגבוליות הללו לא תלויות בעקומה ההתחלתית, והן אינן גזירות באף נקודה. נעיר גם ש γ_∞ איננה חח"ע, וגם לא יכולה להיות (כי אז, ממשפטים מחדו"א 3, ההפוכה גם היתה רציפה אבל אין פונקציה רציפה שהפוכתה רציפה בין קו לקוביה שכן יש מכשולים טופולוגיים של קשירות).

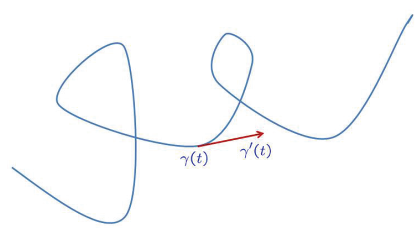
10 חשבון דיפרנציאלי בכמה משתנים

10.1 נגזרת של עקומה

כשנתונה $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ עקומה, ורוצים לגזור אותה, בסה"כ מדובר ב m־יה של פונקציות ממשיות $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ כך שניתן, אילו כולן גזירות, לגזור כל אחת בנפרד ולקבל את הוקטור $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_m')$, שניתן לכתוב גם כ

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

נעיר שעל פי רוב עדיף לעבוד דווקא עם וקטורי עמודות, הן בתור γ והן בתור γ'. לוקטור הנגזרת יש משמעות גיאומטרית ברורה: אם נצייר את העקומה במרחב הדו או התלת מימדי, זה יהיה וקטור בכיוון המשיק לה בנקודה. אורכו מודד את "מהירות" ההתקדמות לאורך העקומה כתלות ב"זמן" שהוא הפרמטר t. בציור:



איור 34: משיק למסילה

מדוע וקטור זה "משיק" לעקומה? הסיבה דומה לסיבה שהנגזרת במימד אחד היא השיפוע של המשיק. מכל הקווים הישרים העוברים דרך הנקודה $\gamma(t)$, הקו הישר בכיוון $\gamma'(t)$ מקרב את הפונקציה "טוב ביותר", במובן ש

$$\gamma(t+h) - [\gamma(t) + h\gamma'(t)] = o(h) \qquad h \to 0$$

וזה ממש על פי הגדרת הגבול. כמובן כאן הנחתי שהגבול קיים דהיינו שהעקומה היא עקומה גזירה.

10.2 נגזרות חלקיות ודוגמאות

בהינתן פונקציה $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ונקודה $x_0 \in U$ אפשר לצמצם אותה לישר או קטע ב A המכיל את x_0, נאמר $\{x_0 + tv : -1 \le t \le 1\}$. נקבל $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ שהיא ידידה שלנו מחדו"א 1 ואפשר לדבר על הנגזרת שלה. זו נקראת הנגזרת הכיוונית של f. כאשר הוקטור v הוא וקטור בסיס e_i, זו נקראת הנגזרת החלקית ה iית. נגדיר זאת באופן מדויק

הגדרה 10.1 תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה ו $x \in U$, ותהי $f : U \to \mathbb{R}^m$. עבור $1 \leq i \leq n$ נגדיר את הנגזרת החלקית ה iית של f להיות

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}$$

זאת אומרת, אם $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

נגדיר באופן כללי יותר עבור וקטור v מאורך יחידה $\|v\| = 1$ את

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$$

כך שלמעשה $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x)$.

הערה 10.2 ההנחה ש $\|v\| = 1$ לא רלוונטית, קל לבדוק כי עבור $u = \alpha v$, אם נרחיב את ההגדרה נקבל

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hu) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\alpha v) - f(x)}{h\alpha}\alpha \\ &= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h'v) - f(x)}{h'} = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(x)\end{aligned}$$

פשוט וקטור "כיוון" מוגדר במתמטיקה להיות וקטור מאורך אחד.

קל יחסית לחשב גדלים אלה שכן זה מחזיר אותנו למצב של משתנה אחד. אכן, אם נגדיר את

$$g(t) = f(x_0 + tv)$$

אזי $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

דוגמא:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} \qquad f : B(0,1) \to \mathbb{R}$$

אז כדי לחשב את $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ נסמן את $R = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ ונשים לב שכפונקציה של z מתקיים

$$g(z) = f(x,y,z) = \left(R^2 - z^2\right)^{-1/2}$$

ולכן

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = g'(z) = -\frac{1}{2}\left(R^2 - z^2\right)^{-3/2}(-2z) = \frac{z}{\left(1 - x^2 - y^2\right)^{3/2}}$$

דוגמא נוספת קצת יותר מעניינת: נביט ב $det : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ שלוקחת מטריצה ומחזירה את הדטרמיננטה שלה. כאן הבסיס הסטנדרטי ניתן לייצוג כמטריצות בסיסיות עם 1 במקום ה i, j, נסמן מטריצה כזו ב $E_{i,j}$. מהי הנגזרת החלקית של det בכיוון $E_{1,1}$? נחשב אותה:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial det}{\partial E_{1,1}} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[det\begin{pmatrix} x_{11}+h & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & & x_{nn}\end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & & x_{nn}\end{pmatrix}\right] \\
&= det\begin{pmatrix} x_{22} & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ x_{32} & & & x_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n2} & \cdots & & x_{nn}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נשים לב שאך ורק גזירות לפי כווני הבסיס כלל לא גוררת גזירות ואפילו לא רציפות, כפי שמוכיחה הדוגמא שכבר ראינו

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

בה אין רציפות ב $(0,0)$ אף שיש נגזרות חלקיות (הפונקציות על הצירים מתאפסות זהותית). מה שחמור אף יותר: יש לה נגזרות כיווניות בכל כיוון! אכן, נסמן $v=(v_1,v_2)$ אזי בכל מקרה, אילו $v_2\neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^4+(hv_2)^2} = \frac{v_1^2}{v_2}$$

רואים גם שזו לא פונקציה ליניארית בוקטור (v_1,v_2), שזה סימן לחוסר דיפרנציאביליות (שתיכף נגדיר). זאת אומרת שהנגזרות הכיווניות בנקודה לא נותנות את כל האינפורציה הנחוצה.

המצב מעט יותר טוב אם נדע משהו על הנגזרות החלקיות בסביבה של הנקודה, ואז לעיתים נוכל להסיק מכך דברים על הפונקציה כולה. דוגמא פשוטה היא הלמה הבאה, ודוגמא חשובה יותר היא משפט בהמשך (משפט 10.9) שאומר שאם הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, אז הפונקציה דיפרנציאבילית (נגדיר בקרוב מאוד).

למה 10.3 תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $f:U\to\mathbb{R}$. נניח ש f גזירה חלקית לפי כל משתנה $x_1,\ldots,x_n$, (בכל התחום) ונניח כי הנגזרות החלקיות חסומות. אזי f רציפה.

הוכחה: נכתוב את ההוכחה עבור $n=2$ כי ההכללה תהיה ברורה. נשתמש במשפט הערך ביניים של לגראנז.

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\leq |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\
&= |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y')(y-y_0)|+|\frac{\partial f}{\partial x}(x',y_0)(x-x_0)| \\
&\leq M[|y-y_0|+|x-x_0|]\to_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0
\end{aligned}$$

■

ברגע שיש לנו נגזרות חלקיות או כיווניות אפשר להמשיך ולגזור פעם שנייה $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f$ ושלישית, $\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f$. אחד המשפטים העיקרים בפרק זה יהיה על החלפת סדר הגזירה. אבך כמו שהדוגמא מעלה מראה לנו, מושג הנגזרת הכיוונית הוא קצת חלש מידי ונרצה מושג שגם גורר נגזרות אלה, אבל גם נגזרות לאורך מסילות ככליות העוברות ב x_0, לאו דווקא "ישרות". מושג זה, בו עוסק הפרק הבא, הוא טבעי וגיאומטרי וגורר את כל אלה גם יחד.

10.3 דיפרנציאביליות כללית

ניזכר בחדו"א 1 , $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב x_0 אם ורק אם קים ישר $l(x)=ax+b$ העובר בנקודה $(x_0,f(x_0))$ כך ש

$$f(x)=l(x)+o(|x-x_0|) \qquad x\to x_0$$

אכן, כדי לעבור בנקודה בוחרים את $l(x)=a(x-x_0)+f(x_0)$, ואז את השיפוע a בוחרים בדיוק כך שהשוויון מעלה יתקיים. לפעמים אין a כזה, ואז אומרים שהפונקציה לא גזירה בנקודה.

מנקודת מבט כזו, ברור מה צריכה להיות ההכללה למימדים גדולים יותר. את מקומו של הישר $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תתפוס העתקה ליניארית $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. עדיין נדרוש שהיא תקרב את f "כמה שניתן". המקרה היחסית פשוט של $m=1$ הוא מקרה בו ההעתקה הליניארית A היא $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ולכן בעצם מיוצגת על ידי וקטור יחיד. כרגע אין צורך להתייחס למקרה זה באופן מיוחד, אך הוא המקרה העיקרי שלנו. באופן יותר מדויק:

הגדרה 10.4 תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^m$. תהי $x_0\in U$. נאמר ש f גזירה (דיפרנציאבילית) ב x_0 אם קיימת העתקה ליניארית $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ כך שמתקיים

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

כאשר כאן המושג o הוא סימון לפונקציה (עם ערכים ב $\mathbb{R}^m$) השואפת לאפס אחרי חילוק ב $\|x-x_0\|$ כאשר $x\to x_0$. דהיינו מתקיים

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

כאשר קיימת כזו A נסמן אותה $D_f(x_0)$ או $[Df](x_0)$ ובמקרה של $m=1$ נסמן גם $(\nabla f)(x_0)$.

טענה 10.5 תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^m$ ותהי $x_0\in U$. נניח ש f דיפרנציאבילית ב x_0. אזי לכל v קיים $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ומתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=D_f(x_0)v$$

בפרט אנו רואים שהנגזרת הכיוונית היא פונקציה ליניארית של הכיוון! (ולכן ברור גם שלא היה צורך להצטמצם לכיוונים מאורך אחד דווקא).

הוכחה: אכן,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{D_f(x_0)(hv)+o(\|hv\|)}{h}=D_f(x_0)\cdot v$$

■

נשים לב שזה מאפשר לנו גם לחשב את D_f, אם אנחנו יודעים ש f דיפרציאבילית. אכן, העמודה ה i ית של המטריצה המייצגת את $D_f(x_0)$ זה פשוט הנגזרת הכיוונית $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. נשים לב גם שאם f דיפרנציאבילית, הדיפרנציאל מוגדר ביחידות.

הערה 10.6 אם $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא $f=(f_1,\dots,f_m)^T$, היא דיפרנציאבילית אם ורק אם כל f_i דיפרנציאבילית ומתקיים

$$D_f=\begin{pmatrix}\cdots & \nabla f_1 & \cdots\\ \cdots & \nabla f_2 & \cdots\\ & \vdots & \\ \cdots & \nabla f_m & \cdots\end{pmatrix}$$

הדבר נובע ישירות מההגדרה:

$$\begin{aligned}f(x) &= (f_1,\dots,f_m)^T(x)=(\cdots,f_i(x_0)+\nabla f_i(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|),\cdots)^T\\ &= f(x_0)+D_f(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\end{aligned}$$

עובדות פשוטות על D_f שכדאי לשים אליהן לב מיד:

- אם $f\equiv\overrightarrow{c}\in\mathbb{R}^m$ על U אז $D_f(x)=0$ לכל $x\in U$.
- אם $f(x)=Ax$ ליניארית, אז $D_f(x)=A$ לכל x.
- אם U קבוצה פתוחה וקשירה פוליגונלית וכן $D_f(x)=0$ לכל $x\in U$, אז $f\equiv\overrightarrow{c}$ על U, כי נראה בקלות שבין כל שתי נקודות המחוברות בקו ישר בתחום, ההפרש ב f הוא 0, ממשפט ערך הביניים של לגרנז יחד עם העובדה שכל הנגזרות הכיווניות הן 0.
- $D_{f+g}(x)=D_f(x)+D_g(x)$ נובע מההגדרות

$$(f+g)(x)=f(x_0)+D_f(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)+g(x_0)+D_g(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

- $D_f=A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ על U פתוחה וקשירה פוליגונלית, אזי על U מתקיים $f(x)=Ax+\overrightarrow{c}$ על ידי כך שנביט ב $f-Ax$.

טענה 10.7 תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, $f : U \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב $x_0 \in U$. אזי f רציפה ב x_0.

הוכחה: מיידי

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \to_{x \to x_0} 0$$

■

10.4 גזירה ברציפות אס"ם החלקיות קיימות ורציפות

הגדרה 10.8 נסמן עבור תחום U את $C^1(U, \mathbb{R}^m)$ להיות כל הפונקציות $f : U \to \mathbb{R}^m$ הדיפרנציאביליות (בכל $x \in U$) כך שההעתקה $x \mapsto D_f(x)$ רציפה (זוהי העתקה מ U ל $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$). בדומה נסמן את $C^1(U) = C^1(U, \mathbb{R}^1)$.

רציפות של $x \mapsto D_f(x)$ משמעה

$$\lim_{x \to x_0} \|D_f(x) - D_f(x_0)\| = 0$$

כשמדובר כאן בנורמות על מטריצות. זה שקול למשל לכך שלכל i, j יתקיים

$$\lim_{x \to x_0} [D_f(x)]_{i,j} = [D_f(x_0)]_{i,j}$$

וזה שקול גם, כמובן, שעבור כל עמודה יתקיים

$$\lim_{x \to x_0} \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\| \to 0$$

בפרט קיבלנו שאם f דיפרנציאבילית ברציפות, גם הנגזרות החלקיות שלה קיימות רציפות. ראינו כבר שקיום של נגזרות חלקיות לא גורר דיפרנציאביליות. מסתבר, שאם בנוסף הן גם רציפות, המצב טוב יותר ויש דיפרנציאביליות ואפילו ברציפות.

משפט 10.9 תהי $f : U \to \mathbb{R}$ כאשר U פתוחה. מתקיים $f \in C^1(U)$ אם ורק אם $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(U)$ לכל $i = 1, \dots, n$.

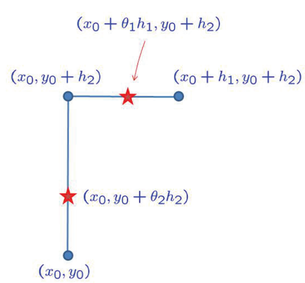
הוכחה: כיוון אחד $\Leftarrow$ ראינו כרגע. הכיוון השני: נשים לב שברגע שנדע כי f היא דיפרנציאבילית, יתקיים שעמודות הדיפרנציאל שלה אלה בדיוק הנגזרות החלקיות, ולכן הדיפרנציאל יהיה רציף. כדי להראות דיפרנציאביליות, נראה שהמטריצה $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ (היא בעצם וקטור כמובן) מקיימת את הדרוש מהדיפרנציאל. שוב לשם פשטות נעשה זאת ל $n = 2$ וההכללה תהיה ברורה. ממשפט ערך הביניים של לגראנז קיימים $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ כך ש

$$\begin{aligned} f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0) &= f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0+h_2)+f(x_0,y_0+h_2)-f(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h_1,y_0+h_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 h_2)h_2 \\ &= [\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+o_{h_1}(1)]h_1+[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+o_{h_2}(1)]h_2 \\ &= A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}+o_{h_1}(1)h_1+o_{h_2}(1)h_2 \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בסימון $f(x)=o_x(1)$ לסמן פונקציה שמקיימת ש $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. כעת נחשב

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\|f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\|o_{h_1}(1)h_1+o_{h_2}(1)h_2\|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &\le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left(\|o_{h_1}(1)\|\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\|o_{h_2}(1)\|\frac{}{\sqrt{}}\right. \\ &\le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}(\|o_{h_1}(1)\|+\|o_{h_2}(1)\|)=0 \end{aligned}$$

כרצוי. כאמור, מרגע שיודעים דיפרנציאביליות, הרציפות מיידית.



איור 35: ציור נלווה להוכחת משפט 10.9

∎

אותה הוכחה תקפה עבור n כללי, וגם עבור m כללי, ולכן המשפט הבא מתקיים

משפט 10.10 תהי $f:U\to\mathbb{R}^m$ כאשר U פתוחה. מתקיים $f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ אם ורק אם $\frac{\partial f}{\partial x_i}\in C(U,\mathbb{R}^m)$ לכל $i=1,\dots,n$.

10.5 כלל השרשרת ושימושיו

10.5.1 המשפט

אחד הכללים השימושיים ביותר, גם עבור פונקציות במשתנה אחד שלומדים בחדו"א 1, וגם בפונקציות וקטוריות של משתנה וקטורי, הוא כלל השרשרת.

משפט 10.11 יהיו $U \subset \mathbb{R}^n$ ו $V \subset \mathbb{R}^m$ פתוחות, ונניח כי $f : U \to V$ ו $g : V \to \mathbb{R}^k$. נניח כי f דיפרנציאבילית ב x_0 ו g דיפרנציאבילית ב $y_0 = f(x_0)$. אזי $h : U \to \mathbb{R}^k$ ההרכבה, $h = g \circ f$, דיפרנציאבילית ב x_0 ומתקיים

$$D_h(x_0) = D_g(f(x_0))D_f(x_0)$$

כאשר כאן מדובר בהרכבת העתקות ליניאריות או באופן שקול בכפל מטריצות.

הערה 10.12 מקרה פרטי חשוב כאשר $k = 1$ (שהיא אולי השימושית ביותר) ואז מקבלים

$$\nabla h(x_0) = \nabla g(f(x_0))D_f(x_0)$$

ואם נסמן $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ מתקיים $D_f = \begin{pmatrix} - & \nabla f_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla f_m & - \end{pmatrix}$ זאת אומרת שקיבלנו

$$\nabla h(x_0) = \nabla g(f(x_0)) \begin{pmatrix} - & \nabla f_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla f_m & - \end{pmatrix}$$

כדאי לשים לב מה המסקנה לגבי נגזרות חלקיות. הנגזרת החלקית הi-ית של h זה פשוט האיבר ה i-י בוקטור הנ"ל, ונקבל

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x_0)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

וזו נוסחא שימושית לגזור את $h(x) = g(f_1(x), \cdots, f_m(x))$ כאשר $x \in \mathbb{R}^n$. שימו לב שקל לתת לה אינטרפרטציה "גיאומטרית": אם נרצה להבין כמה h משתנה כשמשנים את x ליד x_0 בכיוון e_i, נראה כמה כל f_j משתנה, וכיצד שינוי זה (שהוא שינוי בקואורדינטה הjית של g) משפיע על g. תוכלו לבדוק בקלות שנסחא זו עודנה תקפה גם כשאר $k \neq 1$, ואז שני האגפים הם וקטורים מאורך k.

דוגמאות

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ו $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי עבור $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נקבל

$$\nabla h(x_0) = D_h(x_0) = D_g(f(x_0))D_f(x_0) = g'(f(x_0))\nabla f(x_0)$$

למשל נביט בדוגמא המספרית $f(x) = \|x\|$ זאת אומרת $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. נגדיר את $a(x) = \sum x_i^2$ ואת $b(y) = \sqrt{y}$ כך ש $f = b \circ a$.
קל לראות ש $\nabla a(x) = 2x$ וכן $b'(y) = \frac{1}{2}y^{-1/2}$ ולכן

$$\nabla f(x_0) = D_f(x_0) = \frac{1}{2}(a(x_0))^{-1/2} 2x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{\sum (x_0)_i^2}} = \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

- $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ו $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ו $h = f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אז

$$h'(x_0) = D_h(x_0) = D_f(x_0) D_\gamma(x_0) = \nabla f(x_0) \gamma'(x_0)$$

נראה גם על דוגמא חישובית: נאמר $h(t) = \|(\cos t, \sin t, t)\|$ אז $h = f \circ \gamma$ עבור f מהדוגמא הראשונה ועבור $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ולכן

$$h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \gamma'(t) = \frac{\langle (\cos t, \sin t, t), (-\sin t, \cos t, 1) \rangle}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

כמובן שבדוגמא פשוטה זו ניתן לחשב זאת גם ישירות על ידי כתיבת $h(t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2}$ וגזירה ישירה.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ ונסמן $h = f \circ A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ אזי

$$D_h = D_f \circ A$$

ובדומה $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ ונסמן $g = B \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ אזי $D_g = B \circ D_f$.

10.5.2 הוכחת המשפט

כדי להוכיח את כלל השרשרת נזדקק לטענת עזר פשוטה לגבי מטריצות, שבעצם הוכחנו בהוכחת טענה 9.18

למה 10.13 תהי $C \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ו יהיה $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|Cx\| \leq \|C\|_{HS} \|x\|$. **הוכחה:** נסמן את שורותיה של C ב $v_1, \ldots, v_m$ אזי מקושי שוורץ

$$||Cx||^2 = \sum_{i=1}^m |\langle v_i, x \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^m \|v_i\|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \|C\|_{HS}^2 \|x\|^2$$

■

הוכחה: [הוכחת כלל השרשרת] נסמן לשם פשטות $A = D_f(x_0)$ ו $B = D_g(y_0)$. מדיפרנציאביליות של f ב־ x_0 מתקיים

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

שזה אומר שאם נסמן את $a(x)=f(x)-[f(x_0)+A(x-x_0)]$, מתקיים $\|a(x)\|/\|x-x_0\|\to 0$ כאשר $x\to x_0$.

בדומה, מדיפנרציאביליות של g ב y_0 מתקיים

$$g(y)=g(y_0)+B(y-y_0)+o(\|y-y_0\|)$$

זאת אומרת ש $b(y)=g(y)-[g(y_0)+B(y-y_0)]$ מקיים $\|b(y)\|/\|y-y_0\|\to 0$ כאשר $y\to y_0$, ולכן משום ש f רציפה מתקיים גם $\frac{\|b(f(x))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}\to_{x\to x_0} 0$. נביט בהרכבה $h(x)=g(f(x))$, עלינו להראות כי

$$h(x)=h(x_0)+BA(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

נביט על כן בהפרש,

$$\begin{aligned} w(x) &= h(x)-h(x_0)-BA(x-x_0)=g(f(x))-g(f(x_0))-BA(x-x_0) \\ &= B(f(x)-f(x_0))+b(f(x))-BA(x-x_0) \\ &= B(A(x-x_0)+a(x))+b(f(x))-BA(x-x_0) \\ &= B(a(x))+b(f(x)) \end{aligned}$$

כעת עלינו להסביר מדוע

$$B(o(\|x-x_0\|))=o(\|x-x_0\|)$$

ומדוע

$$o(\|f(x)-f(x_0)\|)=o(\|x-x_0\|)$$

לשם כך עלינו לחלק את הביטויים ב $\|x-x_0\|$ ולקחת גבול כאשר $x\to x_0$. אכן

$$\frac{\|B(a(x))\|}{\|x-x_0\|}\le\|B\|\frac{\|a(x)\|}{\|x-x_0\|}\to_{x\to x_0} 0$$

וגם

$$\begin{aligned} \frac{\|b(f(x))\|}{\|x-x_0\|} &= \frac{\|b(f(x))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}=\frac{\|b(f(x))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}\frac{\|A(x-x_0)+a(x)\|}{\|x-x_0\|} \\ &\le \frac{\|b(f(x))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}\left[\frac{\|A(x-x_0)\|+\|a(x)\|}{\|x-x_0\|}\right]\le o(1)[\|A\|+o(1)]\to_{x\to x_0} 0 \end{aligned}$$

■

10.5.3 דוגמא לשימוש

נניח שנתונה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שהיא גזירה ברציפות, ושמקיימת עבור $k\in\mathbb{R}$ מסויים כי לכל $t\in\mathbb{R}$

$$f(tx)=t^kf(x)$$

אזי נובע $k\geq 1$ ונסחת אוילר מתקיימת $\langle\nabla f(x),x\rangle=kf(x)$.

אכן, מרציפות וגזירות של $f(x)$ נקבל בפרט שלכל x הפונקציה $g(t)=f(tx)$ גזירה ברציפות אבל t^k גזירה ברציפות ב־0 רק עבור $k\geq 1$. כעת נגזור את g בשתי דרכים, לפי כלל השרשרת ולפי צד ימין של המשוואה וגזירה רגילה. נסמן $\gamma(t)=tx$ זו מסילה, $\gamma'(t)=x$, ומתקיים $g=f\circ\gamma$, ולכן

$$\nabla f(tx)\cdot x=g'(t)=kt^{k-1}f(x)$$

כך שעבור $t=1$ נקבל את הנוסחא הנדרשת. נעיר שאם יודעים הומוגניות מסוג זה עבור f המוגדרת על תת קבוצה של $\mathbb{R}^n$, וגזירה שם ברציפות, עדיין החלק השני של ההוכחה תקף, רק החלק של $k\geq 1$ דרש כי f תהיה גזירה ברציפות בראשית.

הערה 10.14 השנה לא נכנסנו לעומק לדוגמאות של פונקציות על מטריצות. ועדיין, כדאי לשאול את עצמנו למשל מהו הדיפרנציאל של $\det$ הפועלת על מטריצות ריבועיות? קל להשתכנע בדיפרנציאביליות שכן חישבנו את הנגזרות החלקיות

$$\frac{\partial\det}{\partial E_{ij}}=(-1)^{i-j}\det(A_{ij})$$

וכולן יצאו רציפות (פולינומים מסדר $n-1$ באברי המטריצה ־ כמובן שזה משום ש $\det$ בעצמה היא פולינום). אבל איך נראית ההעתקה $H\to\frac{\partial}{\partial H}\det$? (זו העתקה ליניארית, שונה בכל נקודה A, שנקראת העתקת הדיפרנציאל). נעשה זאת בנקודה $A=Id$ כי שם יותר קל לחשב.

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(Id+\varepsilon H)-\det(Id)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\det\begin{pmatrix}1+\varepsilon h_{11} & \varepsilon h_{12} & \cdots & \varepsilon h_{1n}\\ \varepsilon h_{21} & 1+\varepsilon h_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \varepsilon h_{n1} & & & 1+\varepsilon h_{nn}\end{pmatrix}-1\right]\\ &= \sum_{i=1}^n h_{ii}=trace(H)\end{aligned}$$

במקרה קצת יותר כללי שבו A הפיכה, אפשר לחשב כי

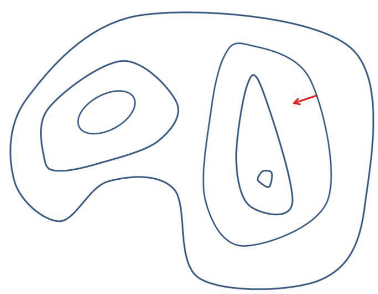
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(A+\varepsilon H)-\det(A)}{\varepsilon}=\det(A)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(Id+\varepsilon A^{-1}H)-\det(Id)}{\varepsilon}=\det(A)trace(A^{-1}H)$$

לגזור אותה בנקודות בהן $\det=0$ זאת אומרת בנקודות בהן A איננה הפיכה גם אפשרי אבל נוותר על כך בשלב זה.

עוד שאלה מסוג כזה היא מה הדיפרנציאל של ההעתקה $H : Mat_{n\times n} \to Mat_{n\times n}$ הנתונה על ידי $H(A) = A^{-1}$. שוב, עדיף קודם לגזור בנקודה פשוטה $A = Id$ ואח"כ לעבור למקרה כללי. כאן תחום ההגדרה הוא כמובן רק הפונקציות ההפיכות. זיכרו שהמקרה $n = 1$ צריך להזדהות עם הנגזרת של $H(x) = x^{-1}$.

10.5.4 הגרדיאנט

המקרה של $f : U \to \mathbb{R}$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^n$ (פתוחה, על פי רוב) חשוב לנו במיוחד. הדיפרנציאל במקרה כזה נקרא "הגרדיאנט" והוא בעצם וקטור (שורה). יש לו את התכונה הגיאומטרית החשובה והיא שהוא "מאונך לקווי הגובה של הפונקציה". לא הגדרנו מה פירוש הדבר להיות מאונך למשטח (ולמעשה גם לא הגדרנו משטח) אז כל שנאמר על כך יהיה הלמה הבאה, שהיא מסקנה ישירה מכלל השרשרת:



איור 36: הגרדיאנט מאונך לקווי הגובה

למה 10.15 תהי $f : U \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית בנקודה x_0. נסמן $S = \{x : f(x) = f(x_0)\}$. אזי לכל עקומה $\gamma : [-1,1] \to S$ המקיימת $\gamma(0) = x_0$ מתקיים

$$\nabla f(x_0) \perp \gamma'(0)$$

הוכחה: משום ש $f(\gamma(t)) = f(x_0)$ מספר קבוע, הנגזרת לפי t מתאפסת. לפי כלל השרשרת

$$\nabla f(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

ובפרט עבור $t = 0$. ■

אבחנה זו תהיה מאוד משמעותית כאשר (בחדו"א 3 למשל) תרצו למצוא מינימום ומקסימום של פונקציה תחת אילוץ. הדבר יבטיח את קיומם של "כופלי לגרנז'" שאומרים שבנקודת מקסימום של פונקציה, תחת אילוץ, הגרדיאנט של האילוץ והגרדיאנט של הפונקציה אותה ממקסמים, מקבילים.

הגרדיאנט גם עוזר לנו למצוא מועמדים להיות מינימום ומקסימום.

הגדרה 10.16 תהי $f : U \to \mathbb{R}$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה. נניח ש f גזירה ברציפות, ותהי $x \in U$. נאמר שהיא נקודה קריטית של f אם מתקיים $\nabla f(x) = 0$.

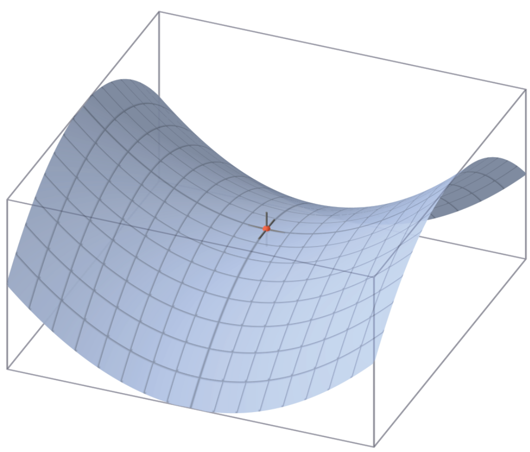
כמובן שיש לזה משמעות משום שמתקיים

טענה 10.17 תהי $f : U \to \mathbb{R}$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה. נניח ש f גזירה ברציפות, אזי עבור $x_0 \in U$ שהיא נקודת מקסימום מקומי או מינימום מקומי מתקיים $\nabla f(x_0) = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה שמתקיים $\nabla f(x_0) \neq 0$. אזי קיים $v \in \mathbb{R}^n$ עם $\|v\| = 1$ כך ש $\nabla f(x_0) \cdot v = c > 0$ (למשל $v = (\nabla f(x_0))^T$ יתאים). נביט בפונקציה $h(x_0 + tv)$ ולשים לב שיש לה מקסימום או מינימום ב $t = 0$ אבל הנגזרת שלה ב $t = 0$ היא $\nabla f(x_0)v \neq 0$. ■

כדי להחליט האם נקודה חשודה היא באמת מינימום או מקסימום, בחדו"א 1 עוברים לנגזרת השנייה. גם כאן יש צורך לעשות זאת, רק שימו לב שכשגוזרים פעמיים, זאת אומרת מחשבים את הדיפרנציאל של ∇f, אנחנו כבר גוזרים פונקציה שהיא $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, זאת אומרת הדיפרנציאל עכשיו יהיה מטריצה $n \times n$. איבריו יהיו הנגזרות המעורבות $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$. מטריצה זו נקראת ההסיאן של f, ומסתבר שתחת תנאים די חלשים, היא מטריצה סימטרית. זה נושאו של הפרק הבא.

נשים לב לעוד הבדל חשוב - במימדים גבוהים ייתכן שנקודה היא "אוכף" דהיינו מינימום בכיוונים מסויימים ומקסימום בכיוונים אחרים.



איור 37: אוכף

עוד לפני שנעבור לפרק על ההסיאן, נשים לב כיצד הוא יצטרף לתמונה בחיפוש אחרי מינימום ומקסימום (וגם בטיילור).

בהנתן $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (או $f : A \to \mathbb{R}$ כאשר $A \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה למשל), ברור למשל שנקודה x_0 היא מקסימום מקומי אם ורק אם לכל v מתקיים עבור $g(t) = f(x_0 + tv)$ שהנקודה $t = 0$ היא מקסימום מקומי. לכך יש לנו כבר תנאים מן המוכן, ולשם כך למשל צריך ראשית כל לבדוק האם $g'(0) = 0$ ואם כן, לבדוק את $g''(0)$ (אם גם הוא 0, יש לעבור לנגזרות מסדר יותר גבוה). כבר ראינו מכלל השרשרת

כי

$$g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

וכדי שיתאפס לכל v כמובן צריך $\nabla f(x_0) = 0$. כדי לבדוק מה הנגזרת השנייה נחשב

$$\begin{aligned}
g''(t) &= (\nabla f(x_0+tv)\cdot v)' = (\nabla f(x_0+tv))'\cdot v \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0+tv) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0+tv) \end{pmatrix}' \cdot v \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0+tv)\right)' v_j = \sum_{j=1}^{n} [\nabla(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0+tv))\cdot v] v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f)(x_0+tv) v_i v_j
\end{aligned}$$

ובפרט

$$g''(0) = v^T(\nabla^2 f)(x_0)v$$

וכעת צריך לגעת קצת אלגברה ליניארית כדי להבין, על ידי הבנת מהי המטריצה $\nabla^2 f(x_0)$, האם מדובר בנקודת מינימום, מקסימום, אוכף, או שמא יש לעבור לנגזרות גבוהות יותר על מנת לדעת. כדי שנוכל להפעיל אלגברה ליניארית, כדאי שנדע למשל שמדובר במטריצה לכסינה. ואכן, מדובר על פי רוב במטריצה סימטרית, וזה ממש הנושא של תת הפרק הבא.

10.6 גזירות מסדר גבוה, שוויון המעורבות כשרציפות

חוזרים לנושא של נגזרות חלקיות. תהי $f : U \to \mathbb{R}$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^n$, זאת אומרת אנו מדברים על פונקציה ממשית, במשתנה וקטורי . נזכיר כי $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial e_i} f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+he_i) - f(x)]$. התוצאה (כמו בכל פעולת גזירה) היא פונקציה חדשה, שתחום ההגדרה שלה הוא עדיין $\mathbb{R}^n$ או תת קבוצה שלו, U, והיא מחזירה מספר (המודד עד כמה הפוקציה משתנה בכיוון e_i). כמובן אפשר לבצע גזירה חוזרת של הפונקציה שקיבלנו, לפי אותו משתנה או לפי משתנה אחר.

דוגמא: $f(x,y) = x^3y - y\sin(yx)$

נחשב

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 - \sin(yx) - yx\cos(yx)\right] \\
&= 3x^2 - \cos(yx)y - y\cos(yx) + y^2x\sin(yx) \\
&= 3x^2 - 2y\cos(xy) + y^2x\sin(xy) \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2y - y^2\cos(yx)\right] \\
&= 3x^2 - 2y\cos(yx) + y^2x\sin(yx)
\end{aligned}$$

מקרה? ממש לא. הפעם ננסח ונוכיח ב $\mathbb{R}^2$ אך ההוכחה עוברת כלשונה למימד כללי.

משפט 10.18 תהי $f : U \to \mathbb{R}$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $(x_0,y_0) \in U$ כך שקיימות $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ בסביבה של (x_0,y_0), ונניח כי שתיהן גזירות ברציפות בנקודה (x_0,y_0). אזי מתקיים

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$$

(זאת אומרת המטריצה $\nabla^2 f = DDf = D^2 f$ היא סימטרית).

הערה 10.19

הוכחה: נתחיל בכך שנשים לב שהשוויון הבא מתקיים לכל k,h:

$$\frac{[f(x_0+k,y_0+h)-f(x_0+k,y_0)]-[f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)]}{hk} = \frac{[f(x_0+k,y_0+h)-f(x_0,y_0+h)]-[f(x_0+k,y_0)-f(x_0,y_0)]}{hk}$$

אם נשתמש באופן נאיבי כעת במשפט ערך הביניים של לגרנז לכל אחד מארבעת הביטויים נקבל שקיימים $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4 \in [0,1]$ (התלויים ב k,h) כך ש

$$\frac{1}{k}\left[\frac{\partial}{\partial y}f(x_0+k,y_0+\theta_1 h) - \frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0+\theta_2 h)\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta_3 k,y_0+h) - \frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta_4 k,y_0)\right]$$

אבל אנחנו רוצים קצת יותר - רוצים ש $\theta_1 = \theta_2$ וכן $\theta_3 = \theta_4$. זה קל, למשל עבור הביטוי התחתון נשתמש במשפט ערך הביניים לפונקציה

$$g(y) = f(x_0+k,y) - f(x_0,y)$$

שהרי מדובר ב $g(y_0+h) - g(y_0)$. עבור הביטוי העליון נשתמש במשפט לגרנז עבור

$$g(x) = f(x,y_0+h) - f(x,y_0)$$

קיבלנו למעשה שקיימים $\theta,\theta' \in [0,1]$ עבורן

$$\frac{1}{k}\left[\frac{\partial}{\partial y}f(x_0+k,y_0+\theta h) - \frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0+\theta h)\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta' k,y_0+h) - \frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta' k,y_0)\right]$$

וכעת ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים פעם נוספת, עבור הפונקציות הנ"ל. נקבל שקיימים η,η' כך ש

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x_0+\eta k,y_0+\theta h) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta' k,y_0+\eta' h)$$

כעת על פי רציפות נוכל לקחת את $h,k \to 0$ בשני הצדדים, ונקבל את השוויון הרצוי. ■

כמסקנה נקבל על ידי הפעלה באינדוקציה, שאם לפונקציה קיימות כל הנגזרות החלקיות מסדר k ("סדר" פירושו מספר הפעמים שגוזרים) והן רציפות, אז אפשר להחליף את סדר הגזירה. מסמנים את הגזירה k פעמים ביחס למשתנה מסוים כך

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

ועבור וקטור $\alpha = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ עם $M = \sum k_i$ מסמנים את

$$\frac{\partial^M}{\partial x^\alpha} f = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}} f$$

כאשר סדר הגזירה איננו חשוב (תחת ההנחה שהפונקציה גזירה ברציפות k_i פעמים לפי x_i לכל i).

הערה 10.20 תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ויהיה $u \in \mathbb{R}^n$ ונניח שאנו רוצים לגזור פעמיים את

$$g(t) = f(v_0 + tu)$$

למשל כי ברור שאם יש לפונקציה מקסימום מקומי ב x_0 אז גם ל g יהיה ולכן ברור שתנאי הכרחי יהיה שמתקיים $g''(0) \leq 0$. חישוב הנגזרת השנייה הוא דבר פשוט שכן יש לנו את כלל השרשרת

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt}[\nabla f(v_0 + tu) \cdot u] = \frac{d}{dt}[\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0 + tu)] \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \frac{d}{dt}[\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0 + tu)] = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n [\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}](v_0 + tu) u_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v_0 + tu) u_i u_j = u^T \nabla^2 f(v_0 + tu) u \end{aligned}$$

ובפרט $g''(0) = u^T \nabla^2 f(v_0) u$ זאת אומרת שאם לכל u מתקיים $g''_u(0) \leq 0$ המטריצה $\nabla^2 f(x_0)$ צריכה להיות מוגדרת אי חיובית. בתת הפרק הבא נשעה את טיילור כמו שצריך, ונראה גם את גורם השגיאה, למשל

$$f(v_0 + hu) = f(v_0) + h \nabla f(v_0) u + h^2 u^T \nabla^2 f(v_0) u + o(h^2)$$

וכך נסיק שאם באמת היא מוגדרת שלילית ממש (בנקודה קריטית) אז בהכרח זו נקודת מקסימום. באופן כללי בנקודה קריטית צריך לבחון את המטריצה $\nabla^2 f$ ולבדוק איזה ערכים עצמיים יש לה, ולפי זה להחליט (אם אין לה ע"ע 0 שאז צריך לעבור לנגזרות מהסדר הבא) האם היא נקודת מינימום, מקסימום או אוכף.

10.7 טור טיילור בהרבה משתנים

משפט 10.21 תהי $f : A \to \mathbb{R}$ עבור $A \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה ונניח כי היא גזירה $m+1$ פעמים ברציפות ליד $x_0 \in A$. אזי עבור $\|u\| = 1$ מתקיים

$$f(x_0 + hu) = \sum_{k=0}^{m} \frac{h^k}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0) u_{i_1} \cdots u_{i_k} + R_{m,u}(x_0, h)$$

כאשר $R_{m,u}(x_0, h) = o(|h|^m)$. יתר על כן, השארית נתונה על פי לגרנז על ידי

$$R_{m,u}(x_0, h) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_{m+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(v_0 + h'u) u_{i_1} \cdots u_{i_{m+1}}$$

עבור h' בין 0 לבין h.

הוכחה: ההוכחה היא פשוט ההוכחה של חדו"א 1 שכן כאשר מחשבים את ההפרש $f(x_0+hu) - f(x_0)$ למעשה חוקרים פונקציה במשתנה אחד, h, ואפשר להתמש בכלים של חדו"א 1. אכן, כל שעלינו לחשב זה

$$\frac{d^k}{dh^k} \left(f(x_0 + hu) - f(x_0) \right) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0 + hu) u_{i_1} \cdots u_{i_k}$$

ואת זה נעשה באינדוקציה. המקרה $k = 1$ הוא ברור, ואז

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0 + hu) u_{i_1} \cdots u_{i_k} \right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0 + hu) u_{i_1} \cdots u_{i_k} u_i \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0 + hu) u_{i_1} \cdots u_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

כעת נשתמש במשפט טיילור למשתנה אחד. ■

10.8 בעיות מיניום ומקסימום בכמה משתנים

כבר דנו בכך על קצה המזלג בשני הפרקים הקודמים, כעת ננסח את המשפטים המרכזיים.

משפט 10.22 תהי $f : A \to \mathbb{R}$ כאשר $A \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $x_0 \in A$. נניח כי f גזירה ברציפות פעמיים בכל A ונניח כי $\nabla f(x_0) = 0$. אז אם כל הערכים העצמיים של $\nabla^2 f(x_0)$ חיוביים אז x_0 מינימום מקומי, אם כל הערכים העצמיים של $\nabla^2 f(x_0)$ שליליים אז x_0 מקסימום מקומי, אם יש ל $\nabla^2 f(x_0)$ ערך עצמי חיובי וערך עצמי שלילי אז x_0 אוכף.

הוכחה: מיידית (להשלים) ■

משפט 10.23 הי $f:A\to\mathbb{R}$ כאשר $A\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהי $(x_0,y_0)\in A$. נניח כי f גזירה ברציפות פעמיים בכל A ונניח כי $\nabla f(x_0,y_0)=0$. נסמן $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ ו־$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$. אזי אם $AC-B^2<0$ הנקודה היא אוכף, אם $AC-B^2>0$ וגם $A>0$ הנקודה היא מינימום מקומי, ואם $AC-B^2>0$ וגם $A<0$ הנקודה היא מקסימום מקומי.

הוכחה: נובעת מהמשפט הקודם יחד עם כלים בסיסיים מאלגברה לינארית על ערכים עצמיים של מטריצה M סימטרית 2×2: מכפלתם היא הדטרמיננטה, ובפרט אם הם שווי סימן אז סימנם זהה לסימן של a_{11} כי זה פשוט $\langle Me_1,e_1\rangle$. ■