חדו"א 2 ־ תרגיל מס' 10

1. הוכיחו או הפריכו:
   (א) חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות ב־ $\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה פתוחה.
   (ב) חיתוך של מספר כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
   (ג) חיתוך של מספר כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
2. בכל אחת מהדוגמאות הבאות, החליטו אם $A \subset \mathbb{R}^2$ פתוחה, סגורה או לא ולא.
   (א) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x+y \neq 4\}$
   (ב) $A = \{(s,t) \in \mathbb{Q}^2\}$
   (ג) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 1\}$
   (ד) $A = \{(x, \sin x) : \; x \in \mathbb{R}\}$
3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה פתוחה וסגורה. הוכיחו ש־ $A = \emptyset$ או $A = \mathbb{R}$.
4. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וסגורה. הוכיחו ש־ $A = \emptyset$ או $A = \mathbb{R}^n$. (רמז: אחרת, קיימים $x \in A, y \in \mathbb{R}^n \setminus A$. הביטו בחיתוך של A עם קטע המחבר בין x ל־ y, והשתמשו בשאלה הקודמת).
5. (א) תהי $X \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה. ונסמן ב־ $Acc(X)$ את קבוצת נקודות ההצטברות שלה. הוכיחו ש־ $Acc(X)$ קבוצה סגורה.
   (ב) הוכיחו שגם $\bar{X} = X \cup Acc(X)$ קבוצה סגורה, ושכל קבוצה סגורה שמכילה את X, מכילה גם את $\bar{X}$. הערה: לקבוצה $\bar{X}$ קוראים הסגור (בחולם) של X. זו הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את X.
   (ג) מצאו קבוצה בת מנייה $A \subset \mathbb{R}^n$ כך ש־ $\bar{A} = \mathbb{R}^n$. קבוצה כזו נקראת קבוצה צפופה בת מנייה.
6. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. השפה של A, מסומנת ב־ $\partial A \subset \mathbb{R}^n$, הוגדרה להיות כל הנקודות ב־ $\mathbb{R}^n$ שאינן פנימיות ואינן חיצוניות. הוכיחו ש־ ∂A היא קבוצה סגורה, וש־ $x \in \partial A$ אם ורק אם x נמצא בסגור של A אך לא בפנים של A.
7. הוכיחו ש־ $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה פתוחה אם ורק אם ניתן להציגה כאיחוד זר של קטעים פתוחים (לצורך שאלה זו, גם קרן פתוחה וגם $\mathbb{R}$ נחשבים לקטעים פתוחים).
8. <u>הלמה של קנטור:</u> קבוצה $K \subset \mathbb{R}^n$ נקראת קומפקטית אם היא סגורה וחסומה. נניח ש־ $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ סדרת קבוצות קומפקטיות ולא־ריקות ב־ $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ש־ $\cap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$. (רמז: בחרו נקודה בכל קבוצה, והביטו בתת־סדרה מתכנסת).
   האם חיוני להניח שהקבוצות סגורות וחסומות?
9. עבור כל אחת מהפונקציות $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הבאות, האם קיימים $\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y)$, $\lim_{y\to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y)$ ו־ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. במידה וגבול קיים, חשבו אותו.
   (א) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
   (ב) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
   (ג) $f(x,y) = \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (ד) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{y})$