

חזו"א 2 - תרגיל מס' 2

1. הוכיחו או הפריכו (בעזרת קריטריון דרבו או בכל דרך אחרת):

- (א) אם $|f|$ אינטגרבילית רימן, אז גם f אינטגרבילית.
 (ב) אם f ו- g אינטגרביליות רימן בקטע $[a, b]$, אז גם $\max\{f, g\}$ אינטגרבילית רימן.
 2. נניח ש- $f \geq 0$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$, רציפה בנקודה $x_0 \in (a, b)$ ומקיימת ש- $f(x_0) > 0$. הוכיחו ש- $\int_a^b f > 0$.
 3. פרקו את הפונקציות הרציונליות הבאות לשברים חלקיים:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 1}{x^2 - x - 1} & \text{b. } \frac{x^5 - 3x^3 + x}{x^3 + 2x + 1} \\
 \text{c. } \frac{x^n}{x-1} \quad (\text{n טבעי}) & \text{d. } \frac{1}{(x-a)(x^2+px+q)} \quad (p^2 - 4q < 0 \text{ עבור}) \\
 \text{e. } \frac{x-1}{x^3(x^2+1)} & \text{f. } \frac{2x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}
 \end{array}$$

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } \int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2} & \text{b. } \int \frac{x^4}{x^3 - 1} dx \\
 \text{c. } \int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)} & \text{d. } \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 6} \\
 \text{e. } \int \frac{x^3 + 2}{(x^2 - 1)^2} dx & \text{f. } \int \frac{dx}{x(x^2 + 4x + 5)^2} \\
 \text{g. } \int \frac{dx}{\cos x} & \text{h. } \int \sin(ax) \cos(bx) dx, \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\
 \text{i. } \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx & \text{j. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > |a| > 0, \quad (x = \frac{a}{\cos t} \text{ נסו}) \\
 \text{k. } \int \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx & \text{l. } \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx \\
 \text{m. } \int \tan^4 x dx &
 \end{array}$$

5. תהי $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית ממש וגזירה, ותהי F פונקציה קדומה של f (כלומר, $F' = f$). הוכיחו ש-

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

6. תהי f אינטגרבילית ב- $[a-1, b+1]$. הוכיחו ש-

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0$$

(רמז: בחרו חלוקה π עם תנודה ε לכל היותר, והביטו ב- $h \ll \min_i |x_{i+1} - x_i|$)

7. ★ נניח ש- $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ו- $g(x)$ רציפה ב- \mathbb{R} . הראו ש- $g(f(x))$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.