חדו"א 2 - תרגיל מס' 4

1. הוכיחו ש- $\binom{n}{k}^{-1} = (n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ לכל $0 \le k \le n$ שלמים.

2. מצאו את השגיאה בחישוב הבא: לכל פונקציה רציפה f,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx \overset{(t=\sin x)}{=} \int_0^0 f(\arcsin t)dt = 0$$

כאשר משתמשים בשינוי המשתנים $t = \sin x$, ואת גבולות האינטגרל מחשבים לפי $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 2\pi \Rightarrow t = 0$.

3. (א) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$, ונניח ש- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L < \infty$. חשבו את

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f(nx)dx.$$

(ב) תהי f פונקציה רציפה ואי-שלילית, כך ש- $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס. חשבו את

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx.$$

4. האם האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים או מתבדרים?

(a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+(x\sin 5x)^2}$; (b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+3x^6}dx$;
(d) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$; (e) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+5x^4}}$; (f) $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{2x}\,dx$;
(g) $\int_0^\infty \sin(5x^3)dx$; (h) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx,\quad p\in\mathbb{R}$; (i) $\int_0^\infty x\sin e^{2x}\,dx$;
(j) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$; (k) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p},\quad p>0$.

5. הוכיחו ש-

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx,$$

אך אחד האינטגרלים מתכנס בהחלט, והשני רק בתנאי.

6. (א) מצאו דוגמא לפונקציה אי-שלילית ורציפה כך ש- $\int_0^\infty f(x)dx$ סופי, אך לא קיים הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(ב) האם ייתכן ש- $\int_0^\infty f(x)dx$ סופי, אך f לא חסומה?

7. תהי f פונקציה גזירה ברציפות שמקיימת $f(x) = o(x^{-\frac{1}{2}})$ כאשר $x \to \pm\infty$. נניח ש־

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx = 1.$$

הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}.$$

8. תהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה יורדת כך ש־ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

(א) הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(ב) הוכיחו שאפילו $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. (רמז: הראו קודם ש־ $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(2^n)2^n < \infty$)

9. ★ תהי $f \to [0, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה. הוכיחו ש־

$$\lim_{h\to\infty} h \int_0^\infty e^{-hx} f(x)\, dx = f(0).$$

10. נסמן $P = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. נוכיח בשלבים ש־ $P = \sqrt{\pi}/2$.

(א) הוכיחו ש־ $P = \sqrt{n} \int_0^\infty e^{-nx^2}\, dx$.

(ב) הוכיחו ש־ $1 + t \leq e^t$ לכל $t \in \mathbb{R}$. הסיקו שלכל $x \geq 0$,

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

עתה, הראו ש־

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2}\, dx \leq \int_0^\infty e^{-nx^2}\, dx \leq \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

(ג) בעזרת שינוי משתנים מתאים הוכיחו

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\, dt.$$

(ד) הזכרו בהוכחת נוסחת Wallis שראיתם בכיתה. הראו ש־ $P = \sqrt{\pi}/2$.