חדו"א 2 - תרגיל מס' 7

1. תרגול נוסף בהתכנסות טורי פונקציות: בדקו אילו מהטורים הבאים מתכנס במ"ש בתחום הנתון:

   (א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}),\ \ 1/2 \le |x| \le 2;$

   (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\ \ 0 \le x < \infty;$

   (ג) $\sum \min\left(xn!, \frac{1}{xn!}\right),\ \ 0 < x < \infty$

2. תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר $f_n(x) = f(\frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor)$. הוכיחו ש- $f_n \to f$ במ"ש ב- $[0,1]$. (כלומר, אפשר לקרב פונקציה רציפה במידה שווה ע"י פונקציות מדרגה).

3. נסמן ב- R_1, R_2 את רדיוסי ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ בהתאמה.

   (א) נניח ש- $R_1 \neq R_2$. מהו רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$?

   (ב) מצאו דוגמא עם $R_1 = R_2 = 1$, אך ל- $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ רדיוס התכנסות שונה מ- 1.

4. קריטריון d'Alembert: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם $a_n \neq 0$ החל ממקום מסויים. הוכיחו שרדיוס ההתכנסות R של הטור מקיים

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

   במידה והגבול קיים במובן הרחב. (הקריטריון פחות כללי מנוסחת קושי-הדמרד, אך לפעמים נוח יותר לחישוב).

5. מצאו ביטויים סגורים (בלי סכום) לטורי החזקות הבאים, וחשבו רדיוס התכנסות:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

6. (א) פתרו את המשוואות הבאות במספרים מרוכבים: $z^4 = i, z^2 = i, z^2 = 1 + i$. ציירו את הפתרונות במישור המרוכב.

   (ב) חשבו את הסכום $\sum_{n=-N}^{N} e^{i\theta n}$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

7. הוכיחו שסדרת מספרים מרוכבים מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. (הגדירו סדרת קושי). הסיקו שהתכנסות בהחלט גוררת התכנסות רגילה, גם במרוכבים.

8. (א) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים, כך שלכל n ולכל $x \ge 0$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x) \ge 0 \tag{1}$$

   הוכיחו שטור טיילור של f סביב הראשית מתכנס בכל $\mathbb{R}$.
   (רמז: אפשר להשתמש בנוסחא האינטגרלית לשארית בטור טיילור, ולהראות ש- $R_n(x) \le (x/y)^{n+1} R_n(y) \le (x/y)^{n+1} f(y)$ לכל $0 < x < y$).

   (ב) כנ"ל, רק שמחליפים את (1) ב- $(-1)^n f^{(n)}(x) \ge 0$ לכל $x \ge 0$ ולכל n.

9. ★ בנו סדרה חיובית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $a_n \to 0$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אך בכל זאת, לכל תת סדרה יורדת $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתקיים ש- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \le 1$.