חדו"א 2 - תרגיל מס' 8

1. לפתח לטור חזקות (סביב $x_0=0$) את הפונקציות הבאות, ולמצוא רדיוס התכנסות:

$$(a)\ \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right),\quad (b)\ (1+x^2)\arctan(x),\quad (c)\ \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

$$(d)\ \frac{x}{(1-x)(1-x^2)},\quad (e)\ \frac{1}{1-x+x^2},\quad (f)\ \sin^3 x$$

(כדאי לפשט את $\sin^3 x$ באמצעות זהויות טריגונומטריות).

2. (א) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת אי-שלילית, ותהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. הראו ש-

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(ב) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו ש-

$$\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} (|a_{n+1}|)^{1/n}.$$

3. חשבו את הסכומים הבאים, באמצעות טורי חזקות:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n},\quad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}.$$

4. מצאו טור חזקות $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$, שמתכנס בכל $\mathbb{R}$, כך ש-

(א) $f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(x)=f(x)\ \ \forall x$

(ב) $f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(x)=-f(x)\ \ \forall x$

5. נניח $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ עם רדיוס התכנסות $R>0$, ונניח גם ש- $a_0=1$. נגדיר $b_0=1$ ובאופן ריקורסיבי $b_n=-\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k}$ עבור $n\ge 1$. הוכיחו שלטור $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ יש רדיוס התכנסות חיובי, ושבתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n.$$

6. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת פיבונצ'י: $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$. נסמן $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. הוכיחו ש- $f(x)=1/(1-x-x^2)$ בתחום ההתכנסות, מצאו את הפרוק לשברים משולבים ורשמו את סדרת פיבונצ'י כסכום של שתי סדרות הנדסיות.

7. השתמשו בכך ש־ $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ ו־ $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$, (קבוע אוילר), וחשבו את הסכומים הבאים:

(א) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\dots$

(ב) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\dots$

8. נתונים שני טורים מתכנסים, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ ו־ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. ידוע גם שאחד מהם, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, מתכנס בהחלט.

(א) נסמן $A_n = \sum_{k=n}^{\infty}|a_k|$, $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$. הראו ש־

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0.$$

(ב) הוכיחו ש־

$$\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ג) משפט Martens: נסמן $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. אזי

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = AB$$

(רמז: $\sum_{n=0}^{N} d_n = (\sum_{n=0}^{N} a_n)B - \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}$).

9. תהי $\{a_k\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שסדרת הסכומים החלקיים שלה - חסומה. נתונה סדרת פונקציות $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת במ"ש לאפס ב־ E. ידוע גם שלכל $x \in E$, הסדרה $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית.

(א) השתמשו בסכימה בחלקים והוכיחו ש־

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k f_k(x)\right| \le 4 \max_{m\le k\le n}|A_k| \cdot \sup_{\substack{x\in E\\ m\le k\le n}} |f_k(x)|$$

כאשר $A_k = \sum_{\ell=m}^{k} a_\ell$.

(ב) הוכיחו ש־ $\sum_n a_n f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב־ E.

(ג) הראו ש־ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ מתכנס במ"ש ב־ $[0,\infty)$.