מספר סטודנט: ___________

5 בפברואר 2015

בחינה – חדו"א 2א, מועד א

סמסטר א, תשע"ה, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג, מתרגלים: אורי גרופל ולירן רותם.

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בכל חומר עזר כתוב. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. וודאו היטב את תשובותיכם לפני כתיבתן בטופס המבחן.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

(20 נקודות) 1. עבור $n \geq 1$ ו־ $x \in [0, \pi/2]$ נסמן

$$f_n(x) = \cos^n x(1 - \cos^{2n} x)$$

האם סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע $[0, \pi/2]$? הוכיחו את תשובתכם.

(20 נקודות) 2. יהיו $f,g,h:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות. הוכיחו כי $\max\{f,g,h\}$ אינטגרבילית ושמתקיים

$$\max\left\{\int_0^1 f, \int_0^1 g, \int_0^1 h\right\} \le \int_0^1 \max\{f,g,h\}$$

(20 נקודות) 3. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה, דיפרנציאבילית ב־ 0, כך שלכל מספר טבעי $n\geq 1$,

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$$

הוכיחו כי

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

(10 נקודות) 4. (א) הראו כי עבור $t > 0$,

$$\int_t^\infty e^{-x^2/2}dx = \frac{e^{-t^2/2}}{t} - \int_t^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{x^2}dx$$

(רמז: $e^{-x^2/2} = 1/x \cdot (xe^{-x^2/2})$)

(10 נקודות) (ב) הוכיחו שלכל $t > 0$,

$$e^{-t^2/2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) < \int_t^\infty e^{-x^2/2}dx < \frac{e^{-t^2/2}}{t}$$

(10 נקודות) 5. (א) תהי $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. יהי P פולינום טריגונומטרי המקיים

$$\int_0^{2\pi} P(x)dx = 0$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)P(nx)dx = 0$$

(10 נקודות) (ב) אותה השאלה, רק שהפעם P אינה בהכרח פולינום טריגונומטרי, אלא פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$ עם מחזור 2π.

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):