

5 בפברואר 2015

## בחינה - חדו"א 2א, מועד א

סמסטר א, תשע"ה, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג, מתרגלים: אורי גרופל ולירן רותם.

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בכל חומר עזר כתוב. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. וודאו היטב את תשובותיכם לפני כתיבתן בטופס המבחן.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

# בהצלחה!

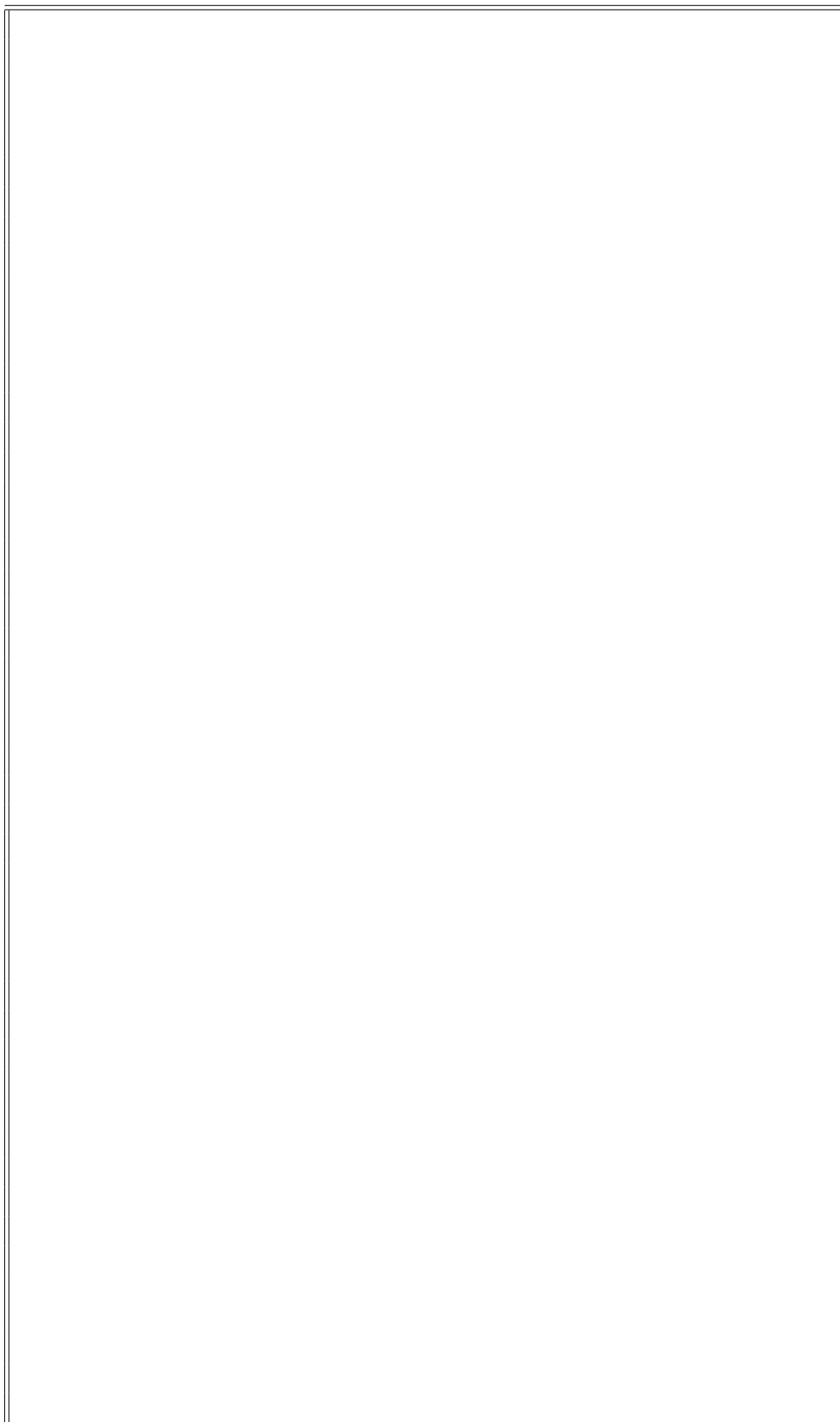
1. עבור  $n \geq 1$  ו-  $x \in [0, \pi/2]$  נסמן

$$f_n(x) = \cos^n x (1 - \cos^{2n} x)$$

האם סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע  $[0, \pi/2]$ ? הוכיחו את תשובתכם.

2. יהיו  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות. הוכיחו כי  $\max\{f, g, h\}$  אינטגרבילית ושמתקיים

$$\max \left\{ \int_0^1 f, \int_0^1 g, \int_0^1 h \right\} \leq \int_0^1 \max\{f, g, h\}$$

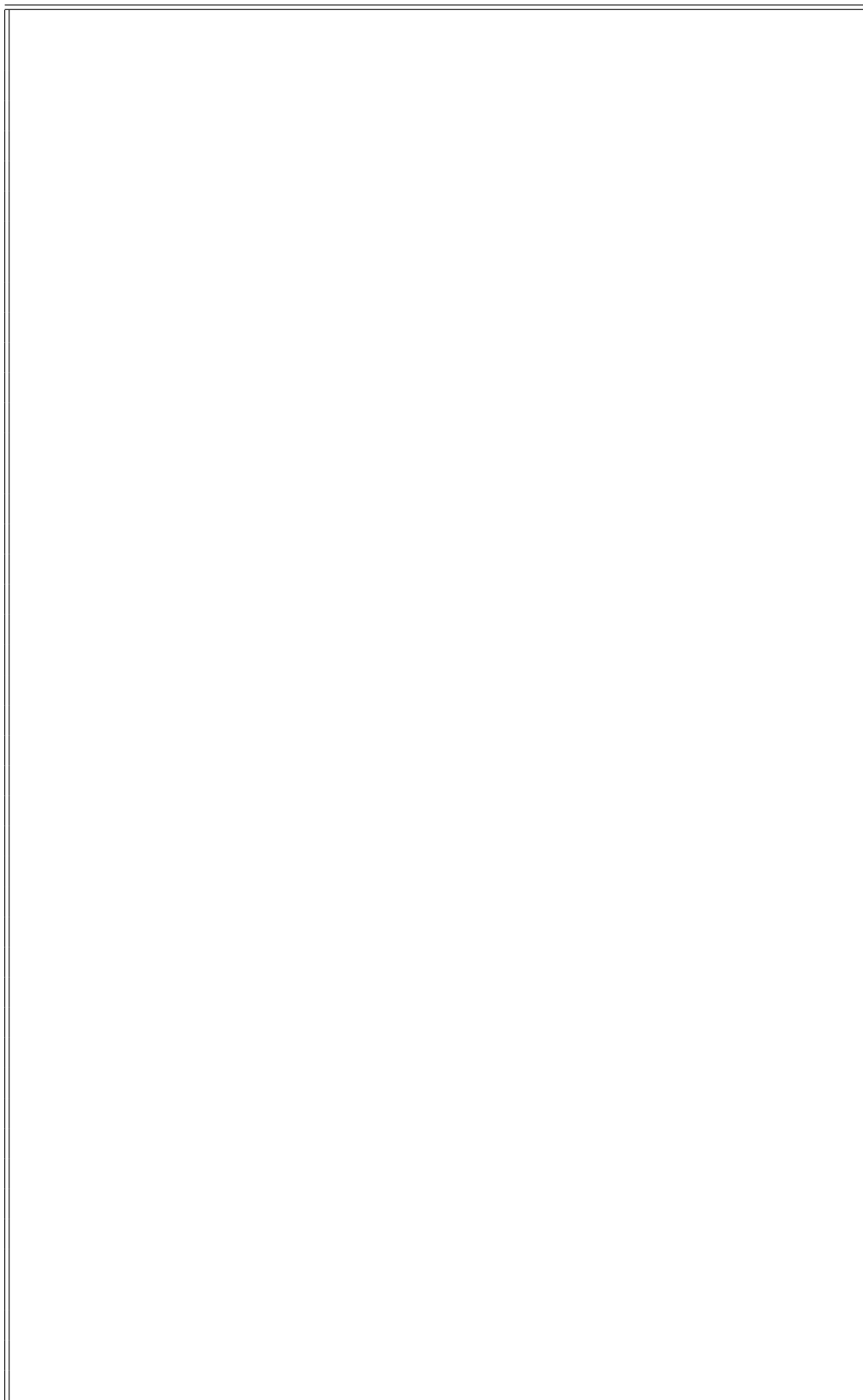


3. תהי  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה, דיפרנציאבילית ב- $0$ , כך שלכל מספר טבעי  $n \geq 1$ ,

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$$

הוכיחו כי

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$



(10 נקודות)

4. (א) הראו כי עבור  $t > 0$ ,

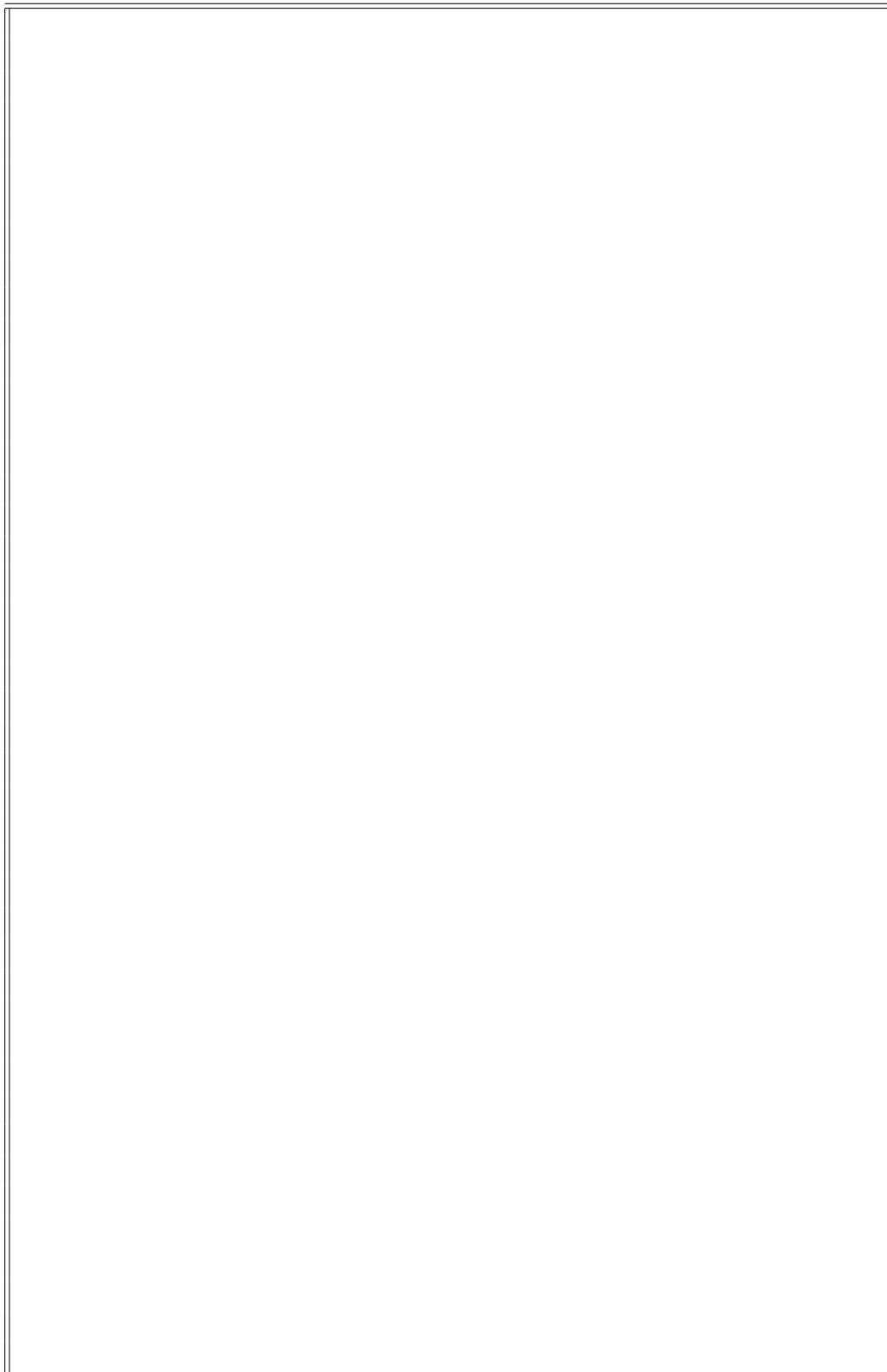
$$\int_t^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{t} - \int_t^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{x^2} dx$$

(רמז:  $e^{-x^2/2} = 1/x \cdot (xe^{-x^2/2})$ )

(10 נקודות)

(ב) הוכיחו שלכל  $t > 0$

$$e^{-t^2/2} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) < \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx < \frac{e^{-t^2/2}}{t}$$



5. (א) תהי  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. יהי  $P$  פולינום טריגונומטרי המקיים (10 נקודות)

$$\int_0^{2\pi} P(x) dx = 0$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) P(nx) dx = 0$$

(ב) אותה השאלה, רק שהפעם  $P$  אינה בהכרח פולינום טריגונומטרי, אלא פונקציה רציפה על  $\mathbb{R}$  עם מחזור  $2\pi$ . (10 נקודות)

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

