

6 במרץ 2015

## בחינה - חדו"א 2א, מועד ב

סמסטר א, תשע"ה, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג, מתרגלים: אורי גרופל ולירן רותם.

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בכל חומר עזר כתוב. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. וודאו היטב את תשובותיכם לפני כתיבתן בטופס המבחן.

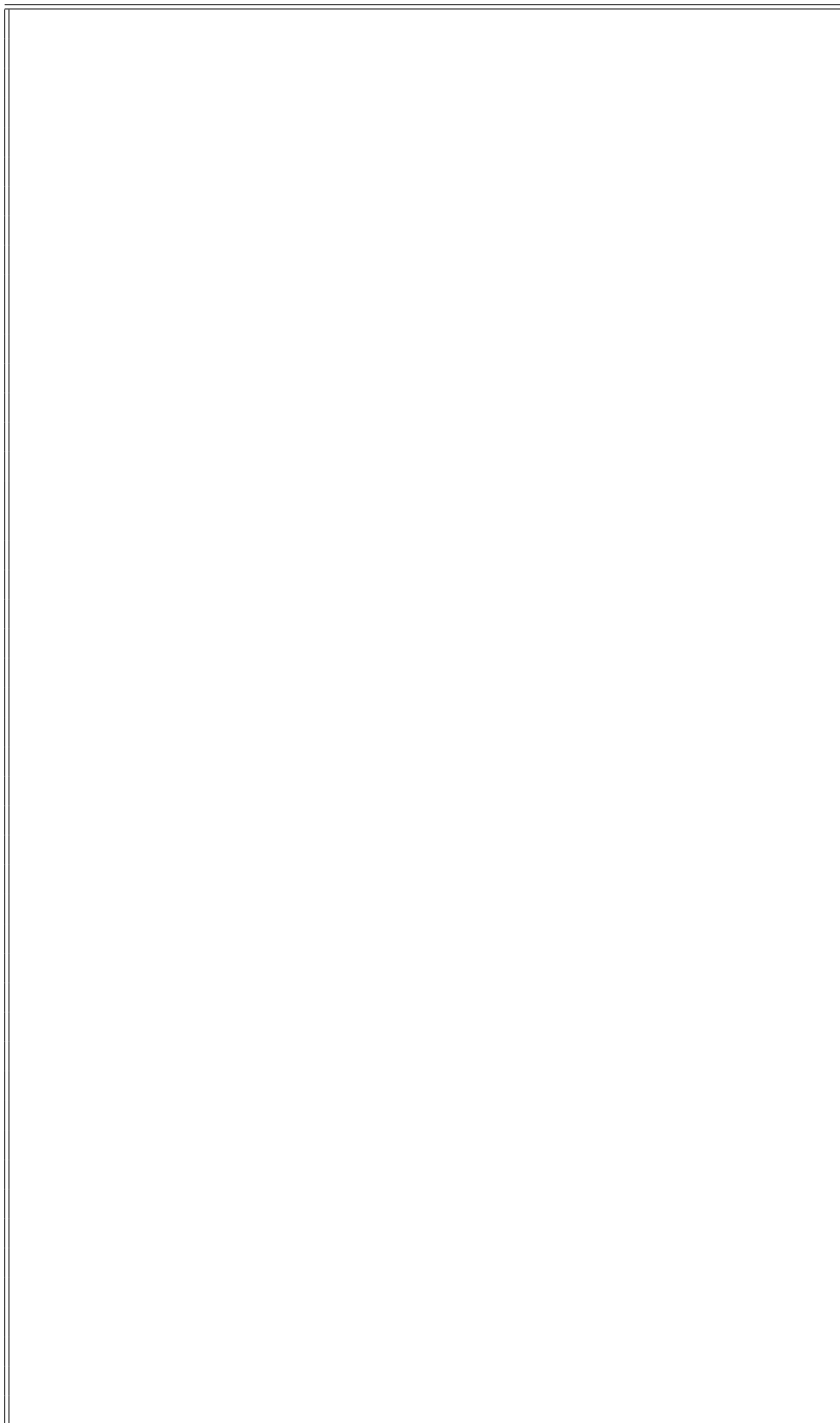
מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

# בהצלחה!

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin x}{(e^x - 1) \log(1 + x)} dx$$

מתכנס? הוכיחו את תשובתכם.

2. תהי  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  בעלת נגזרות חלקיות רציפות. תהי  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  קבוצה חסומה. הוכיחו ש-  $f$  היא פונקציית ליפשיץ ב-  $K$ .  
(כלומר, קיים  $L$  כך ש-  $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$  לכל  $x, y \in K$ )



(20 נקודות)

3. נתון ש-  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה  $2\pi$ -מחזורית, גזירה פעמיים ברציפות, עם  $\int_0^{2\pi} f = 0$  ובנוסף לכל  $t \in \mathbb{R}$

$$f''(t + \pi/2) + 3e^{it}f(t) = 0$$

הוכיחו כי  $f$  היא פונקציית האפס.

(15 נקודות)

4. (א) הוכיחו כי עבור  $k \geq 1$  טבעי,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2} dx = (2k-1)!!$$

כאשר  $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)$ .

(ב) חשבו את

(5 נקודות)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx$$

(רמז: אפשר, למשל, להוכיח ש-  $|\sum_{k=0}^n (-1)^k (tx)^{2k} / (2k)!| \leq \exp(|tx|)$ . יש גם פתרונות אחרים)

5. נתונה פונקציה רציפה וחיובית  $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  כך ש-  $\int_0^\infty f$  מתבדר. הוכיחו שקיימת פונקציה אי-שלילית  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , אינטגרבילית על כל תת-קטע סופי של  $[0, \infty)$ , כך ש-  $\int_0^\infty fg$  מתבדר ו-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

(רמז: מצאו אינסוף קטעים זרים שעל כל אחד מהם האינטגרל של  $f$  הוא לפחות 1)

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

