I

פתרון תרגיל מס' 11 (שאלות 1-4)

① נוכיח שהגבול קיים ושווה 0 ע"י שנחסום אותו בערך מוחלט:

$$0 \le \left|\frac{x^2y-y^2x}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|}_{\le \frac{1}{2}} \cdot |x-y|$$

הפונקציה $h(x,y)=|x-y|$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ (כהרכבה של רציפות)

בפרט ב-$(0,0)$, לכן קיים $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} h(x,y)=h(0,0)=0$.

מכלל הסנדוויץ' נקבל שגם הגבול שלנו:

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y-y^2x}{x^2+y^2}$ קיים ושווה לאפס.

<u>הערה:</u> אפשר שיטת מההגדרה: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ כך שאם

(*) $\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ אז $|x-y|<\varepsilon$. באמת (*) גורר בפרט $|x|<\frac{\varepsilon}{2}$,

$|y|<\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן $|x-y|\le|x|+|y|<\varepsilon$.

② $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. נסמן D_f (D_g) את קבוצת נקודות

הרציפות של f (של g) ב-$\mathbb{R}$.

נגדיר $\varphi(x,y)=f(x)+g(y)$, ונסמן $D_\varphi\subseteq\mathbb{R}^2$ קב' נק' הרציפות של φ.

<u>טענה:</u> $D_\varphi=D_f\times D_g=\{(x,y)\mid x\in D_f,\ y\in D_g\}$

<u>הוכחה:</u> נראה תחילה הכלה $\supseteq$: נניח $x_0\in D_f$, $y_0\in D_g$.

יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta_1>0$ כך שאם $|x-x_0|<\delta_1$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. (i)

קיים $\delta_2>0$ כך שאם $|y-y_0|<\delta_2$ אז $|g(y)-g(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. (ii)

יהי $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. אז לכל $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$ (כלו' (x,y)

כך ש- $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$) יקיים בפרט $|x-x_0|<\delta_1$ וגם $|y-y_0|<\delta_2$

ולכן:

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| = |f(x)+g(y)-f(x_0)-g(y_0)| \le$$

$$\le \underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{\text{מ-(i), קטן מ-}\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x)-g(x_0)|}_{(ii)} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

לכן $(x_0,y_0)\in D_\varphi$.

נראה שאין נקודות רציפות נוספות של φ.

נניח (x_0,y_0) כך ש- $y_0 \notin D_g$. מהנחה זו

נובע שקיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\delta>0$ יש y_δ שמקיימת $|y_\delta-y|<\delta$

אבל $|g(y_\delta)-g(y_0)|>\varepsilon_0$. אזי:

$$|\varphi(x_0,y_\delta)-\varphi(x_0,y_0)| = |\cancel{f(x_0)}+g(y_\delta)-\cancel{f(x_0)}-g(y_0)|>\varepsilon_0$$

וזאת אף ש- $d((x_0,y_\delta),(x_0,y_0)) = |y_\delta-y_0|<\delta$.

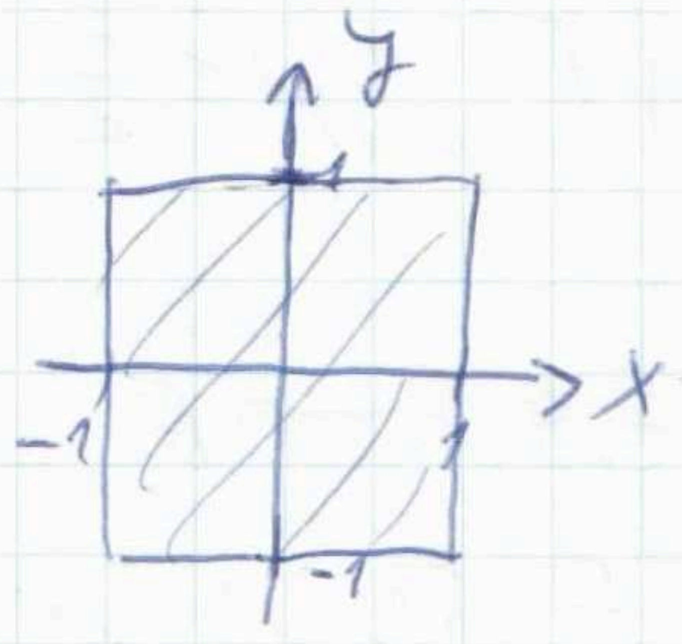
במילים אחרות: מצאנו סדרה של נקודות $\{(x_0,y_{\frac{1}{n}})\}_{n=1}^{\infty}$ (לקחתי $\delta=\frac{1}{n}\to 0$)

כך שהן שואפות ל- (x_0,y_0) אבל הפרש הערכים של φ

$|\varphi(x_0,y_{\frac{1}{n}})-\varphi(x_0,y_0)|$ נותר חסום מלמטה ולא שואף ל-0.

באופן סימטרי אם $x_0\notin D_f$, אז (x_0,y_0) לא נק' רציפות של φ.

(כאן, כמובן, "נקפיא" את y_0 ונמצא סדרה שמשנה רק ב- x) ■



③ א) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$

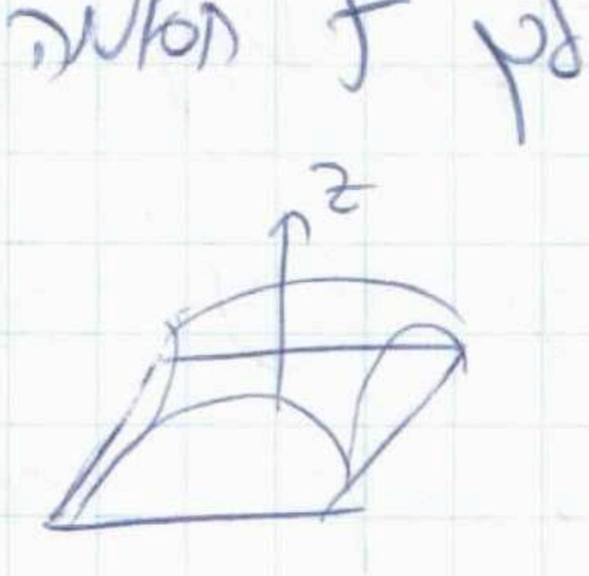
תחום הגדרה: $1-y^2\geq 0$ וגם $1-x^2\geq 0$

$|y|\leq 1$ וגם $|x|\leq 1$

הפונקציות $\sqrt{1-x^2}$ ו- $\sqrt{1-y^2}$ רציפות

בתחום הגדרתן, ולכן (לפי תרגיל ②) $f(x,y)$ רציפה בתחום הגדרתה.

זהו תחום חסום וסגור, כלומר קומפקטי, לכן f חסומה בו.



המשטח $z=f(x,y)$ נראה (בערך)

כמו בציור:

ב) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

ראשית, נבדוק אם קיים גבול בנק' הבעייתית $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\rho^2}$$

$$=\lim_{\rho\to 0} \rho\cdot(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi) = 0$$

בלי תלות ב- φ

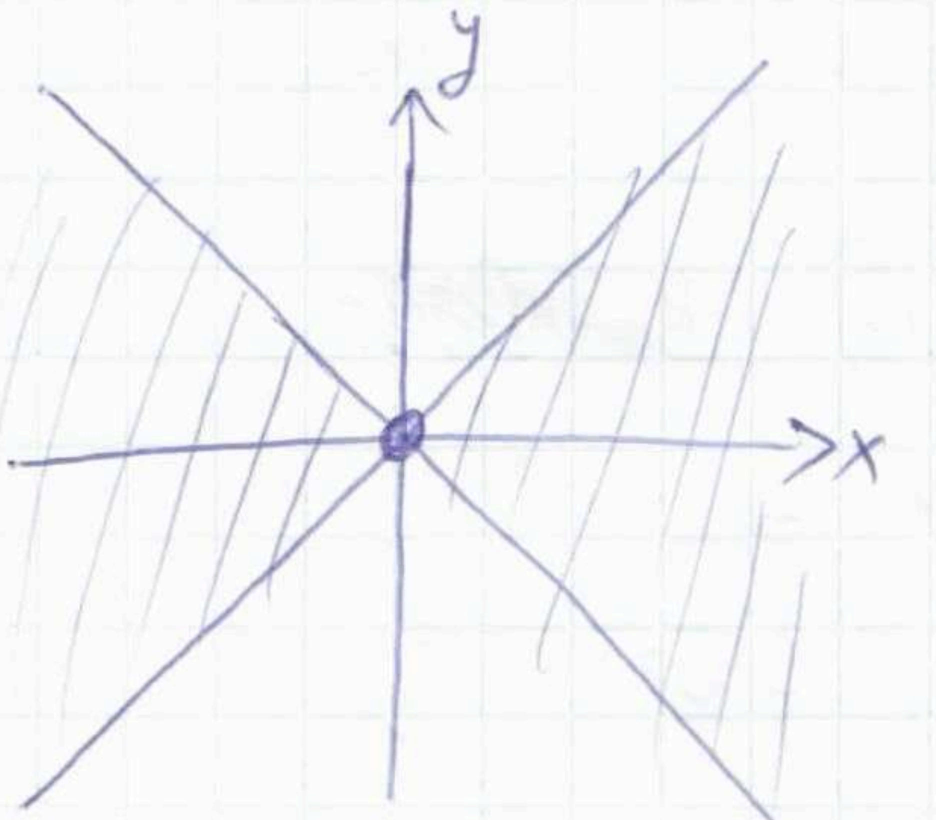
II

לכן ניתן להגדיר $f(0,0)=0$ ולקבל ש- f רציפה בכל R^2.
תחום ההגדרה כעת: R^2

f אינה חסומה [ראינו כבר שבקורדינטות פולריות:
$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \rho(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$$
ואם נבחר ρ מאוד גדול ו- $\varphi=0$ לדוגמה, נקבל ערך גדול כרצוננו]

f רציפה, כי בכל $(x,y)\neq(0,0)$ היא הרכבה של פונקציות רציפות (והמנה לא מתאפסת), וב- $(0,0)$ בדקנו בנפרד.

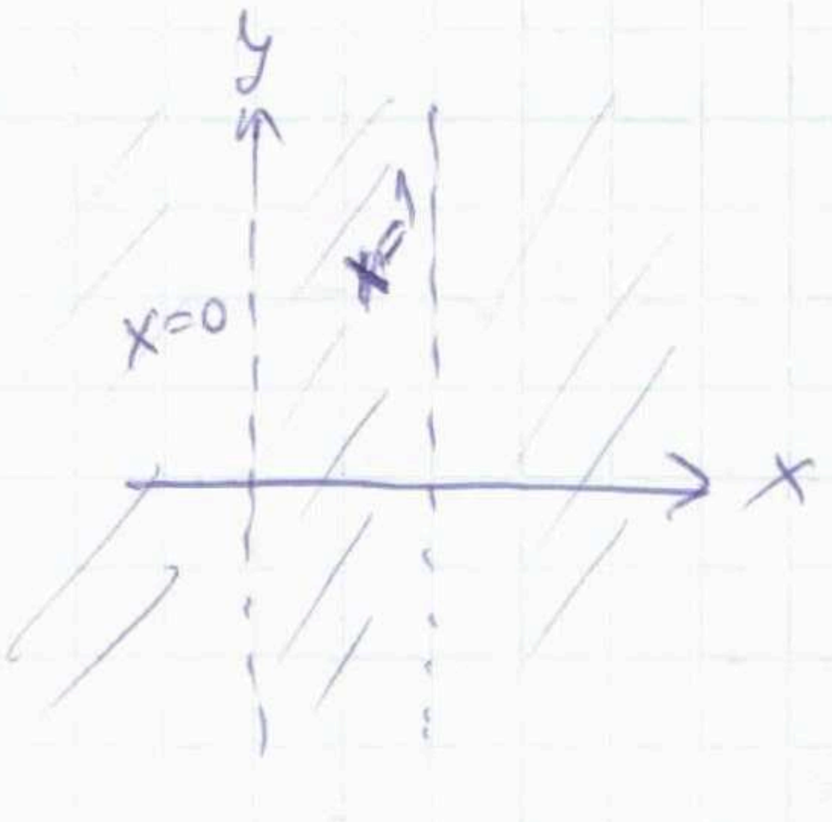
ג) $$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$$



תחום הגדרה: $\{x\neq 0\}\cap\{|\frac{y}{x}|\le 1\}$
$\{x\neq 0\}\cap\{|y|\le|x|\}$
התחום מקווקו בציור. (בלי $(0,0)$)

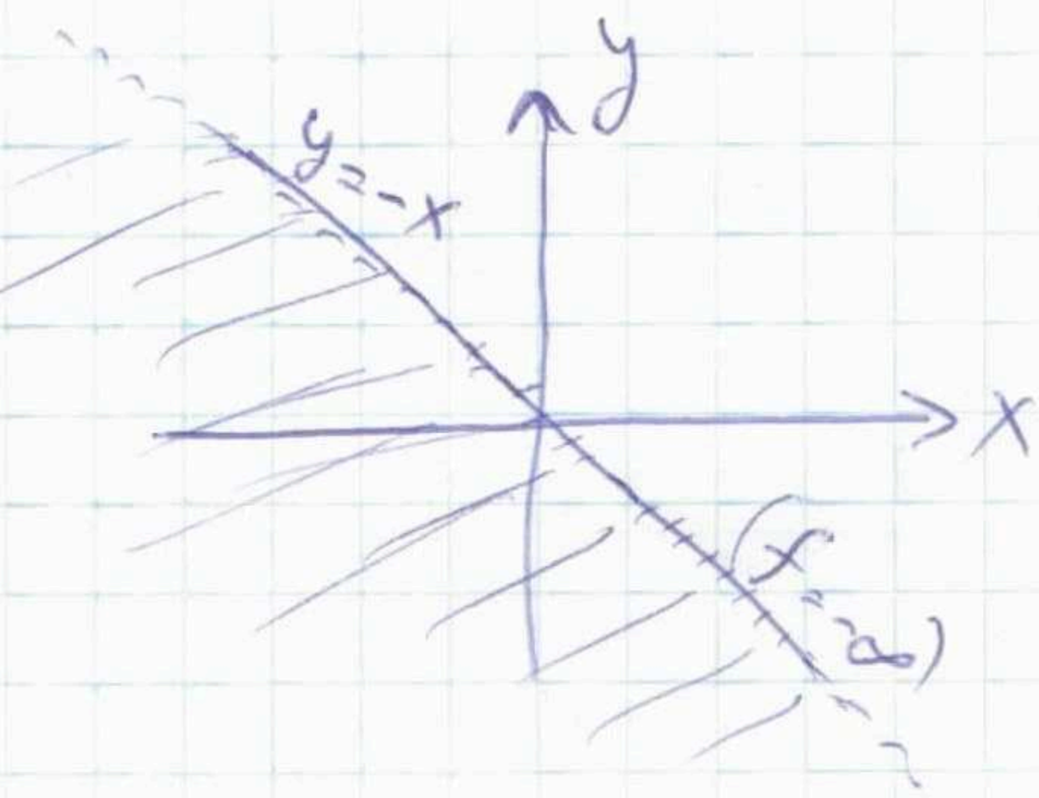
כיוון ש- arcsin פונקציה חסומה (מחזירה ערך בין $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$), גם $f(x,y)$ חסומה.
$f(x,y)$ גם רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות ומוגדרות [הכוונה כאן שהמנה $\frac{y}{x}$ רציפה כש- $x\neq 0$, ואז מרכיבים עליה $\arcsin(\cdot)$].

ד) $$f(x,y)=\frac{y-x^2}{x(x-1)}$$



תחום הגדרה: $\{x\neq 0\}\cap\{x\neq 1\}$
כלומר $D=\{(x,y)\mid x\neq 0,\ x\neq 1\}$,
זהו המישור R^2 שהוצאו ממנו שני ישרים.
בתחום זה f מנה של פונקציות רציפות ב- $(x,y)\in D$
ולכן רציפה.
נראה שהפונקציה לא חסומה: לכל M נרצה למצוא נק' $(x,y)\in D$
כך ש- $$y>x^2+Mx(x-1) \Leftarrow \frac{y-x^2}{x(x-1)}>M$$
וברור שקיימות כאלה (למשל $(2,10+2M)$).

(ה) $f(x,y)=\ln(-x-y)$



$D=\{(x,y) \mid -x-y>0\} =$

$=\{(x,y) \mid -x>y\}$

התחום בציור, בלי קו השפה $y=-x$.

ב- D הפונקציה רציפה (שיקולים רגילים)

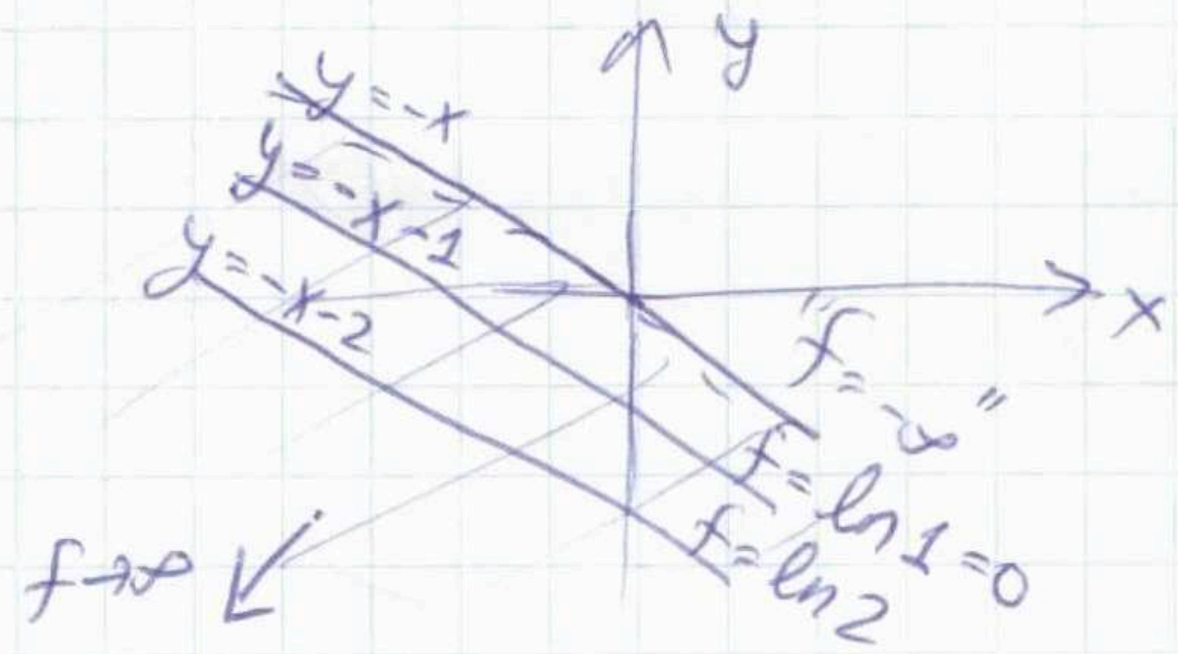
ולא חסומה, כי ln לא חסומה.

[ניקח נק' (x,y) רק ש- $-x-y$ מאוד גדול...]

הערה: למעלה, f תלויה רק ב- $c=-x-y$

צ"ל שלאורך הישרים $y=-x-c$ היא קבועה, וערכה $\ln c$.

אם נצייר קווים אלה, נקבל קו' גובה:



אם נלך בניצב לקוו' הגובה (על $y=x$ למשל)

נראה משהו כמו גרף של $\ln(-2x)$,

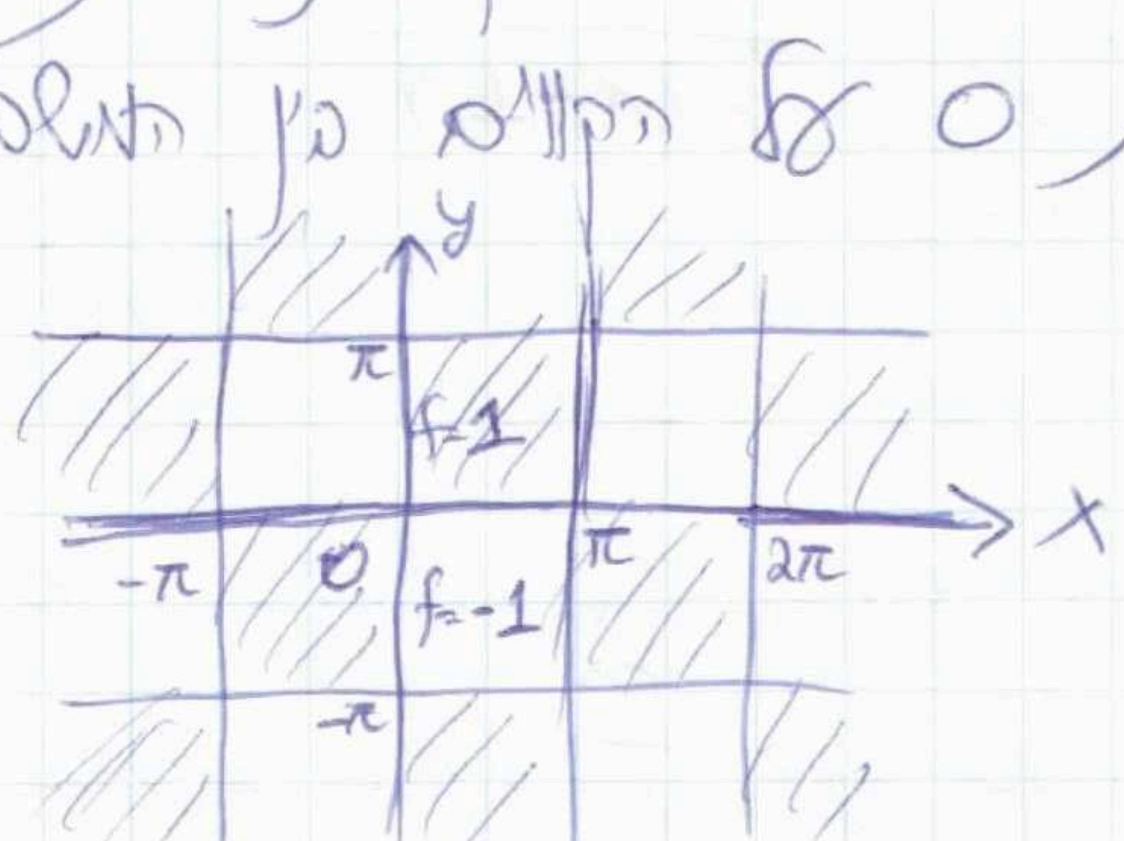
בהכללה מתאימה.

(ו) $f(x,y)=\mathrm{sign}(\sin(x)\sin(y))$

$$\mathrm{sign}(h)=\begin{cases}1, & h>0\\ 0, & h=0\\ -1, & h<0\end{cases}$$

ה-sign מקבלת רק שלושה ערכים:

תחום ההגדרה של f הוא כל $\mathbb{R}^2$. היא מקבלת את הערכים $+1$, -1, כמו "לוח שחמט", ואת 0 על הקווים בין המשבצות:



באיזורים המקווקוים $f=1$

באיזורים הלבנים $f=-1$

על הקוים $x=\pi k$ או $y=\pi k$

לכן $\sin(x)\sin(y)=0$.

ברור מכאן ש- f לא רציפה. f חסומה.

III

(4) <u>טענה:</u> אם $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ רציפה ב- x_0

$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ רציפה ב- $f(x_0)$

אז $g\circ f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ רציפה ב- x_0.

<u>הוכחה:</u> נזכר בהגדרה של רציפות f ב- x_0:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0:\ \forall x\in\mathbb{R}^m,\ d_m(x,x_0)<\delta_1 \to d_n(f(x),f(x_0))<\varepsilon. \qquad (1)$$

שים לב שהמרחק הראשון הוא ב- $\mathbb{R}^m$, והשני הוא ב- $\mathbb{R}^n$.

כעת, מהגדרת הרציפות של g בנק' $f(x_0)$ [בדומה]:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0:\ \forall y\in\mathbb{R}^n,\ d_n(y,f(x_0))<\delta_2 \to d_k(g(y),g(f(x_0)))<\varepsilon \qquad (2)$$

ולהוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נבחר δ_2 שיקיים את (2). כעת, נציב $\delta_2=\varepsilon$ בתנאי (1) ונקבל קיום של $\delta_1>0$ כך ש- $d_m(x,x_0)<\delta_1$ גורר $d_n(f(x),f(x_0))<\delta_2$.

אבל אז ~~ב~~ זה יגרור (לפי (2), $y=f(x)$) ש- $d_k(g(f(x)),g(f(x_0)))<\varepsilon$.

מסקנה: לכל $\varepsilon>0$ מצאנו $\delta_1>0$ כך ש- $d_m(x,x_0)<\delta_1$ גורר $\varepsilon>d_k((g\circ f)(x),(g\circ f)(x_0))$, כפי שרצינו!

$\boxtimes$

(5) <u>טענה:</u> $f:\mathbb{R}^a\to\mathbb{R}^b$ רציפה $\Longleftrightarrow$ לכל $A\subseteq\mathbb{R}^b$ פתוחה, גם $f^{-1}(A)$ פתוחה.

<u>הוכחה:</u> ($\Rightarrow$) לפי הגדרה, f רצו רציפה אמ"מ לכל $x_0\in\mathbb{R}^a$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x_0,x)<\delta$ אז $d(f(x_0),f(x))<\varepsilon$.

כלומר, "אם $x\in B_\delta(x_0)$ אז $f(x)\in B_\varepsilon(f(x_0))$" $\Longleftrightarrow f(B_\delta(x_0))\subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.

($\Leftarrow$) אם $A\subset\mathbb{R}$ פתוחה, נתבונן ב- $x_0\in f^{-1}(A)$. אז $f(x_0)\in A$, לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B_\varepsilon(f(x_0))\subseteq A$. אז קיים $\delta>0$ כך ש- $f(B_\delta(x_0))\subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ - כלומר כל הנק' ב- $B_\delta(x_0)$ הן ב- $f^{-1}(A)$, וכנדרש מצאנו כדור פתוח סביב x_0 שמוכל בקבוצה.

~~2) אם $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $A\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה~~

$(\Rightarrow)$ נניח שלכל $A \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה, $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

יה' $x_0 \in \mathbb{R}^2$. אז לכל $\varepsilon>0$, הקבוצה $A = B_\varepsilon(f(x_0))$ פתוחה

לכן הקבוצה $\underset{x_0}{f^{-1}}(A) \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, כלומר קיים

$\delta>0$ כך ש- $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(A)$.

ז"א, $f(B_\delta(x_0)) \subseteq A = B_\varepsilon(f(x_0))$, שזה שקול להגדרת רציפות.

<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2</u>

פתרון תרגיל 11.

6) נתונה סדרת פונקצית רציפות $f_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. נראה כי הקבוצה

$$A=\left\{(x,y)\middle|\inf_n f_n(x,y)<0\right\}$$

פתוחה.

נניח כי $(x,y)\in A$ נקודה כלשהיא. כיוון שזו נקודה של A קיים n כך ש- $f_n(x,y)<0$ לפי הגדרת A. כייון ש f_n רציפה (לפי הנתון) קיימת סביבה $U\subset\mathbb{R}^2$ כך ש $f_n(x',y')<0$ לכל $(x',y')\in U$. בפרט $U\subset A$. כלומר, כל נקודה של A היא נקודה פנימית – A פתוחה.

7) נתון כי $A,B\subset\mathbb{R}^2$ קשירות מסילתית.

- $A\cap B$ לא בהכרח קשירה מסילתית.
- $A\cup B$ לא בהכרח קשירה מסילתית (דוגמא – אין מסילה בין אנגליה ליפן)
- אם יש חיתוך לא טריוויאלי הקבוצות כן קשורות מסילתית.
- $A=\left\{x^2+y^2<1\right\}$, $B=\left\{x^2+y^2\geq 1\right\}$ קבוצות זרות שהחיתוך בינן קשיר מסילתית.

8) נתון כי $A,K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצות זרות כך ש-K קומפקטית ו-A סגורה. נראה כי

$$\inf_{x\in K,y\in A}\|x-y\|>0$$

נניח בשלילה כי $\inf_{x\in K,y\in A}\|x-y\|=0$. כלומר קיימת סדרת נקודות $x_n\in K$ ו- $y_n\in Y$ כך ש-

$$\|x_n-y_n\|\to 0$$

נסתכל על סדרת הנקודות $x_n\in K$. מצד אחד, זו סדרה חסומה (כיוון ש-K קומפקטית) ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k}\to x$, בפרט, הגבול מקיים $x\in K$ (זאת מכיוון ש-K קומפקטית ובפרט סגורה) .
מצד שני, אם $x_{n_k}\to x$ ו- x_{n_k} נקודות שהולכות ומתקרבות ל-A כרצוננו אז x היא גם נקודות הצטברות של A. אך כיוון שהנחנו כי A סגורה מתקיים גם $x\in A$. זאת בסתירה לכך ששתי הקבוצות זרות.

שאלה: האם התרגיל היה נשאר נכון אם היינו מוותרים על הדרישה כי K קומפקטית. האם תוכלו לתת דוגמה של שתי קבוצות סגורות (אך לא קומפקטיות) עבורן $\inf_{x\in K,y\in A}\|x-y\|=0$ למרות שהן זרות?

(9

א) ראשית נשים לב כי

$$\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(\pi n!x)=\begin{cases}1 & n!x\in\mathbb{Z}\\ 0 & else\end{cases}$$

אבל, מצד אחד, אם x רציונאלי, עבור n גדול מספיק $n!x$ יהיה שלם. מצד שני, אם x אינו רציונאלי $n!x$ אף פעם לא יהיה רציונאלי.

ב) אפשר להראות (בעזרת הרמז שבתרגיל) כי $\cos(\pi n!e)\to 1$ ולפיכך

$$0=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(\pi n!e)\neq\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(\pi n!e)=1$$

(10

<u>**תזכורת:**</u> $f(x,y)$ רציפה במ"ש בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש

$$d((x,y),(x_0,y_0))\Rightarrow\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$$

לכל $(x_0,y_0)\in D$.

ב) הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ רציפה במ"ש במישור. נשים לב כי במקרה שלנו

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|=\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

ומצד שני, לפי הגדרה

$$d((x,y),(x_0,y_0))=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

ג) הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{xy}$ רציפה במ"ש בתחום $\{0\le x\le1,0\le y\le1\}$ לפי משפט קנטור. (אם פונקציה רציפה בתחום קומפקטי אז היא רציפה במ"ש בתחום)