פתרונות לתרגיל מס' 7

1. א. נשתמש במבחן ויירשטרס:

לכל $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$, $|x|^n \le 2^n$ וגם $|x|^{-n} \le 2^n$

$$\Leftarrow \quad |x^n + x^{-n}| \le |x|^n + |x|^{-n} \le 2 \cdot 2^n$$

$$|u_n(x)| = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} |x^n + x^{-n}| \le \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$$

$$\forall |x| \in [\tfrac{1}{2}, 2]$$

חסמנו את טור הפונקציות $\sum u_n(x)$ בערך מוחלט, איבר-איבר, ע"י טור המספרים המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ (בודקים שמתכנס לפי מ' קושי/דלמבר)

$\Leftarrow$ יש התכנסות במ"ש בתחום.

ב. $\sum x^2 e^{-nx}$.

ע"י חקירת הפונקציה $x^2 e^{-nx}$, מוצאים שהמקסימום ב- $x = \frac{2}{n}$:

$$\forall x \ge 0 \quad |x^2 e^{-nx}| \le \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot e^{-2} = b_n$$

הטור $\sum b_n$ מתכנס, לכן הטור שלנו מתכנס במ"ש ב- $0 \le x$.

ג. בתחום $x \ge 1$,
$$0 < \min\{xn!, \frac{1}{xn!}\} = \frac{1}{xn!} \le \frac{1}{n!}$$

הטור $\sum \frac{1}{n!}$ ($= e$) מתכנס, לכן בתחום הזה הטור שלנו מתכנס במ"ש. כעת נעבור ל- $0 < x < 1$.

אם $\frac{1}{(N+1)!} \le x < \frac{1}{N!}$, אז: ל- $n \le N$:
$$\min\{xn!, \frac{1}{xn!}\} = xn! \le \frac{n!}{(N+1)!} \le \frac{1}{N+1}$$

ל- $n > N$:
$$\min\{xn!, \frac{1}{xn!}\} = \frac{1}{xn!} \le \frac{(N+1)!}{n!}$$

לכן בתחום $x \in [\frac{1}{(N+1)!}, \frac{1}{N!})$ הטור הנתון חסום ע"י

$$\underbrace{N \cdot \frac{1}{N+1}}_{1} + (N+1)! \sum_{n > N} \frac{1}{n!}$$

$$1 + \left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \dots\right)$$

הטור הזה חסום איבר-איבר ע"י טור המספרים

$$1+\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)(N+3)}+\dots\right) \le 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots\right)$$

מכיון יש לנו טור מספרים מתכנס (ל- $1+e$)

החוסם את $\sum \min\{n!x, \frac{1}{n!x}\}$ לכל $0<x<1$

ולכן הטור שלנו מתכנס במ"ש ב- $x\in(0,1)$.

⇐ הטור מתכנס במ"ש בכל $(0,1)\cup[1,\infty)=(0,\infty)$

(כי בהינתן ε, יש n_0 שממלא את תנאי התכנסות במ"ש ב- $(0,1)$
" " n_1 " " " ב- $(1,\infty)$
ונבחר $n_2=\max(n_0,n_1)$ שיעבוד לכל התחום.)

② $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע סגור, לכן רציפה במ"ש.

יהי $\varepsilon>0$. ניתן לכן למצוא $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ ($0<x,y<1$) אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

נבחר n_0 גדול כך ש- $\frac{1}{n_0}<\delta$. יהי $n>n_0$.

לכל x, $\lfloor nx\rfloor = nx-\varepsilon_x$ עבור $\varepsilon_x\in[0,1)$

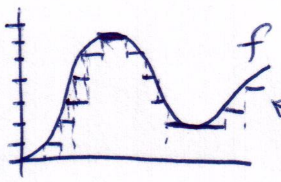
$\Leftarrow$ $\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor = x-\frac{\varepsilon_x}{n}$ $\Leftarrow$ $\left|\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor - x\right| = \left|\frac{\varepsilon_x}{n}\right| < \frac{1}{n}<\delta$

ממה שאמרנו קודם נקבל $|f_n(x)-f(x)| = \left|f\left(\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor\right)-f(x)\right|<\varepsilon$.

זה נכון לכל x, ו-n_0 אינו תלוי ב-x, לכן הוכחנו $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{\text{במ"ש}} f$.

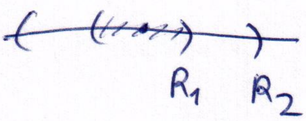
ציור:

"סרגל" עם יחידת מידה $\frac{1}{n}$



מדרגות f_n

③ (א) נניח ש- $R_1<R_2$.



אז בתחום $|x|<R_1$ שני הטורים מתכנסים,
לכן ודאי שגם טור הסכום שלהם (לכל x יש כאן הפעלה של משפט על טורי מספרים).

עבור $R_1<|x|<R_2$, הטור $\sum a_nx^n$ מתבדר
הטור $\sum b_nx^n$ מתכנס

לפי שינוי סדר הסכימה (מותר, כי טור חזקות מתכנס בהחלט בתחום התכנסותו), הרי שאם $\sum(a_n+b_n)x^n$ מתכנס,
הוא מתקיים:

$$\underbrace{\sum(a_n+b_n)x^n}_{\text{מתכנס לפי הנחה}} = \underbrace{\sum a_nx^n}_{\text{מתבדר}}+\underbrace{\sum b_nx^n}_{\text{מתכנס}} \Rightarrow$$

סתירה!

ממשפט, אם טור חזקות מתבדר ב-x_0 אז הוא מתבדר לכל $|x|>|x_0|$.

לכן $\sum(a_n+b_n)x^n$ מתבדר לכל $R_1<|x|$.

(ב) לטורים $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot x^n$ יש רדיוס התכנסות 1;

אבל לטור עם סכום המקדמים, הוא

$$\sum(1+(-1))\,x^n = \sum 0\cdot x^n$$

יש רדיוס התכנסות ∞.

4 הוכחת קריטריון d'Alembert (לטורי חזקות)

נזכר תחילה בקריטריון d'Alembert לקביעת התכנסות של טור מספרים:

טענה 1: אם קיים הגבול $\exists \lim_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=L$ וגם $L<1$, אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס. אם קיים L וגם $L>1$, הטור מתבדר.

תזכורת להוכחת טענה 1:

יהי $0<\varepsilon_0<1-L$; קיים n_0 כך שלכל $n_0<n$

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} < L+\varepsilon_0 \overset{\text{סימון}}{=} q<1 \Leftarrow |b_{n+1}|<q|b_n|<q^2|b_{n-1}|<\dots<q^{n+1}|b_0|$$

לכן $0\le\sum|b_n|<\sum q^n\cdot|b_0|=\frac{|b_0|}{1-q}<\infty$, והטור מתכנס בהחלט

ולכן גם מתכנס $\Leftarrow$ $\sum b_n<\infty$. חלק שני - בדומה: לחסום מלמטה ע"י טור מתבדר.

טענה 2 (התרגיל): אם קיים הגבול $\exists\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$, אז R הוא רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.

הוכחה: בעזרת טענה 1. כאן $b_n=a_nx^n$ (נניח לרגע ש-x קבוע)

כדי שיתכנס, רוצים את קיום הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)\cdot x \overset{?}{<} 1$$

רוצים כדי שיתכנס

לכן אם $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}>x$, אז טור החזקות מתכנס ב-$x$.

ואם $x>R$, טור החזקות מתבדר ב-x.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2- פתרון תרגיל 7 (שאלות 5-9)

5. עלינו למצוא ביטויים סגורים לשלושה טורי חזקות.

א. נזכור כי

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

וכי הטור מתכנס על כל הישר. בפרט אם ניקח

$$e^x + e^{-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

כמו כן, הטור מתכנס על כל הישר (הפרש של שני טורים המתכנסים כל אחד בפני עצמו על כל הישר)

ב. עלינו למצוא ביטוי סגור לטור

$$S(x) = \frac{x}{2\cdot 1} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$$

דרך א': נזכור כי מתקיים

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ולכן בפרט, הטור אותו אנו מחפשים מתפצל לסכום של שני טורים

$$S(x) = \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots\right)$$

עבור הטור הראשון אנו יודעים מטורי טילור כי מתקיים

$$-\ln(1-x) = \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$$

נסמן

$$H(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots$$

ונשים לב כי

$$xH(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots = -\ln(1-x) - x$$

בפרט קיבלנו כי

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1$$

רדיוס ההתכנסות יהיה 1 (זאת מכיוון שזהו סכום של שני טורים שכל אחד מהם בעל רדיוס התכנסות 1 בפני עצמו)

דרך ב': נשים לב כי אם נגזור איבר-איבר (זכרו – טור חזקות מתכנס במ"ש בפנים תחום ההתכנסות ולכן אפשר לגזור) נקבל:

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^1}{3} + \frac{x^2}{4} + \ldots$$

זהו עדיין לא טור מוכר אך אם נכפיל את שני האגפים ב - x^2 נקבל

$$x^2S'(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots$$

בפרט

$$x^2S'(x)+x=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots=-\ln(1-x)$$

ולכן

$$S'(x)=-\frac{x-\ln(1-x)}{x^2}$$

ואם כן

$$S(x)=-\int_0^x\frac{t-\ln(1-t)}{t^2}dt=?$$

__הערה:__ שימו לב שאם נבחר ללכת בדרך ב' אנו נתקעים בחישוב האינטגרל הזה (למרות שאפשר אולי לנסות ולחשב אותו). עם זאת, אם נשלב את סעיף א' וסעיף ב' קיבלנו חישוב בעזרת התורה של טורי חזקות של האינטגרל הנ"ל.

.6

א.

- עלינו לפתור את המשוואה $z^2=i$. נזכור כי בהצגה פולארית $i=e^{\frac{i\pi}{2}}$ (זאת מכיוון שזהו מספר ברדיוס 1 עם זווית $\frac{\pi}{2}$ ביחס לציר האיקס). בפרט

$$z^2=i\Rightarrow z=\pm e^{\frac{i\pi}{4}}$$

- עלינו לפתור את המשוואה $z^2=1+i$. נשים לב כי בהצגה פולארית $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ ולכן

$$z^2=1+i\Rightarrow z=\pm\sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{8}}$$

- עלינו לפתור את המשוואה $z^2=1+i$. נשים לב כי בהצגה פולארית $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ ולכן

$$z^2=1+i\Rightarrow z=\pm\sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{8}}$$

- עלינו לפתור את המשוואה $z^4=i$. נעזר בסעיף הראשון ונקבל

$$z^4=i\Rightarrow z=e^{\frac{i\pi}{8}},e^{\frac{3i\pi}{8}},e^{\frac{5i\pi}{8}},e^{\frac{7i\pi}{8}}$$

ב. נסמן $q=e^{i\theta}$ ונזכור את הנוסחא הבסיסית עבור הסכום ההנדסי

$$1+q+q^2+\dots+q^N=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

לכן

$$\sum_{n=-N}^{N}e^{i\theta n}=\frac{1-e^{i\theta(N+1)}}{1-e^{i\theta}}+\frac{1-e^{-i\theta(N+1)}}{1-e^{-i\theta}}-1$$

7. עלינו להראות כי סדרה של מספרים מרוכבים מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. ראשית נזכר בהגדרה של סדרת קושי :

הגדרה: סדרה z_n של מספרים מרוכבים (או ממשיים) נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך ש

$$N < m,n \Rightarrow \left| z_n - z_m \right| < \varepsilon$$

נראה כי <u>קושי ⇐ התכנסות</u>

את הטענות הבאות נציין ללא הוכחה:

1. כל סדרת קושי היא חסומה (הסבר: אם לא יש תת-סדרה שהנורמה שלה שואפת לאינסוף וזה מוביל לסתירה).
2. לכל סדרה חסומה של מספרים מרוכבים יש תת סדרה מתכנסת (זה האנלוג המרוכב של המשפט מחדוו"א 1 – ההוכחה זהה ומשתמשת רק בתכונות הבסיסיות של הנורמה)

לפי האמור לעיל נניח כי z_n סדרת קושי ונקבל שיש לה תת סדרה מתכנסת. נסמן את הגבול של תת-הסדרה הזו ב z ונראה כי זהו הגבול של הסדרה עצמה. מצד אחד עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים $N_1 > 0$ מספיק גדול כך ש-

$$N_1 < n_k \Rightarrow \left| z_{n_k} - z \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לפי הנחת ההתכנסות של התת סדרה. מצד שני לפי ההנחה שהסדרה עצמה היא סדרת קושי נקבל כי קיים $N_2 > 0$ כך ש

$$N_2 < m,n \Rightarrow \left| z_n - z_m \right| < \varepsilon$$

בפרט אם ניקח

$$N < n_k < m \Rightarrow \left| z_m - z \right| = \left| (z_m - z_{n_k}) + (z_{n_k} - z) \right| \le \left| z_m - z_{n_k} \right| + \left| z_{n_k} - z \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

כאשר $N = \max(N_1, N_2)$.

נראה כי <u>התכנסות ⇐ קושי</u>

נניח כי $z_n \to z$. לפי הגדרת הגבול, עבור $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך ש

$$N < n \Rightarrow \left| z_n - z \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

בפרט, אם $N < m,n$ נקבל לפי אי-שיוויון המשולש

$$\left| z_n - z_m \right| = \left| (z_n - z) + (z_m - z) \right| \le \left| z_n - z \right| + \left| z_m - z \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

כדרוש.

<u>**שימו לב:**</u> השתמשנו בעובדה שאי שוויון המשולש תקף גם עבור מספרים מרוכבים.

8.

א. נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים. עלינו להראות שאם לכל $n > 0$ מתקיים

$$f^{(n)}(x) \geq 0$$

לכל $x \geq 0$ טור טיילור של הפונקציה מתכנס על כל הישר. בכדי להראות זאת ניעזר בנוסחת טילור

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k}(0)}{k!}x^{k}+R_{n}(x)$$

כאשר במקרה שלנו נשתמש בביטוי הבא לשארית

$$R_{n}(x)=\frac{1}{n!}\int_{0}^{x}(x-u)^{n+1}f^{(n+1)}(u)du$$

הערה: להוכחה של נוסחא זו נפנה ל-

.http://www.math.binghamton.edu/paul/papers/kl_taylor.pdf

שימו לב שבעזרת משפט לגראנג' נקבל את הנוסחא לשארית לגראנג' ישירות מהנוסחא למעלה (כלומר הנוסחא הזאת לשארית היא חיזוק לנוסחאת לגראנג').

טענה:

$$0<x<y \Rightarrow \frac{R_{n}(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_{n}(y)}{y^{n+1}}$$

הסבר:

$$\frac{R_{n}(x)}{x^{n+1}}-\frac{R_{n}(y)}{y^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_{0}^{x}\left[\left(1-\frac{u}{x}\right)^{n+1}-\left(1-\frac{u}{y}\right)^{n+1}\right]f^{(n+1)}(u)du+\frac{1}{n!}\int_{x}^{y}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{n+1}f^{(n+1)}(u)du$$

שני האינטגרלים חיוביים כי הם אינטגרלים של פונקציות חיוביות לפי הגדרה!

טענה: $R_{n}(y) \leq f(y)$ לכל $0 \leq y$.

הסבר: אינדוקציה – תוך שימוש בהגדרת השארית לפי לגרנאנג'.

משילוב שתי הטענות נקבל

$$R_{n}(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_{n}(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן טור טילור מתכנס לכל x.

.9

$$a_{n}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},....$$