5 בפברואר 2015

פיתרון לבחינה בחדו"א 2, מועד א'

סמסטר א' תשע"ה, אוניברסיטת תל־אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

1. אם $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ אז $0 \leq \cos x < 1$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\cos^n x \cdot (1-\cos^n x)\right] = 0 \cdot (1-0) = 0 .$$

עבור $x=0$ מתקיים ש־$f_n(0)=0$ לכל n ולכן כמובן ש־$f_n(0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. סך הכל קיבלנו ש־$f_n \to 0$ נקודתית בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

בשביל לבדוק התכנסות במידה שווה, נשים לב שלכל n קיים מספר $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ כך ש־$\cos^n(x_n) = \frac{1}{2}$ (זהו פשוט $x_n = \arccos\left(2^{-1/n}\right)$). לכן

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 ,$$

ולכן הסדרה $\{f_n\}$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. הוכחתם בשיעורי הבית שאם f,g אינטגרביליות בקטע $[0,1]$ כך גם $\max\{f,g\}$. ההוכחה הקצרה ביותר השתמשה בשיוויון

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

ובכך שסכומים, הפרשים וערכים מוחלטים של פונקציות אינטגרביליות הם אינטגרביליים. מכאן נובע שגם $\max\{f,g,h\} = \max\{\max\{f,g\}, h\}$ היא פונקציה אינטגרבילית.

בשביל להוכיח את אי־השיוויון, נשים לב שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים $f(x) \leq \max\{f(x),g(x),h(x)\}$ ולכן ממונוטוניות האינטגרל $\int_0^1 f \leq \int_0^1 \max\{f,g,h\}$. באותו אופן גם $\int_0^1 g, \int_0^1 h \leq \int_0^1 \max\{f,g,h\}$ ולכן

$$\max\left\{\int_0^1 f, \int_0^1 g, \int_0^1 h\right\} \leq \int_0^1 \max\{f,g,h\} .$$

3. f דיפרנציאבילית ב־$\underline{0}$, כלומר הנגזרות החלקיות שלה קיימות בנקודה ומתקיים

$$\lim_{\underline{a}\to 0} \frac{f(\underline{a}) - \left[f(\underline{0}) + \nabla f(\underline{0})\cdot\underline{a}\right]}{\|\underline{a}\|} = 0 .$$

($\underline{a}$ הוא כמובן וקטור ב־$\mathbb{R}^2$). מכיוון שהסדרות $p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ ו־$q_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ מקיימות $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \underline{0}$ אז לפי היינה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(p_n) - \left[f(\underline{0}) + \nabla f(\underline{0})\cdot p_n\right]}{\|p_n\|} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(q_n) - \left[f(\underline{0}) + \nabla f(\underline{0})\cdot q_n\right]}{\|q_n\|} = 0 . \qquad (\clubsuit)$$

כעת נרצה לחסר את המשוואות אחת מהשנייה, אבל בשביל לפשט את האלגברה כדאי קודם לשים לב ש־

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|p_n\|}{\|q_n\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2}{\frac{1}{n^2}+\left(-\frac{1}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{2}}=1,$$

ולכן

$$(\spadesuit)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(p_n)-[f(\underline{0})+\nabla f(\underline{0})\cdot p_n]}{\|q_n\|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\|p_n\|}{\|q_n\|}\cdot\frac{f(p_n)-[f(\underline{0})+\nabla f(\underline{0})\cdot p_n]}{\|p_n\|}\right)=1\cdot 0=0.$$

נחסר את המשוואה ($\clubsuit$) מ־($\spadesuit$), נשתמש בנתון ש־$f(p_n)=f(q_n)$ לכל n, ונקבל כי

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(p_n)-[f(\underline{0})+\nabla f(\underline{0})\cdot p_n]}{\|q_n\|}-\frac{f(q_n)-[f(\underline{0})+\nabla f(\underline{0})\cdot q_n]}{\|q_n\|}\right).\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\nabla f(\underline{0})\cdot\frac{p_n-q_n}{\|q_n\|}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\nabla f(\underline{0})\cdot\frac{\left(0,\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\nabla f(\underline{0})\cdot\left(0,\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}n}\right)\right)\\&=\nabla f(\underline{0})\cdot\left(0,\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{0})\end{aligned}$$

זה מוכיח את הטענה.

4. (א) נשתמש ברמז ובאינטגרציה בחלקים ונקבל

$$\begin{aligned}\int_t^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x&=\int_t^\infty\frac{1}{x}\cdot xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}u=\frac{1}{x} & v'=xe^{-x^2/2}\\ u'=-\frac{1}{x^2} & v=-e^{-x^2/2}\end{bmatrix}\\&=\left[-\frac{e^{-x^2/2}}{x}\right]_t^\infty-\int_t^\infty\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-e^{-x^2/2}\right)\mathrm{d}x=\frac{e^{-t^2/2}}{t}-\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(ב) מכיוון ש־$\frac{e^{-x^2/2}}{x^2}\geq 0$ לכל $x\in[t,\infty)$ נקבל ממונוטוניות האינטגרל שגם $\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\geq 0$. לכן

$$\int_t^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{-t^2/2}}{t}-\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\leq\frac{e^{-t^2/2}}{t}$$

שזה החסם העליון שרצינו. בשביל החסם התחתון נעשה עוד אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_t^\infty\frac{1}{x^3}\cdot xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}u=\frac{1}{x^3} & v'=xe^{-x^2/2}\\ u'=-\frac{3}{x^4} & v=-e^{-x^2/2}\end{bmatrix}.\\&=\left[-\frac{e^{-x^2/2}}{x^3}\right]_t^\infty-\int_t^\infty\left(-\frac{3}{x^4}\right)\cdot\left(-e^{-x^2/2}\right)\mathrm{d}x=\frac{e^{-t^2/2}}{t^3}-3\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^4}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

נציב בתוצאה מהסעיף הקודם ונקבל

$$\begin{aligned}\int_t^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x&=\frac{e^{-t^2/2}}{t}-\left(\frac{e^{-t^2/2}}{t^3}-3\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^4}\,\mathrm{d}x\right),\\&=e^{-t^2/2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)+3\int_t^\infty\frac{e^{-x^2/2}}{x^4}\,\mathrm{d}x\geq e^{-t^2/2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)\end{aligned}$$

כשבשלב האחרון שוב השתמשנו במונוטוניות האינטגרל. זה נותן את החסם התחתון ומסיים את ההוכחה.

5. (א) אם $P(x)=e^{ix}$ או $P(x)=e^{-ix}$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)P(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)e^{\pm inx}\,\mathrm{d}x=0$$

לפי הלמה של רימן־לבג. אם $P(x)=e^{\pm ikx}$ לאיזשהו $k>0$ שלם אז

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)P(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)e^{\pm i(kn)x}\,\mathrm{d}x$$

וגבול זה הוא עדיין 0, כי קיבלנו תת־סדרה של המקרה הקודם.

לסיום, פולינום טריגונומטרי כללי הוא מהצורה $P(x)=\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$. הנתון $\int_0^{2\pi} P(x)\,\mathrm{d}x=0$ אומר ש־$c_0=0$, בגלל ש־

$$\int_0^{2\pi} P(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=-N}^{N}\left(c_k\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x\right)=2\pi\cdot c_0 .$$

מכאן

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)P(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(f(x)\cdot\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N} c_k e^{iknx}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N} c_k\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)e^{i(kn)x}\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N} c_k\cdot 0=0 .$$

(ב) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, ולכן חסומה. נסמן $|f(x)|<M$ לכל $x\in[0,2\pi]$.
כעת יהי $\varepsilon>0$. P רציפה ומחזורית־2π, ולכן לפי משפט פייר קיים פולינום טריגונומטרי Q כך ש־$|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נשים לב שבמקרה שלנו משפט פייר נותן לנו פולינום טריגונומטרי Q כך ש־$\int_0^{2\pi} Q(x)\,\mathrm{d}x=0$.
(**הוכחה:** $\hat{P}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\,\mathrm{d}x=0$. הסכומים החלקיים של טור הפורייה הם $S_nP(x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{P}(k)e^{ikx}$, ולכן כמו בסעיף הקודם $\int_0^{2\pi} S_nP=2\pi\cdot\hat{P}(0)=0$. לכן גם ממוצעי צ'זארו מקיימים

$$\int_0^{2\pi}\sigma_N P=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_nP\right]=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{2\pi} S_nP=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}0=0 .\qquad)$$

נפעיל את סעיף א' על Q, ונקבל כי קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים $\left|\int_0^{2\pi} f(x)Q(nx)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן לכל $n>N_0$ מתקיים גם

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)P(nx)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{2\pi} f(x)Q(nx)\,\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi} f(x)\left(P(nx)-Q(nx)\right)\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\left|\int_0^{2\pi} f(x)Q(nx)\,\mathrm{d}x\right|+\int_0^{2\pi}|f(x)|\,|P(nx)-Q(nx)|\,\mathrm{d}x$$
$$\le\frac{\varepsilon}{2}+\int_0^{2\pi} M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

זה גומר את ההוכחה.