6 במרץ 2015

פיתרון לבחינה בחדו"א 2, מועד ב'

סמסטר א' תשע"ה, אוניברסיטת תל־אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

1. זהו אינטגרל לא אמיתי עם שתי נקודות בעייתיות - 0 (שלידה הפונקציה לא חסומה) ו־∞.

בסביבת הנקודה 0 הפונקציה חיובית, ולכן ניתן לבצע מבחן השוואה עם הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}\sin x}{(e^x-1)\ln(x+1)}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}\right)=1\cdot 1\cdot 1=1$$

(כל אחד מהגורמים במכפלה הוא גבול פשוט ומוכר. אפשר לחשב כל אחד מהם בקלות על ידי לופיטל). מכיוון ש־$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ מתכנס, גם $\int_0^1\frac{\sqrt{x}\sin x}{(e^x-1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

בשביל הגבול באינסוף, נשתמש למשל בחסמים הגסים הבאים הנכונים לכל $x\geq 1$:

- $|\sin x|\leq 1$
- $\ln(x+1)\geq\ln 2\geq\frac{1}{2}$
- $e^x\geq e\geq 2$, ולכן $e^x-1\geq\frac{1}{2}e^x$.
- $x\leq x+1\leq e^x$, ולכן $\sqrt{x}\leq\sqrt{e^x}=e^{x/2}$.

נשלב את הכל ונקבל שלכל $x\geq 2$ מתקיים

$$\left|\frac{\sqrt{x}\sin x}{(e^x-1)\ln(x+1)}\right|\leq\frac{e^{x/2}\cdot 1}{\frac{1}{2}e^x\cdot\frac{1}{2}}=4e^{-x/2}\ .$$

מכיוון ש־$\int_1^\infty 4e^{-x/2}\,\mathrm{d}x$ מתכנס, נקבל ממבחן ההשוואה שהאינטגרל $\int_1^\infty\frac{\sqrt{x}\sin x}{(e^x-1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$ מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס.

הראינו שכל אחד מהחלקים מתכנס בנפרד, ולכן האינטגרל $\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\sin x}{(e^x-1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

2. K חסומה, ולכן K מוכלת באיזשהו כדור סגור גדול $\overline{B}(\underline{0},R)$. נתון שכל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ רציפות, והכדור הסגור $\overline{B}(\underline{0},R)$ הוא קומפקטי, ולכן לפי משפט ויירשטראס הנגזרת החלקיות חסומות בו - קיים M_i כך ש־$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|\leq M_i$ לכל $a\in\overline{B}(\underline{0},R)$. לכן לכל $a\in\overline{B}(\underline{0},R)$ מתקיים

$$\|\nabla f(a)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^d\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^d M_i^2}\ ,$$

ולקבוע באגף ימין נקרא L.

כעת נקבע $x,y\in K$, ונגדיר מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ על ידי $\gamma(t)=x+t(y-x)$. נפעיל את משפט לגראנז' על הפונקציה $f\circ\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונקבל שקיים $c\in[0,1]$ כך ש־

$$|f(y)-f(x)|=\left|\frac{(f\circ\gamma)(1)-(f\circ\gamma)(0)}{1-0}\right|=\left|(f\circ\gamma)'(c)\right|=\left|\nabla f(\gamma(c))\cdot\gamma'(c)\right|=\left|\nabla f(\gamma(c))\cdot(y-x)\right|\ .$$

(במעבר הלפני־אחרון השתמשנו בכלל השרשרת). מכיוון ש־$x,y\in K\subseteq \overline{B}(\underline{0},R)$ גם כל הקטע שמחבר אותם מוכל בכדור, כלומר $\gamma(c)\in\overline{B}(\underline{0},R)$. לכן $\|\nabla f(\gamma(c))\|\le L$. נשתמש בעובדה זאת ובאי־שיוויון קושי־שוורץ ונקבל

$$|f(y)-f(x)| = |\nabla f(\gamma(c))\cdot(y-x)| \le \|\nabla f(\gamma(c))\|\cdot\|y-x\| \le L\,\|y-x\|\,.$$

3. נסמן $g(t)=f''(t+\pi/2)+3e^{it}f(t)$. מצד אחד נתון ש־$g\equiv 0$ ולכן $\hat{g}(n)=0$ לכל n. מצד שני, נביע את מקדמי הפורייה של g בעזרת מקדמי הפורייה של f. את העובדות הבאות ראיתם בשיעורי הבית (ולכולן יש הוכחות קלות):

- $\widehat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$
- אם $h(x)=f(x+c)$ אז $\hat{h}(n)=e^{inc}\cdot\hat{f}(n)$.
- אם $h(x)=e^{ikx}f(x)$ ל־k שלם אז $\hat{h}(n)=\hat{f}(n-k)$.

משלוש העובדות האלה ביחד נקבל מיד ש־

$$0=\hat{g}(n)=(in)^2\,e^{in\frac{\pi}{2}}\hat{f}(n)+3\hat{f}(n-1)=-i^n n^2\hat{f}(n)+3\hat{f}(n-1).$$

נתון ש־$\int_0^{2\pi}f=0$ ולכן $\hat{f}(0)=0$. מהמשוואה שקיבלנו נובע שלכל $n\neq 0$ מתקיים $\hat{f}(n)=\dfrac{3}{i^n n^2}\hat{f}(n-1)$. נציב $n=1$ ונקבל $\hat{f}(1)=0$, נציב $n=2$ ונקבל $\hat{f}(2)=0$, ובאופן כללי נקבל (באינדוקציה) ש־$\hat{f}(n)=0$ לכל $n\ge 0$.

באופן דומה, מהמשוואה שלנו נובע גם שלכל n מתקיים $\hat{f}(n-1)=\dfrac{i^n n^2}{3}\hat{f}(n)$. נציב $n=0$ ונקבל כי $\hat{f}(-1)=0$, נציב $n=-1$ ונקבל כי $\hat{f}(-2)=0$, ובאופן כללי נקבל (באינדוקציה) ש־$\hat{f}(n)=0$ לכל $n<0$. לכן $\hat{f}(n)=0$ לכל n.

אבל f גזירה, ולכן למשל ממשפט דיריכלה נקבל שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}0\cdot e^{inx}=0\,,$$

ולכן $f\equiv 0$.

4. (א) נוכיח באינדוקציה על k. עבור $k=0$ זאת טענה שראיתם בהרצאה. עבור $k>0$ נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k-1}\cdot xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=x^{2k-1} & v'=xe^{-x^2/2}\\ u'=(2k-1)x^{2k-2} & v=-e^{-x^2/2}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-x^{2k-1}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{\infty}^{\infty}(2k-1)x^{2(k-1)}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right).$$

האיבר הראשון בסכום שקיבלנו מתאפס, כי $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^{2k-1}}{e^{x^2/2}}=0$. בשביל האיבר השני נשתמש בהנחת האינדוקציה ונקבל

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=0+(2k-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2(k-1)}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$
$$=(2k-1)\cdot(2k-3)!!=(2k-1)!!.$$

(ב) ניזכר שטור טיילור של $\cos x$ סביב $x_0 = 0$ הוא $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2k}}{(2k)!}$. אנו יודעים שטור זה מתכנס לכל x (כלומר עם רדיוס $R = \infty$). לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!} e^{-x^2/2} \right) \mathrm{d}x \overset{(\smiley)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \right).$$

את המעבר $(\smiley)$ נצדיק בסוף הפיתרון. כעת נציב במה שקיבלנו את התוצאה של סעיף א'. נשים לב ש־

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{1}{2^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k)} = \frac{1}{2^k k!}.$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)!! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-t^2/2\right)^k}{k!} = e^{-t^2/2}.$$

נשאר להצדיק את $(\smiley)$ שבו החלפנו סכום ואינטגרל. בשביל לעשות את זה אנחנו צריכים לבדוק שני דברים:

- שהטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!} e^{-x^2/2}$ מתכנס במידה שווה בכל קטע מהצורה $[-r, r]$: מכיוון שטור החזקות $\cos(tx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!}$ מתכנס עם רדיוס $R = \infty$ הוא מתכנס במידה שווה בכל קטע מהצורה $[-r, r]$. אבל $0 \le e^{-x^2/2} \le 1$ לכל x, ולכן

$$\left| \cos(tx) e^{-x^2/2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!} e^{-x^2/2} \right| \le \left| \cos(tx) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!} \right|.$$

לכן גם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!} e^{-x^2/2}$ מתכנס במידה שווה בכל קטע מהצורה $[-r, r]$.

- שלטור קיימת מז'ורנטה אינטגרבילית: נפעל לפי הרמז, ונשים לב שלכל N מתקיים

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (tx)^{2k}}{(2k)!} e^{-x^2/2} \right| \le \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{|tx|^{2k}}{(2k)!} \right) \cdot e^{-x^2/2} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|tx|^k}{k!} \right) e^{-x^2/2} = e^{|tx| - x^2/2}.$$

מכיוון ש־$\int_{-\infty}^{\infty} e^{|tx| - x^2/2} \, \mathrm{d}x$ מתכנס, זוהי המז'ורנטה שחיפשנו.

לכן המעבר $(\smiley)$ מוצדק, וההוכחה הושלמה.

5. נסמן $M_0 = 0$. נתון כי $\int_0^{\infty} f = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f = \infty$, ולכן בפרט קיים M_1 כך ש־$\int_0^{M_1} f \ge 1$. כמובן שמותר להניח בה"כ כי $M_1 \ge 1$ (אחרת נגדיל אותו, והאי־שיוויון עדיין יתקיים). כעת נשים לב שגם

$$\int_{M_1}^{\infty} f = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{M_1}^{R} f \right) = \lim_{R \to \infty} \left(\int_0^R f - \int_0^{M_1} f \right) = \infty,$$

ולכן יש $M_2 > M_1$ כך ש־$\int_{M_1}^{M_2} f \ge 1$. שוב בה"כ אפשר להניח כי $M_2 \ge 2$. נמשיך באופן הזה, ונבנה סדרה $0 = M_0 < M_1 < M_2 < M_3 < \cdots$ כך ש־$M_n \to \infty$ ו־$\int_{M_{n-1}}^{M_n} f \ge 1$ לכל n.

כעת נגדיר את g להיות קבועה לערך $\frac{1}{n}$ בקטע $[M_{n-1}, M_n)$ (כלומר $g(x) = 1$ בקטע $[M_0, M_1)$, $g(x) = \frac{1}{2}$ בקטע $[M_1, M_2)$ וכך הלאה). בכל קטע סופי g היא פונקציית מדרגות, ולכן אינטגרבילית. כמו כן $|g(x)| < \frac{1}{n}$ לכל $x \ge \frac{1}{M_n}$, ולכן $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. לסיום נשים לב ש־$\int_0^{\infty} fg$ מתבדר, כי

$$\int_0^{\infty} fg = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{M_{n-1}}^{M_n} fg \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{M_{n-1}}^{M_n} f \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \int_{M_{n-1}}^{M_n} f \right) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 1 \right) = \infty.$$