חדו"א 3 - תרגיל מס' 2

1. חשבו את $Df(a)$ עבור
   (א) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x)=\langle x,\xi\rangle^2$ כאשר $\xi\in\mathbb{R}^n$ וקטור קבוע.
   (ב) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x)=\langle Ax,x\rangle$ כאשר A מטריצה $n\times n$.
   (ג) $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ הנתונה ע"י $f(x)=\frac{x}{|x|}$.

2. (א) תהיינה $\gamma,\eta:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ שתי מסילות גזירות. הוכיחו כי

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma(t),\eta(t)\rangle=\langle\gamma'(t),\eta(t)\rangle+\langle\gamma(t),\eta'(t)\rangle$$

   (ב) תהיינה $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאביליות בנקודה a, ותהי $\varphi(x)=\langle f(x),g(x)\rangle$. חשבו את $D\varphi(a)$ במונחי $Df(a)$ ו־ $Dg(a)$.

3. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית והומוגנית, כלומר $f(tx)=t^kf(x)$ עבור כל $x\in\mathbb{R}^n$ ו־ $t>0$. הוכיחו כי f מקיימת את זהות אוילר

$$\langle\nabla f,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,x_i=kf(x)$$

4. תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית ו־ $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. הראו כי

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

5. (משפט Rolle ב־ $\mathbb{R}^n$). יהי $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום חסום ו־ $f:\overline{U}\to\mathbb{R}$ רציפה ב־ $\overline{U}$ ודיפרנציאבילית ב־ U. נניח כי f מתאפסת על השפה ∂U, הראו כי אז קיימת נקודה $x\in U$ כך ש־ $Df(x)=0$.

6. יהי $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום ו־ $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה C^1. הראו כי אם $K\subset U$ קומפקטית אז f מקיימת תנאי ליפשיץ ב־ K, כלומר קיים M כך ש־

$$|f(x)-f(y)|\le M\,|x-y|\qquad(x,y\in K)$$

   הדרכה: הוכיחו קודם עבור המקרה הפרטי בו K הוא כדור סגור.

7. תהי $f:M_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ פונקציית הדטרמיננטה, $f(A)=\det A$. הראו כי:
   (א) f גזירה ברציפות (דיפרנציאבילית ברציפות).
   (ב) $Df(I)\,H=\mathrm{tr}(H)$ כאשר I היא מטריצת הזהות, לכל $H\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   (ג) אם A מטריצה הפיכה אז $Df(A)\,H=\det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}H)$.
   (ד) במקרה הכללי,

$$Df(A)\,H=\mathrm{tr}(\mathrm{adj}(A)\,H)$$

   כאשר $\mathrm{adj}(A)$ היא המטריצה המצורפת ל A
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Adjugate_matrix).

   הדרכה: העזרו בזהות $\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i,j}A_{ij}B_{ji}$.

8. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה C^1. הראו כי לכל נקודה $a\in\mathbb{R}^n$ קיימת סביבה שבה

$$\mathrm{rank}\ \ Df(x)\ \ge\ \mathrm{rank}\ \ Df(a)\,.$$