חדו"א 3 - תרגיל מס' 3

1. מצאו מינימום מוחלט של $f(x) = \langle Ax, x\rangle + 2\langle x, b\rangle + c$ כאשר $A_{n\times n}$ מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית, $b \in \mathbb{R}^n$ ו- $c \in \mathbb{R}$.

2. תהי f פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מכל סדר ב- $\mathbb{R}^3$ ונגדיר $\varphi(t) = f(t, t^2, t^3)$. מצאו את האיברים עד סדר שני בפיתוח טיילור של φ סביב הנקודה $t = 0$.

3. נאמר כי פונקציה f של n משתנים היא הרמונית אם $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$.

   (א) מצאו פונקציה הרמונית ורדיאלית בשני משתנים (לא קבועה) ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. האם קיימת פונקציה הרמונית כנ"ל בכל המישור? נמקו.

   (ב) מצאו פונקציה הרמונית ורדיאלית ב-n משתנים (לא קבועה) ב- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   רמז: אם קיבלתם משוואה דיפרנציאלית, נסו לנחש את הפתרון.

4. הראו שהנקודה $(0,0)$ היא אקסטרמום מקומי של הפונקציה

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2+(1-y)^2}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+(1+y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}}$$

ומצאו האם היא נקודת מינימום או מקסימום מקומי.

5. תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה C^2, ונסמן $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$. הראו כי

   (א) אם $\Delta f > 0$ אזי ל- f אין נקודות מקסימום מקומי.

   (ב) אם $\Delta f \geq 0$ אזי ל- f אין נקודות מקסימום מקומי חזק (כלומר לא קיימת נקודה a כך ש- $f(x) < f(a)$ לכל x בסביבה נקובה של a).
   הדרכה: היעזרו בפונקציה $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon|x|^2$.

6. מצאו פונקציה חלקה $f \in C^\infty$ (כלומר $f \in C^n$ לכל n) על הרביע החיובי של המישור כך ש $\{\nabla f(x) : x \in \mathbb{R}^2\}$ מוכלת בעקומה (אך לא מוכלת בישר).

7. תהי $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ב C^2 כך ש $M = \sup|f''| < \infty$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$, קבוצת כל הערכים הקריטיים של f ניתנת לכיסוי על ידי $\lceil \alpha/\varepsilon \rceil$ קטעים באורך $\beta\varepsilon^2$, כאשר $\alpha, \beta > 0$ תלויים ב M בלבד.
   הערה: $f(x_0)$ יקרא ערך קריטי של f אם x_0 היא נקודה קריטית של f, כלומר $f'(x_0) = 0$.