חדו"א 3 - תרגיל בית 5

1. הראו כי הפונקציה $f(x,y)=(e^x\cos y,e^x\sin y)$ היא חח"ע בסביבת כל נקודה ב $\mathbb{R}^2$. עבור הנקודה $(0,\pi)$ והנקודה $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ מצאו סביבה כזו ואת הפונקציה ההפוכה המתאימה ל f באותה סביבה.

2. בדקו ש $(u,v)\mapsto(e^u+e^v,e^u-e^v)$ מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה, ומצאו את ההופכית. הראו ע"י חישוב ישיר את הקשר בין הנגזרות.

3.

(א) הוכיחו כי המשוואה $x=y+\sin y$ קובעת בסביבת הנקודה $(0,0)$ את y כפונקציה של x. מצאו את $\frac{\partial y}{\partial x}(0)$.

(ב) הוכיחו כי המשוואה $x^2+y^2-z^2+xz-yz-1=0$ קובעת בסביבת הנקודה $(1,0,1)$ את z כפונקציה של x ו- y. מצאו את

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,0)$$

(ג) הוכיחו כי מערכת המשוואות

$$\begin{cases}x+yz-z^3=1\\ x^3-xz+y^3=0\end{cases}$$

קובעת בסביבת הנק' $(1,-1,0)$ את x ואת y כפונקציות של z, ומצאו את $\frac{\partial x}{\partial z}(0)\,,\ \frac{\partial y}{\partial z}(0)$.

4. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה C^1 ותהי $a\in\mathbb{R}^n$. נניח כי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\neq 0$ לכל $1\leq j\leq n$, אזי בסביבת הנקודה a המשוואה $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ מגדירה n פונקציות

$$x_1(x_2,\ldots,x_n)\,,\ x_2(x_1,x_3,\ldots,x_n)\,,\ldots,x_n(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

חשבו את

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}(a)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_3}(a)\cdots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}(a)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_1}(a)$$

5. השתמשו במשפט הפונקציה הסתומה כדי להראות שהערך המקסימלי של קואורדינטה z על האליפסואיד

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz=54$$

מתקבל בנקודה $(3,-6,9)$.

6. (תלות פונקציונלית) הפונקציות $\{f_i\}_{i=1}^n$ כך ש $f_i:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שהן $C^1(U)$ נקראות תלויות פונקציונלית אם קיימת $V\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה כך ש

$$\{(f_1(x),\ldots,f_n(x))\ |\ x\in U\}\subset V$$

ופונקציה $F:V\to\mathbb{R}$, כך ש $F\in C^1$, $\nabla F(v)\neq 0$ לכל $v\in V$ ו-

$$\forall x\in U\quad F(f_1(x),\ldots,f_n(x))=0$$

(א) הוכיחו ש $\sin(x+y)$ ו $\cos(x+y)$ בלתי תלויות לינארית אך תלויות פונקציונלית.

(ב) הוכיחו שאם $\{f_i\}_{i=1}^n$ תלויות פונקציונלית ב U אז לכל $a \in U$ קיים $1 \le j \le n$ ופונקציה $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ כך ש

$$f_j\left(x\right) = g\left(f_1\left(x\right), \ldots, f_{j-1}\left(x\right), f_{j+1}\left(x\right), \ldots, f_n\left(x\right)\right)$$

בסביבה של a.

(ג) תהי $f = \left(f_1, \ldots, f_m\right)$ פונקציה C^1 מקבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^m$, כך ש $m \le n$. אם $\{f_i\}_{i=1}^m$ תלויות פונקציונלית ב U אזי כל המינורים מסדר m של Df הם זהותית 0 ב U. בפרט כאשר $m = n$, $\det\left(Df\left(x\right)\right) \equiv 0$ לכל $x \in U$.

(ד) $\star$ (כיוון הפוך לסעיף ג') תהי $f = \left(f_1, \ldots, f_m\right)$ פונקציה C^1 מקבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^m$. נניח כי כל המינורים מסדר m של Df מתאפסים זהותית ב U ונניח כי k ($k < m$) הוא המספר הגדול ביותר עבורו לפחות אחד מהמינורים מסדר k של Df שונה מ 0 בנקודה $a \in U$. הוכיחו כי קיימת סביבה W של a כך ש $f_1, \ldots, f_k$ בלתי תלויות פונקציונלית ושאר $m-k$ הפונקציות $f_{k+1}, \ldots, f_m$ תלויות ב $f_1, \ldots, f_k$ ב W. במלים אחרות קיימות פונקציות $\left\{\Phi_j \in C^1\right\}_{j=k+1}^m$, כך שלכל $x \in W$

$$f_j\left(x\right) = \Phi_j\left(f_1\left(x\right), \ldots, f_k\left(x\right)\right)$$

7. תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ההעתקה הממפה את שורשי פולינום מוני (מקדם מוביל 1) ממעלה n למקדמים שלו, כלומר:

$$\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdots \left(x - x_n\right) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \Rightarrow f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \begin{pmatrix} a_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ \vdots \\ a_n\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו שהדרגה של Df שווה למספר הערכים השונים של שורשי הפולינום.

(ב) הוכיחו כי $\det Df = C_n \prod_{i<j} \left(x_i - x_j\right)$ כאשר $C_n \neq 0$ קבוע. רמז: הראו שהיעקוביאן $\det Df$ הוא פולינום מסדר $\frac{n(n-1)}{2}$.

(ג) $\star$ הוכיחו כי $C_n = \left(-1\right)^{n(n+1)/2}$. רמז: נסו אינדוקציה.