

## חדו"א 3 - תרגיל בית 6

1. נתון כי  $K$  היא קבוצת קנטור (הרגילה) בקטע  $[0, 1]$ .

(א) הראו כי  $\Omega = [0, 1] \setminus K$  היא קבוצה פתוחה.

(ב) הראו כי  $\partial\Omega = K$ .

(ג) ל  $K$  אין נקודות מבודדות.

2. תהי  $E \subset \mathbb{R}^2$ . נגדיר את ההיטל של  $E$  על ציר  $x$ :

$$E_x = \{x \mid \exists y \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } (x, y) \in E\}$$

הוכיחו כי אם  $E_x$  קבוצה זניחה ב  $\mathbb{R}$  אזי גם  $E$  קבוצה זניחה ב  $\mathbb{R}^2$ . האם הכיוון ההפוך נכון ?

3. נתונות קבוצות  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  זניחות, כאשר  $n \geq 2$ . האם הקבוצה  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  קבוצה זניחה ? מה לגבי המקרה  $n = 1$  ? מה ניתן לומר כאשר נתון בנוסף כי  $A$  קבוצה בת מנייה ?

4. (מקרה פרטי נוסף של משפט Sard) נתונה  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  דיפרנציאבילית ברציפות. נק'  $x$  היא קריטית אם  $Df(x) = 0$ . הראו כי קבוצת הערכים הקריטיים

$$\{f(x) \mid Df(x) = 0\}$$

היא קבוצה זניחה ב  $\mathbb{R}^n$ .

הערה: במקרה הכללי של  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  דרוש כי  $f \in C^a$  כאשר  $a \geq \max\{n - m + 1, 1\}$ .

5. נסמן  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ . תהי  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת באופן הבא

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\right)^n & \frac{1}{2^{n+1}} < \max\{x, y\} \leq \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הראו כי  $f$  אינטגרבילית רימן ב  $Q$  וחשבו את  $\iint_Q f(x, y) dx dy$ .

6. תהי  $f$  פונקציות אינטגרביליות בתיבה סגורה  $Q \subset \mathbb{R}^n$ . נתונה תיבה  $\tilde{Q} \subset Q$  ונתון כי  $f = 0$  ב  $Q \setminus \tilde{Q}$ . הראו בעזרת ההגדרה כי  $\int_Q f = \int_{\tilde{Q}} f$ .