חדו"א 3 - תרגיל בית 7

1. תהי $f(x,y)$ מוגדרת בריבוע $Q=[0,1]\times[0,1]$ באופן הבא: אם $x=\frac{m_1}{n_1},\ y=\frac{m_2}{n_2}$ שברים מצומצמים ($n_i,m_i\in\mathbb{N}$) אזי $f(x,y)=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$. אם לפחות אחד מהמספרים x,y אינו רציונלי אזי $f(x,y)=0$. הוכיחו כי f אינטגרבילית רימן ב Q וחשבו $\iint_Q f(x,y)\ dxdy$.

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

   (א) $\iint_D \left(x^2-2y\right)\ dxdy$ כאשר D הוא משולש עם קודקודים בנקודות $(1,0),(2,1),(3,4)$

   (ב) $\iint_D xy\cos\left(\pi x^2\right)\ dxdy$ כאשר D הוא חלק העיגול $x^2+y^2\leq 1$ הנמצא ברבע המישור $x\geq 0, y\geq 0$.

   (ג) $\iiint_D \left(x^2+y^2+z^2\right)\ dxdydz$ כאשר D הוא התחום הכלוא ע"י ארבעת המישורים $x=0,\ y=0,\ z=0$ ו $x+y+z=a$ ($a>0$).

3. חשבו את נפח הגוף ב $\mathbb{R}^3$

   (א) המתקבל מחיתוך שני הגלילים $x^2+y^2\leq 1$ ו $x^2+z^2\leq 1$.

   (ב) הנמצא מתחת לפרבולואיד $z=x^2+y^2$ ומעל הריבוע $[0,1]\times[0,1]$ במישור x,y.

   (ג) המוגדר ע"י $(x-z)^2+(y+2z)^2\leq 1$ ו $0\leq z\leq 1$.

4. החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים הכפולים הבאים:

   (א) $\int_1^2\int_0^x f(x,y)\ dydx$

   (ב) $\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\ dydx$

   (ג) $\int_{-1}^1\int_{x-1}^{x+1} f(x,y)\ dydx$

   (ד) $\int_{-1}^1\int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\ dydx$

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי

$$\int_0^s\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\ dx_n\dots dx_2dx_1=\int_0^s f(t)\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\ dt$$

6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

   (א) $\int_{[0,1]^n}\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)\ dx_1\dots dx_n$

   (ב) $\int_{[0,1]^n}\left(x_1+\ldots+x_n\right)^2\ dx_1\dots dx_n$

   (ג) $\int_{[0,1]^n}\min\{x_1,\ldots,x_n\}\ dx_1\dots dx_n$

7. מצאו את הנפח של הסימפלקס ה n מימדי:

$$T_n=\{x\ |\ x_1,\ldots,x_n\geq 0,\ x_1+\ldots+x_n\leq 1\}$$

8. חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\omega_n}{\omega_{n-1}}$$

כאשר ω_n הוא הנפח של כדור היחידה האוקלידי ב־$\mathbb{R}^n$.