

## חדו"א 3 - תרגיל בית 8

1. חשבו את שטח התחום ב  $\mathbb{R}^2$  המוגבל ע"י

(א) הקווים  $xy = 4$ ,  $xy = 8$ ,  $y = 5x$ ,  $y = 15x$

(ב) הלולאה  $(x + y)^3 = axy$  בתחום  $x, y \geq 0$  ( $a > 0$ )

רמז: היעזרו בהצבה  $x = r \cos^2 \theta$ ,  $y = r \sin^2 \theta$

2. חשבו את נפח הגוף ב  $\mathbb{R}^3$

(א) החסום בין הפרבולואיד  $z = a(x^2 + y^2)$  לבין המישור  $z = h$  ( $a, h > 0$ )

(ב) המתקבל מחיתוך שני הכדורים  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  ו  $x^2 + y^2 + (z - b)^2 \leq b^2$  ( $0 < a < 2b$ )

3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א)  $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$  על האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

(ב)  $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$  על התחום הכלוא בלמניסקטה  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

(ג)  $\iiint_D |xyz| dx dy dz$  על חצי האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0$

(ד)  $\iiint_D \exp(x^2 + y^2 - u^2 - v^2) dx dy du dv$  על הכדור  $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 \leq 1$   
 רמז: היעזרו באינטגרל החוזר

$$\iint \left( \iint \dots dudv \right) dx dy$$

4. תהי  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. נגדיר

$$F(t) = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2 \leq t^2\}} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad (t > 0)$$

חשבו את  $F'(t)$ .

5. נתונה פונקציה  $F = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(Q)$ , כאשר  $Q$  תיבה ב  $\mathbb{R}^3$ . בנוסף ידוע כי  $f_1$  לא תלויה במשתנה  $x$ ,  $f_2$  לא תלויה במשתנה  $y$  ו  $f_3$  לא תלויה במשתנה  $z$ . הוכיחו כי אם נתון כי הנגזרות החלקיות  $\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial y}$  חיוביות ממש ב  $Q$  אזי  $f$  ח"ע על  $Q$ .

רמז: עבור  $a = (a_1, a_2, a_3)$  ו  $b = (b_1, b_2, b_3)$  כך ש  $a \neq b$  חלקו למקרים שונים בהתאם ליחסים בין  $a_i$  ל  $b_i$ .