חדו"א 3 - תרגיל בית 10

1. נניח כי $e_0, e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^{n+1}$. נניח ש $x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$ ו $e_1, \dots, e_n$ בסיס של $\mathbb{R}^n$.

   (א) הגדירו הטלה סטריאוגרפית מ S^n ל $\mathbb{R}^n$ באמצעות שתי מפות: $\psi_1 : S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$ ו $\psi_1 : S^n \setminus \{-e_0\} \to \mathbb{R}^n$.
   הערה: כלומר הטלה מהקודקוד של הספירה למישור שנקבעת ע"פ נקודת החיתוך של ישר עם הקודקוד $\pm e_0$ נקודה $x \neq e_0$ או $x \neq -e_0$ על הספירה והמישור הנפרש ע"י $e_1, \dots, e_n$.

   (ב) הראו כי אם $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ אזי $\left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right)(t) = \frac{t}{|t|^2}$ כאשר ψ_1^{-1} מוגדר כפונקציה ההפוכה לצמצום של ψ_1 ל $S^n \setminus \{e_0\}$.

   (ג) הראו כי המפות $\psi_1^{-1} = \varphi_1 : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{e_0\}$ ו $\psi_2^{-1} = \varphi_2 : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{-e_0\}$ יוצרות אטלס של הספירה S^n.
   הערה: אטלס הוא אוסף של מפות מקומיות שהתמונות שלהן מכסות את המשטח.

   (ד) הוכיחו כי כל אטלס של הספירה חייב להכיל לפחות שתי מפות.

2. נתון משטח חלק $M \subset \mathbb{R}^n$ ממימד k. ענו על הסעיפים הבאים:

   (א) הוכיחו שההגדרות הבאות לקבוצה פתוחה הן שקולות:

   i. $U \subset M$ היא קבוצה פתוחה אם קיימת קבוצה פתוחה $V \subset \mathbb{R}^n$ כך ש $U = V \cap M$.

   ii. לכל $x \in U \subset M$ קיימת סביבה V ב U כך שהתמונה ההפוכה שלה ע"י מפה r היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^k$.

   (ב) רשמו הגדרות מתאימות עבור קבוצה סגורה ב M.

   (ג) הוכיחו כי ההגדרות הבאות לקבוצה קומפקטית הן שקולות:

   i. $K \subset M$ קבוצה קומפקטית אם היא סגורה (ב M) וחסומה.

   ii. לכל כיסוי פתוח (ב M) של K יש תת־כיסוי סופי.
   הערה: בפרט נובע כי ההגדרה של קומפקטיות נובעת ישירות מהגדרת הקבוצות הפתוחות/סגורות של M (אין צורך להתייחס למרחב כולו $\mathbb{R}^n$).

3. נזכיר כי בהצגה פרמטרית של משטח M (ב $\mathbb{R}^n$ ממימד k), לכל נקודה x יש סביבה U של x, קבוצה פתוחה $V \subset \mathbb{R}^k$ ומפה רגולרית $r : V \to M \cap U$. לקואורדינטות $v_1, \dots, v_k$ המתאימות ל V קוראים קואורדינטות מקומיות. נניח כי יש "חפיפה" בין שתי מפות שונות $r_1(V_1) \cap r_2(V_2) \neq \emptyset$. הוכיחו כי במקרה זה ניתן להגדיר את הפונקציה $r_2^{-1} \circ r_1 : W \to \widetilde{W}$ כאשר $W = r_1^{-1}(r_1(V_1) \cap r_2(V_2))$ ו $\widetilde{W} = r_2^{-1}(r_1(V_1) \cap r_2(V_2))$ והיא דיפאומורפיזם C^1 ב $\mathbb{R}^k$.

4. נניח ש $\gamma : I \to S^2$ היא עקומה על ספירת היחידה הנתונה ע"י

$$\gamma(t) = (\sin\varphi(t)\cos\theta(t), \sin\varphi(t)\sin\theta(t), \cos\varphi(t))$$

הראו כי

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{\dot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin^2\varphi}\, dt$$

5. נתונה ספירה S^2 עם צפיפות מסה שהיא פרופורציונית למרחק מהקוטר האנכי שלה (בכיוון ציר z). חשבו את המסה של הספירה ואת מרכז המסה של ההמיספירה העליונה.

6. בכל אחד מהסעיפים קבעו האם הקבוצה הנתונה היא משטח חלק ובמידה וכן מצאו את המימד.

   (א) הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$.

   (ב) החרוט $z^2 = x^2 + y^2$.

   (ג) המעגל המתקבל מחיתוך הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ עם המישור $x = 1/2$.

   (ד) הקבוצה המוגדרת ע"י $x^2 - y^2 = 0$ כאשר $z > y \geq 0$.

7. מצאו הצגה פרמטרית למשטחים הבאים ב $\mathbb{R}^3$:

(א) האליפסואיד הנתון ע"י $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(ב) הפרבולואיד החד־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
<u>רמז:</u> העזרו בפונקציות $\cosh t, \sinh t$.

8. חשבו את השטח של המשטחים הבאים ב $\mathbb{R}^3$:

(א) חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ הנמצא בתוך הגליל $x^2+y^2\leq 1$.

(ב) חלק הספירה $x^2+y^2+z^2=R^2$ הנמצא בתוך הגליל $x^2+y^2\leq Rx$.

(ג) חלק הגליל $x^2+y^2=Rx$ הנמצא בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2\leq R^2$.

(ד) שפת הגוף המתקבל מחיתוך שני הגלילים: $x^2+y^2\leq 1$ ו $x^2+z^2\leq 1$.
<u>רמז:</u> היעזרו בעובדה שלכל שתי קבוצות סגורות A,B מתקיים:

$$\partial\left(A\cap B\right)=\left(A\cap\partial B\right)\cup\left(B\cap\partial A\right)$$

9. חשבו את האינטגרלים המשטחיים הבאים:

(א) $\int_{\triangle}\left(x+y+z\right)\,ds$ כאשר $\triangle$ הוא המשולש עם הקודקודים: $\left(1,0,0\right),\left(1,-1,0\right),\left(0,1,2\right)\in\mathbb{R}^3$.

(ב) $\int_{S^2}x^2\,ds$ ללא חישוב מפורש (בעזרת שיקולי סימטריה), כאשר S^2 היא ספירת היחידה ב $\mathbb{R}^3$.