

חדו"א 3 - תרגיל בית 13

1. חשבו את $\int_{\gamma} x dy - y dx$ ואת $\int_{\gamma} x dy + y dx$ כאשר γ היא המסילה המחברת את הנקודה $(0, 0)$ עם הנקודה $(1, 1)$ באופן הבא:

(א) γ היא קו ישר.

(ב) γ היא חלק מהפרבולה $y = x^2$.

(ג) γ מסילה שעוברת בקו ישר מ $(0, 0)$ ל $(0, 1)$ וממשיכה בקו ישר ל $(1, 1)$.

2. חשבו $\int_{\gamma} z dx + x dy + y dz$ כאשר γ היא המסילה הפרבולית $(x, y, z) = (a(1-t^2), b(1-t^2), t)$ המתחילה בנקודה $(0, 0, 1)$ ומסתיימת בנקודה $(0, 0, -1)$.

3. חשבו בעזרת משפט גרין:

(א) $\int_{\gamma} (\cos(x) \cos(y) + e^{x^2}) dx + (\sin(x) \sin(y) + (y^4 + 1)^{\frac{1}{4}}) dy$ כאשר γ היא שפת הריבוע $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ עם כיוון חיובי.

(ב) $\int_{\gamma} xy^2 dx + 2x^2y dy$ כאשר γ היא האליפסה $4x^2 + 9y^2 = 36$ עם כיוון חיובי.

(ג) $\int_{\gamma} \log \sqrt{2+y^2} dy + \frac{xy}{2+y^2} dy$ כאשר γ מסילה שהיא החלק של העקום $x^4 + y^4 = 1$ מהנקודה $(1, 0)$ אל הנקודה $(0, 1)$.

4. חשבו את השטח הכלוא בין האליפסה $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ והישרים $y = 0$ ו $y = \frac{x}{2}$ ברביע הראשון.

5. יהי $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ תחום חסום עם שפה חלקה הנתונה בקואורדינטות קוטביות

$$(x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)), \quad a \leq t \leq b$$

בכיוון חיובי ביחס לתחום.

(א) הראו כי

$$\text{vol}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_a^b r(t)^2 \dot{\theta}(t) dt$$

(ב) חשבו את השטח הכלוא ע"י

i. הקרדיואידה $r = a(1 + \cos \theta)$

ii. הלמניסקטה $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$