12 בפברואר 2012

בחינה ־ חדו"א 3, מועד א

סמסטר א' תשע"ב, אוניברסיטת תל־אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות $A4$ יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

הקיפו את השאלות שבחרתם לענות עליהן:

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

(25 נקודות) 1. יהי $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ תחום חסום בעל שפה חלקה הכולל את הראשית בפנימו. נסמן

$$u(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

הוכיחו כי

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, N \rangle = 4\pi$$

כאשר N הוא הנורמל החיצוני.

(12 נקודות) 2. (א) הראו כי לכל $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^n} dx = Vol_n(B(0,1))$$

כאשר $B(0,1)$ הוא כדור היחידה ב־ $\mathbb{R}^n$.

(13 נקודות) (ב) הראו כי לכל $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}} dx = 2^n n!$$

(רמז: האינטגרל המגדיר את פונקציית גמה: $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$)

3. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נסמן

$$I=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ \exists y\in\mathbb{R}, f(x,y)=0\}\,.$$

(15 נקודות) (א) נתון כי הנגזרת $\partial f/\partial y$ לעולם אינה מתאפסת. הוכיחו ש־ I קבוצה פתוחה.

(10 נקודות) (ב) נתון כי $f^2(x,y)\ge y^2-1$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. הוכיחו ש־ I קבוצה סגורה.

(25 נקודות) 4. תהיינה $F, G : [0,1] \to [0,1]$ פונקציות רציפות ועולות ממש. נניח גם ש־

$$F(0) = G(0) = 0, \qquad F(1) = G(1) = 1.$$

הוכיחו כי

$$\int_0^1 |F(t) - G(t)|\, dt = \int_0^1 \left|F^{-1}(t) - G^{-1}(t)\right| dt.$$

כאשר F^{-1} ו־ G^{-1} הפונקציות ההפוכות, כלומר, $F^{-1}(F(x)) = x$ לכל x.

(25 נקודות) 5. יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה מאונכים זה לזה. הוכיחו ש־

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^3\right)^2}.$$

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):