

בחינה - חדו"א 3, מועד ב
סמסטר א' תשע"ב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

הקיפו את השאלות שבחרתם לענות עליהן:

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

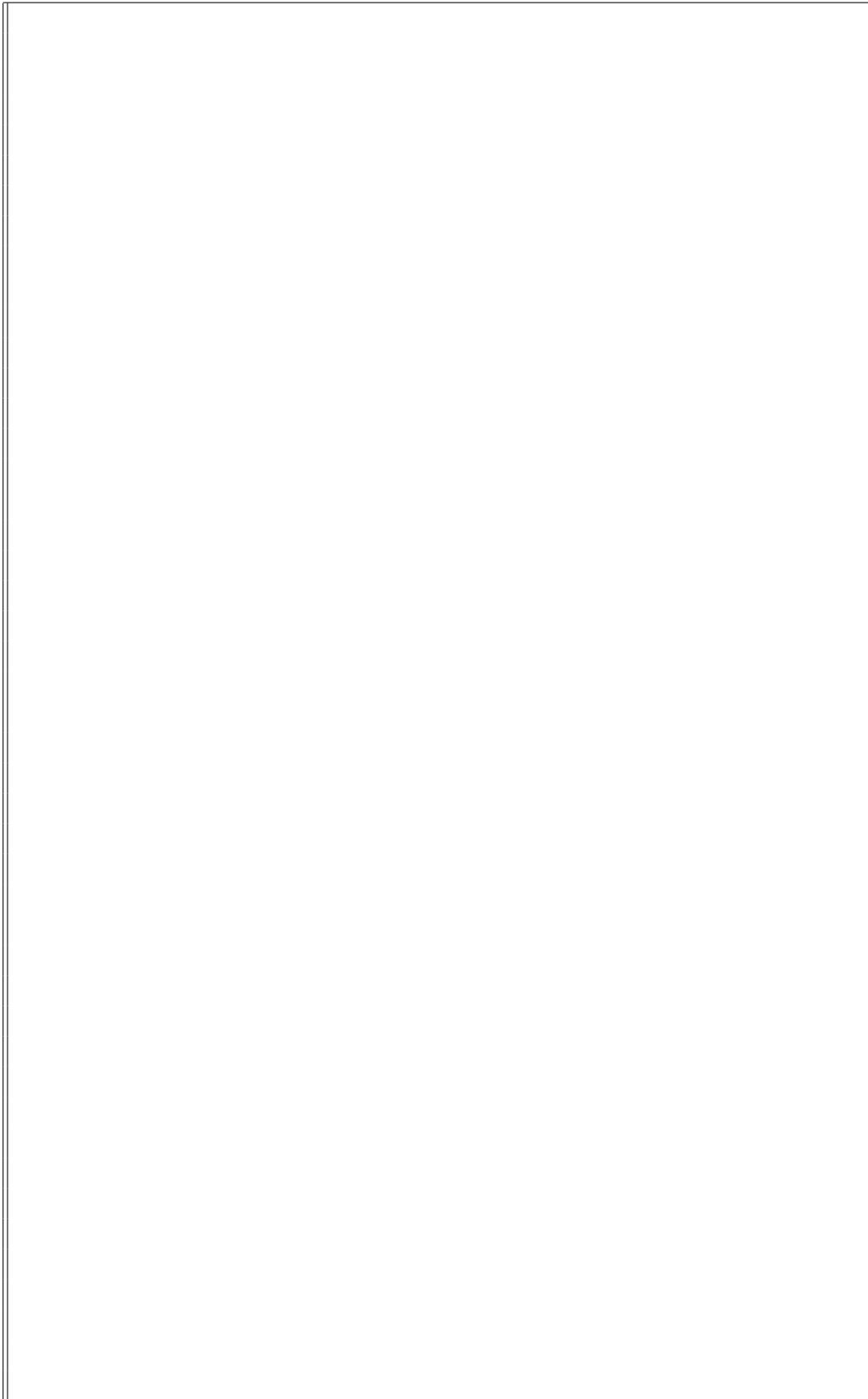
1. תהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^2 , ותהי $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נקודה. הוכיחו:

(א) אם $\Delta f(x_0) < 0$ אז אין ל- f מינימום מקומי ב- x_0 .

(15 נקודות)

(ב) אם $\Delta f(x) \leq 0$ עבור x בסביבה של x_0 , אז אין ל- f מינימום מקומי חזק ב- x_0 .
(כידוע, הנקודה x_0 היא מינימום מקומי חזק אם יש סביבה נקובה של x_0 כך ש-
 $f(x) > f(x_0)$ לכל x בסביבה הנקובה).

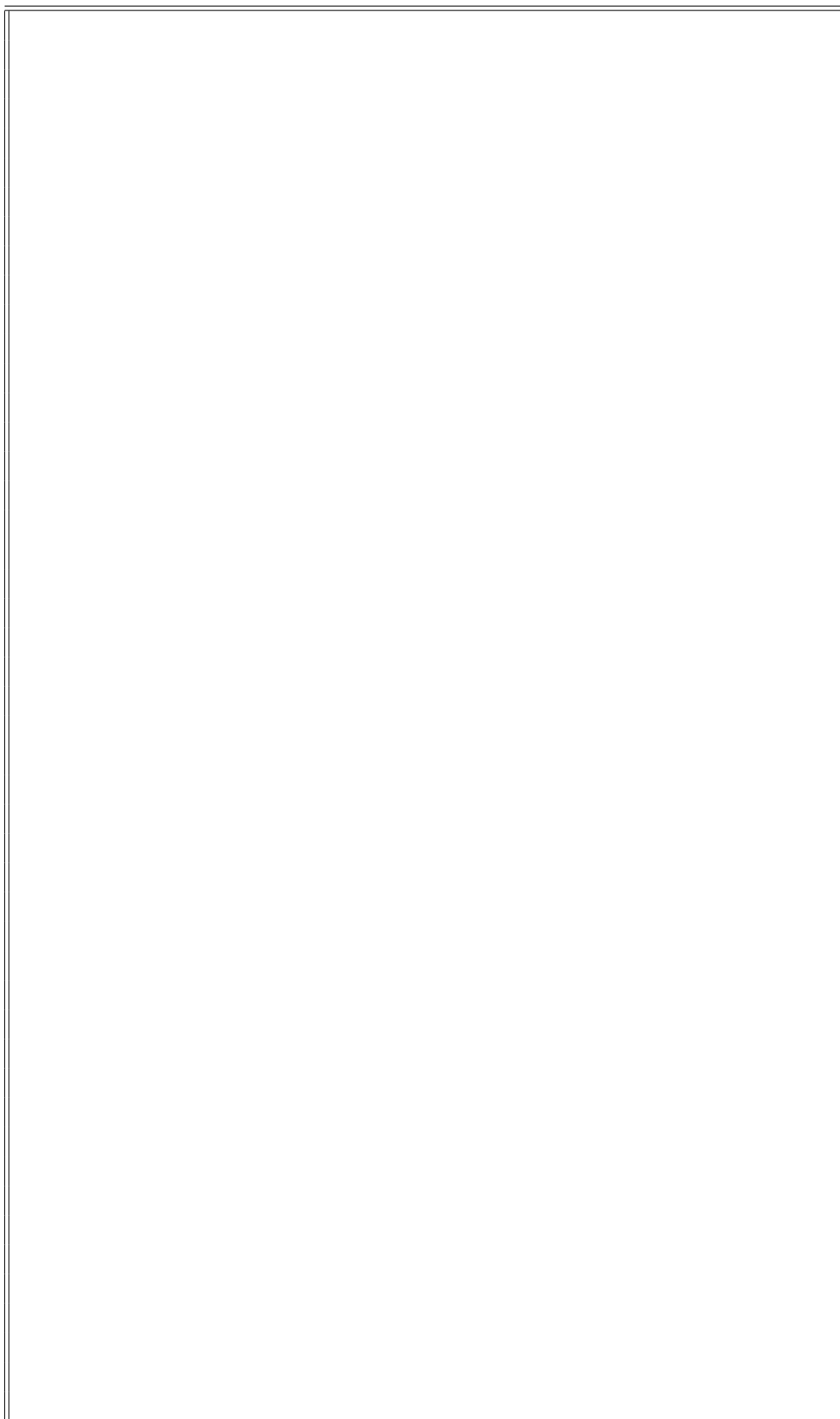
(10 נקודות)





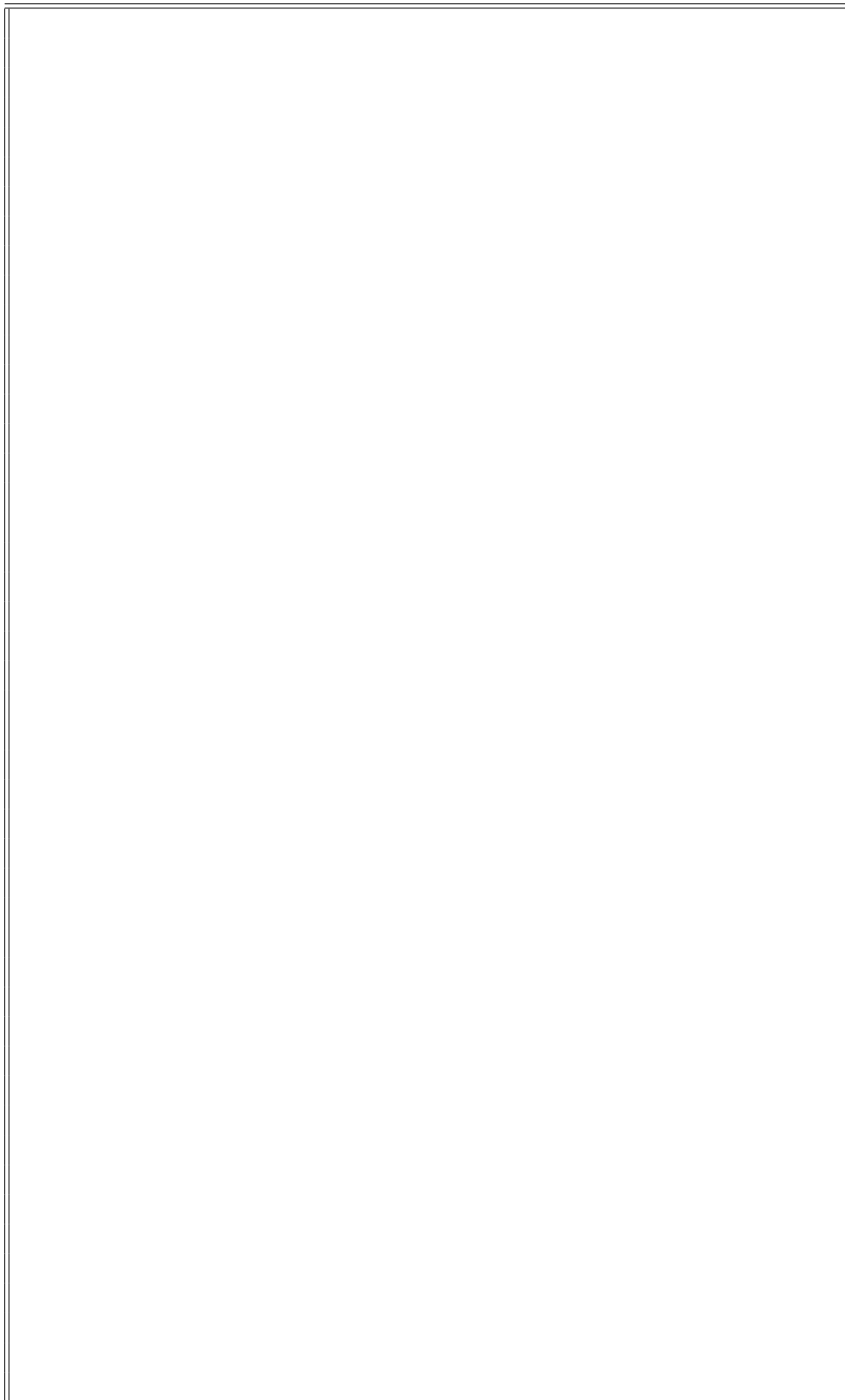
2. הראו כי לכל $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x + ty| e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \sqrt{8\pi(1+t^2)}$$



3. תהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^3 עם תומך קומפקטי. הוכיחו כי

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta f)^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2$$

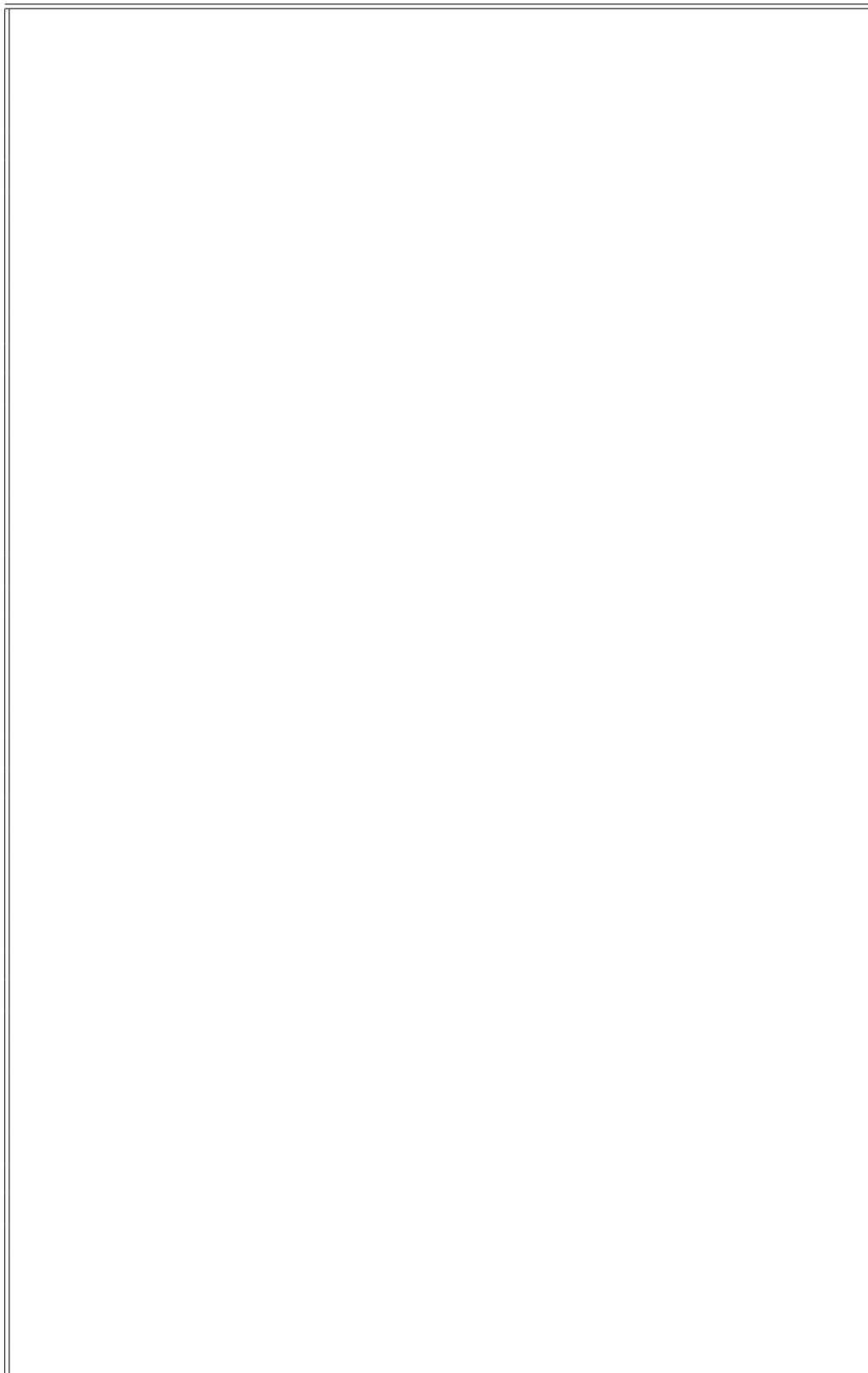


4. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח חלק וקומפקטי. נסמן

$$R = \sup_{x,y \in M} |x - y|^2$$

הוכיחו כי קיימות נקודות $p, q \in M$ עם $|p - q|^2 = R$ כך ש-

$$(q - p) \perp T_p M \quad \text{וגם} \quad (q - p) \perp T_q M$$

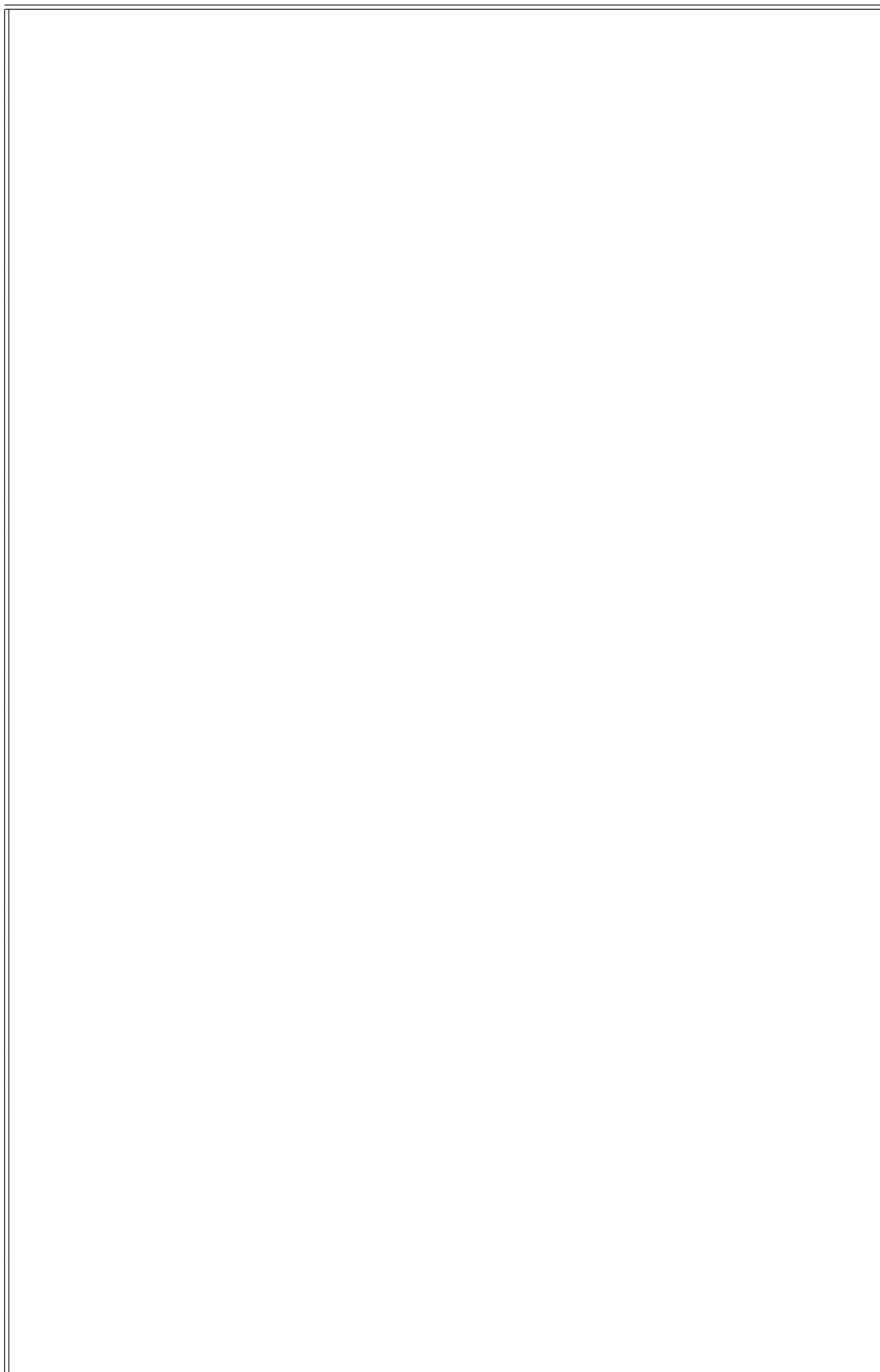


(25 נקודות)

5. נסמן ב- $M_2(\mathbb{R})$ את אוסף המטריצות הממשיות 2×2 , שהינו מרחב וקטורי ארבע-ממדי. הוכיחו כי

$$M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) ; A^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

היא יריעה חלקה חד-ממדית.



במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

