14 בספטמבר 2012

בחינה ־ חדו"א 3, מועד ב

סמסטר א' תשע"ב, אוניברסיטת תל־אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות $A4$ יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

הקיפו את השאלות שבחרתם לענות עליהן:

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

1. תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^2, ותהי $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נקודה. הוכיחו:

(15 נקודות) (א) אם $\triangle f(x_0) < 0$ אז אין ל־ f מינימום מקומי ב־ x_0.

(10 נקודות) (ב) אם $\triangle f(x) \leq 0$ עבור x בסביבה של x_0, אז אין ל־ f מינימום מקומי חזק ב־ x_0.
(כידוע, הנקודה x_0 היא מינימום מקומי חזק אם יש סביבה נקובה של x_0 כך ש־ $f(x) > f(x_0)$ לכל x בסביבה הנקובה).

(25 נקודות) 2. הראו כי לכל $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x+ty| e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy = \sqrt{8\pi(1+t^2)}$$

(25 נקודות) 3. תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^3 עם תומך קומפקטי. הוכיחו כי

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\triangle f)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2$$

(25 נקודות) 4. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח חלק וקומפקטי. נסמן

$$R = \sup_{x,y \in M} |x-y|^2$$

הוכיחו כי קיימות נקודות $p, q \in M$ עם $|p-q|^2 = R$ כך ש־

$$(q-p) \perp T_q M \quad \text{וגם} \quad (q-p) \perp T_p M$$

(25 נקודות) 5. נסמן ב־ $M_2(\mathbb{R})$ את אוסף המטריצות הממשיות 2×2, שהינו מרחב וקטורי ארבע־ממדי.
הוכיחו כי

$$M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \ ; \ A^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

היא יריעה חלקה חד־ממדית.

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):