

בחינה, מועד א' - גיאומטריה דיפרנציאלית

סמסטר א' תשע"ב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

1. נתבונן בעקומה המישורית $p(t) = (t, t^2/2)$.

(א) חשבו את העקמומיות של $p(t)$ כפונקציה של t . (7 נקודות)

(ב) חשבו את מרכז העקמומיות כפונקציה של t . (8 נקודות)

(ג) חשבו את אורך העקומה $q(t) = (t^3, 3t^2/2)$ כאשר $t \in [0, 3/4]$. (10 נקודות)

2. הוכיחו כי משטח ישרים מקיים $K \leq 0$ בכל נקודה, כאשר K היא עקמומיות גאוס. (25 נקודות)

(תזכורת: במשטח ישרים M יש לכל $p \in M$ קטע ישר המכיל את p ומוכל במשטח).

3. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח עם עקמומיות גאוס חיובית בכל מקום, ותהי γ עקומה חלקה המוכלת ב- M . נתון ש- $\gamma'(t) \neq 0$ לכל t . הוכיחו ש-

$$\forall t, \quad \gamma''(t) \neq 0$$

4. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ הפרבולואיד האליפטי $z = x^2 + y^2$. חשבו את

$$\int_M K$$

כאשר K היא עקמומיות גאוס.

5. יהי γ גאודז במשטח $M \subset \mathbb{R}^3$, ונתון ש- γ מוכל במישור. נתון גם של- γ אין נקודות התיישרות (כלומר, $\gamma'' \neq 0$). הוכיחו כי γ' הוא כיוון עיקרי ב- M . (25 נקודות)

בהצלחה!