31 ביולי 2012

# בחינה, מועד ב' - גיאומטריה דיפרנציאלית

## סמסטר א' תשע"ב, אוניברסיטת תל־אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות $A4$ יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

1. נתונה עקומה מישורית חלקה שפונקציית העקמומיות שלה מקיימת

$$\kappa(t) = 3t^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(15 נקודות) (א) הוכיחו שלעקום יש ציר סימטריה.

(10 נקודות) (ב) הוכיחו שהעקום המישורי חסום (כלומר, מוכל בעיגול).

(15 נקודות) 2. (א) חשבו את עקמומיות גאוס של החרוט $x^2 + y^2 = z^2$ בכל הנקודות חוץ מהראשית.

(10 נקודות) (ב) תנו דוגמא למשטח ישרים שעקמומיות גאוס שלו שלילית בכל מקום. (משטח $M$ נקרא משטח ישרים אם לכל נקודה $p \in M$ קיים קטע ישר המכיל את $p$ ומוכל ב־ $M$).

(25 נקודות) 3. תהי $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ עקומה חלקה בפרמטריזציה טבעית בלי נקודות התיישרות (כלומר, $\gamma'' \neq 0$). נסמן ב־ $b(s)$ את הוקטור הבי־נורמל, ונביט במשטח

$$M = \{\gamma(s) + tb(s)\,;\, s,t \in (-1,1)\}\,.$$

נתון ש־ $M$ הוא משטח חלק. הוכיחו כי $\gamma$ גאודז ב־ $M$.

(25 נקודות) 4. נתון משטח $M$ ושתי עקומות חלקות $\gamma_1, \gamma_2$ המוכלות ב־ $M$, בפרמטריזציה טבעית, כך ש־

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p \in M, \qquad \gamma_1''(0), \gamma_2''(0) \in T_pM$$

נסמן ב־ $\alpha \in [0, \pi/2]$ את הזווית בין העקומות, ונתון ש־ $\alpha \neq 0$. הוכיחו כי

$$\min\left\{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|, \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|\right\} = \tan^2(\alpha/2)$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2$ הן העקמומיות הראשיות ב־ $p \in M$ ונתון שלפחות אחת מהן שונה מאפס.

5. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ הפרבולואיד ההיפרבולי $z = xy$.

(10 נקודות) (א) הוכיחו כי לכל $L \in \mathbb{R}$ העקום $\gamma(t) = (L, t, Lt)$ הוא גאודז ב־ $M$.

(15 נקודות) (ב) חשבו את

$$\int_M K ds$$

כאשר $K$ היא עקמומיות גאוס.

# בהצלחה!