יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ משטח דו־ממדי חלק, הנתון ע"י פרמטריזציה מקומית $x : D \to M$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ו־ $M = x(D)$. נניח ש־ $N : D \to \mathbb{R}^n$ נורמל יחידה למשטח M, שהוא פונקציה רציפה וחלקה.

משפט 1: נניח ש־ M משטח מינימלי (עקמומיות ממוצעת מתאפסת בכל מקום). אזי לכל $x_0 \in D$ קיים $\varepsilon > 0$ עם התכונה הבאה: תהי $0 \not\equiv h : D \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה הנתמכת בעיגול $B(x_0, \varepsilon)$ כך ש־ $|\nabla h| < \varepsilon$ בכל העיגול. אזי $Area(\tilde{M}) > Area(M)$ כאשר

$$\tilde{M} = \{x(u) + h(u)N(u) \, ; \, u \in D\}$$

כלומר, משטח מינימלי הוא נקודת מינימום יחידה של פונקציונל השטח, ביחס לעיוויים מקומיים. בהרצאה של יהונתן, המבוססת על פרק 3 בספר של Osserman, ראינו שמשטח מינימלי הוא נקודה סטציונרית של פונקציונל השטח. דהיינו, נסמן, עבור $|t| < 1$,

$$M_t = \{x(u) + th(u)N(u) \, ; \, u \in D\}, \qquad A(t) = Area(M_t) \tag{1}$$

ראינו ש־ $A'(0) = 0$ כאשר M משטח מינימלי (וראינו שגם הכיוון ההפוך נכון, אם ל־ A נקודה סטציונרית ב־ $t = 0$ לכל בחירה של עיוות נורמלי $h : D \to \mathbb{R}$, אזי M משטחי מינימלי). כדי להוכיח את משפט 1, נשתמש בפונקציות קמורות. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. פונקציה חלקה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ תיקרא קמורה לחלוטין אם $\alpha''(t) > 0$ בכל הקטע I. נשים לב (תרגיל בחדו"א 1) שכל נקודה סטציונרית של פונקציה קמורה לחלוטין היא מינימום גלובלי יחיד בקטע I. לכן משפט 1 נובע מ־

משפט 2: נניח ש־ M משטח כלשהוא (לאו דווקא מינימלי). אזי לכל $x_0 \in D$ קיים $\varepsilon > 0$ עם התכונה הבאה: תהי $0 \not\equiv h : D \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה הנתמכת בכדור $B(x_0, \varepsilon)$ כך ש־ $|\nabla h| < \varepsilon$ בכל העיגול. נגדיר את M_t ואת $A(t)$ כמו ב־ **(1)**. אזי הפונקציה $A(t)$ קמורה לחלוטין בקטע $[-1, 1]$.

נשתמש בשתי למות:

למה 1: נניח ש־ $G(t)$ מטריצה 2x2 הפיכה, התלוייה באופן חלק ב־ t. אזי

$$\frac{d^2}{dt^2}\sqrt{\det(G(t))} = \sqrt{\det(G(t))}\cdot\left\{\frac{1}{2}Tr[G^{-1}\ddot{G}] - \frac{1}{2}Tr\left[(G^{-1}\dot{G})^2\right] + \frac{1}{4}Tr[G^{-1}\dot{G}]^2\right\}$$

הוכחת הלמה היא תרגיל בחדו"א 2. מה שחשוב בנוסחא הזו, הוא הגורם $Tr[G^{-1}\ddot{G}]$, הגורמים שמערבים נגזרות נמוכות יותר ־ זניחים.

למה 2 (אי"ש פואנקרה): תהי $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה הנתמכת בעיגול $B(x_0,\varepsilon)$. אזי $\int_{\mathbb{R}^2}|h|^2 \le 5\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla h|^2$. כלומר, בממוצע הנגזרות של h גדולות בהרבה מערכי h.

הוכחה: נניח $x_0=0$, ונחליף את העיגול בריבוע שמכיל אותו, $Q=[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$. אזי לכל $(x,y)\in Q$, מנוסחת ניוטון לייבניץ ומאי־שוויון קושי־שוורץ,

$$|h(x,y)| = \left|\int_0^x \frac{\partial h}{\partial x}(t,y)dt\right| \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\nabla h|(t,y)dt \le \sqrt{2\varepsilon\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\nabla h|^2(t,y)dt}$$

ולכן, ממשפט פוביני,

$$\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^2} h^2 \le \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^2}\left(2\varepsilon\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\nabla h|^2(t,y)dt\right)dxdy = 4\varepsilon^2\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^2}|\nabla h|^2.$$

וסיימנו את הוכחת הלמה. התובנה העיקרית שלנו בינתיים היא שלגבי פונקציות עם תומך קומפקטי קטן, הגורמים המשמעותיים הם אלו המכילים נגזרות של הפונקציה, ואפשר להתעלם באלגנטיות מגורמים שמכילים רק את ערכי הפונקצייה.

הוכחת משפט 2: תהי $h:D\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה. נסמן $x_t(u)=x(u)+th(u)N(u)$ עבור $t\in[-2,2], u\in D$. כפי שראינו בכיתה, עבור $i=1,2$,

$$\frac{\partial x_t}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + t\left[\frac{\partial h}{\partial u_i}N + h\frac{\partial N}{\partial u_i}\right].$$

מכיוון ש־ N נורמל, הוא מאונך ל־ $\partial x/\partial u_i$. מכיוון שהוא נורמל יחידה, הוא מאונך גם ל־ $\partial N/\partial u_i$. ולכן, התבנית היסודית הראשונה של $x : D \to M_t$ היא

$$g_{ij}(t) = g_{ij} + 2th\frac{\partial x}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial N}{\partial u_j} + t^2\left[\frac{\partial h}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial h}{\partial u_j} + h^2\frac{\partial N}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial N}{\partial u_j}\right] \tag{2}$$

נסמן $G(t) = (g_{ij}(t))_{i,j=1,2}$. נקבע איזשהוא $\varepsilon_0 > 0$ כך שהסגור של העיגול $B(x_0,\varepsilon_0)$ מוכל בתחום D. מקומפקטיות, אנו יודעים שהפונקציות $\partial x/\partial u_i, \frac{\partial N}{\partial u_j}$ וכו' חסומות בעיגול $B(x_0,\varepsilon_0)$. בנוסף, המטריצה $G(0)$ מוגדרת חיובית, וחסומה מלרע ע"י המטריצה αId ומלעיל ע"י המטריצה βId בעיגול $B(x_0,\varepsilon_0)$, כאשר $\alpha,\beta > 0$ קבועים. מהלמה של פואנקרה נובע שיש $\varepsilon_1 > 0$ כך שעבור $\varepsilon < \varepsilon_1$, התנאי $|\nabla h| < \varepsilon$ גורר שבכל העיגול $B(x_0,\varepsilon_0)$ ולכל $|t| < 2$,

$$(\alpha/2)Id \le G(t) \le 2\beta Id \tag{3}$$

עתה, נשתמש בלמה 1. בעזרת גזירה מתחת לסימן האינטגרל (תרגיל!),

$$\frac{d^2}{dt^2}Area(M_t) = \int_D \frac{d^2}{dt^2}\sqrt{\det(G(t))} = \int_D \sqrt{\det(G(t))}\frac{Tr\left[G(t)^{-1}G''(t)\right]}{2} + E$$

כאשר E מכיל את שאר הגורמים מלמה 1. מהנוסחא (2) מקבלים ביטויים מפורשים לנגזרות של G, ואפשר לרשום את E במפורש. למעשה, נובע מ־ (3) שאפשר לחסום את E בערך מוחלט ע"י $h^2(u)\cdot\varphi$ כאשר הפונקציה φ היא איזושהיא פונקציה מפורשת של $\alpha,\beta,x,N,\partial x/\partial u_i,\partial N/\partial u_j$, שבהכרח חסומה ב־ $B(x_0,\varepsilon)$. עתה, אפשר לרשום,

$$\frac{d^2}{dt^2}Area(M_t) \ge \int_D \frac{\sqrt{\det(G(t))}}{2}(G(t)^{-1}\nabla h\cdot\nabla h)+h^2\tilde{\varphi}(x,N,\alpha,\beta) \ge \int_D \frac{\alpha}{4\beta}|\nabla h|^2 - Ch^2$$

כאשר $\tilde{\varphi}$ פונקציה מפורשת של $\alpha,\beta,x,N,\partial x/\partial u_i,\partial N/\partial u_j$, שבהכרח חסומה מלרע ע"י

איזשהוא מספר $C-$ בעיגול $B(x_0,\varepsilon)$. כאן $C>0$ קבוע. עתה, נבחר

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\sqrt{\alpha/(20\beta C)}\}$$

הלמה של פואנקרה מבטיחה שתחת התנאי $Supp(h)\subseteq B(x_0,\varepsilon)$, בהכרח הנגזרת השנייה של $Area(M_t)$ חיובית בכל הקטע $[-2,2]$, כנדרש.

תרגיל*: להוכיח את המשפט תחת תנאי חלש יותר: להחליף את התנאי $|\nabla h|<\varepsilon$ בתנאי $|h|<\varepsilon$.

(רמז: מי מבין שני האי־שיוויונים ב־ (3) שורד את ההחלפה? איך אפשר להסתפק בו בהמשך ההוכחה?)