<u>משפט Peano</u>: קיימת פונקציה רציפה מ־ $[0,1]$ על הריבוע $[0,1]^2$.

יש כמה בניות של עקום כנ"ל, חלקן יפות מאוד. קל לבנות העתקות לא רציפות, למשל

$$[0,1] \in 0.a_1a_2a_3a_4\ldots \quad \mapsto \quad (0.a_1a_3\ldots, 0.a_2a_4\ldots) \in [0,1]^2.$$

ההעתקה הזו לא מוגדרת היטב עבור מספרים שיש להן שתי הצגות עשרוניות, וחמור מכך: יש לה קפיצה בנקודות הנ"ל, הגבולות משמאל ומימין שונים. ננסה לתקן את ההעתקה, "להחליק את הקפיצות", ולקבל עקום רציף.

לשם כך נבחר פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ בעלת התכונות הבאות:

1. $f(t)=0$ עבור $t\in[0,3]$.
2. $f(t)=1$ עבור $t\in[4,9]$.
3. ל־ f יש מחזור 10, כלומר, $f(t+10)=f(t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$. נובע, לדוגמא, ש־ $f(10)=0$.

אין שום בעייה לצייר גרף של פונקציה רציפה כנ"ל, ואפילו לרשום נוסחא מפורשת. שימו לב: כאשר נתון לנו $t\in\mathbb{R}$ שערכו השלם $\lfloor t\rfloor$ שווה לאפס, בהכרח $0\le t<1$ ו־ $f(t)=0$. באופן כללי, יש לנו את הטבלה הבאה:

$\lfloor t\rfloor \mod 10$	$f(t)$	$f(t+2)$
0	0	0
2	0	1
4	1	1
6	1	1
8	1	0

מהתבוננות בטבלה מגיעים למסקנה הבאה: שני ערכי הפונקציה $f(t)$ ו־ $f(t+2)$ נקבעים על ידי $\lfloor t\rfloor \mod 10$, במידה ו־ $\lfloor t\rfloor \mod 10$ מספר זוגי. עתה נגדיר את עקום Peano המבוקש כך:

$$H(t)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(10^nt)}{2^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(10^nt+2)}{2^n}\right)\qquad (t\in[0,1]).$$

זו העתקה מ־ $[0,1]$ ל־ $[0,1]^2$, כי $0\le f\le 1$. הפונקציה f רציפה, ושני הטורים בהגדרה של T מתכנסים במ"ש, מקריטריון ויירשטראס. לכן T העתקה רציפה מהקטע לריבוע.

נותר רק להסביר מדוע H היא העתקה על. תהי $(x,y)\in[0,1]^2$. קיים פיתוח בינארי

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n},\qquad y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}$$

כאשר $x_n, y_n \in \{0,1\}$ לכל n. צריך למצוא $t \in [0,1]$ שמקיים $H(t) = (x,y)$, כלומר,

$$f(10^n t) = x_n, \qquad f(10^n t + 2) = y_n$$

עבור $n = 1, 2, \ldots$.

נבנה את המספר $t \in [0,1]$ לפי הפיתוח העשרוני שלו. מה הקשר בין הפיתוח העשרוני והעקומה H? אם $\lfloor 10^n t \rfloor \mod 10$ זוגי, אזי הערכים $f(10^n t)$ ו־ $f(10^n t+2)$ נקבעים לפי הטבלה שלעיל. הביטוי $\lfloor 10^n t \rfloor \mod 10$ שווה בדיוק לספרה ה־ n בפיתוח העשרוני של t. לכן, בהינתן x_n ו־ y_n, נגדיר את $a_n \in \{0,2,4,8\}$ לפי הטבלה כך ש־

$$f(a_n) = x_n, \qquad f(a_n + 2) = y_n.$$

עתה, המספר $t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n \in [0,1]$ הוא המספר המבוקש. הפיתוח העשרוני שלו הוא $0.a_1a_2a_3\ldots$. מתקיים ש־ $\lfloor 10^n t \rfloor \mod 10 = a_n$ ולכן

$$f(10^n t) = x_n, \qquad f(10^n t + 2) = y_n$$

כנדרש לכל n, לפי הבחירה של a_n. לסיכום, מצאנו $t \in [0,1]$ שמקיים $H(t) = (x,y)$ והפונקציה H היא על הריבוע.

שימו לב שהעקומה H שבנינו כלל אינה חח״ע. למעשה, הראנו שהתמונה של תת־הקטע $[0, 8/9]$ כבר מכסה את כל הריבוע (למה?). יש כאן יתירות עצומה, אך זה צפוי: אין עקום Peano חח״ע. למעשה, בדוגמא שלנו, התמונה של קבוצה מטיפוס קנטור (המספרים שבפיתוח העשרוני שלהם יש רק ספרות זוגיות שונות מ־ 6) מכסה את כל הריבוע. למתעניינים מומלץ לקרוא באינטרנט על עקומות נוספות, כמו האלגוריתם הריקורסיבי של Hilbert לבניית עקום שממלא את הריבוע.