

24 ביוני 2015

בחינה - פונקציות מרוכבות 1, מועד א

סמסטר ב, תשע"ה, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג, מתרגל: אורי גרופל.

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. וודאו היטב את תשובותיכם לפני כתיבתן בטופס המבחן.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

1. נסמן $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \geq 1\}$ ו- $G = \mathbb{C} \setminus E$.

- (א) תנו דוגמא לפונקציה הולומרפית $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ שיש לה קוטב ב- $1/n$ לכל $n \geq 1$. (10 נקודות)
- (ב) הוכיחו שלכל פונקציה כנ"ל ולכל $\varepsilon > 0$, הקבוצה $f(D(0, \varepsilon) \cap G)$ צפופה ב- \mathbb{C} , כאשר $D(0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}$. (15 נקודות)

2. נסמן $p(z) = 9z^6 + 4z^4 - 6z^3 + 1$. כמה אפסים יש ל- p בכל רביע? (25 נקודות)

3. תהי $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומרפית. הוכיחו של- e^f אין קוטב ב- ∞ .

(25 נקודות)

(25 נקודות)

4. חשבו את

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

5. נסמן $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. נתונה פונקציה הולומורפית $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ כך שלכל $z \in D$, (25 נקודות)

$$\operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}f(z) \geq 0$$

הוכיחו כי לכל $x \in (-1, 1)$ הנגזרת $f'(x)$ ממשית ואי־שלילית.

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

