

30 ביולי 2015

בחינה - פונקציות מרוכבות 1, מועד ב

סמסטר ב, תשע"ה, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג, מתרגל: אורי גרופל.

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. וודאו היטב את תשובותיכם לפני כתיבתן בטופס המבחן.

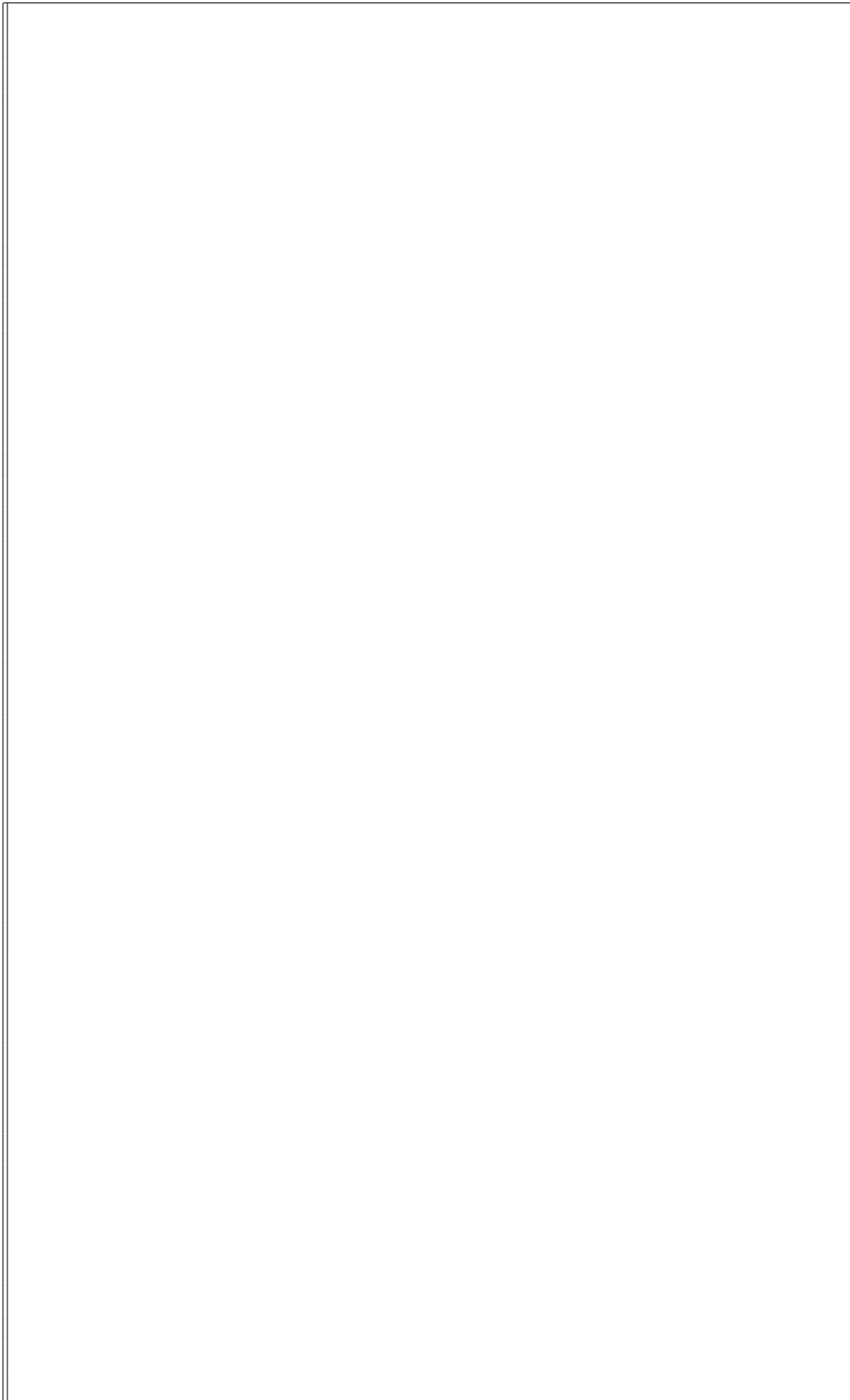
מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

- (25 נקודות) 1. נניח ש- f הולומרפית בדיסק המנוקב $D^*(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$. נתון ש- $\operatorname{Re}(f(z)) < 17$ לכל $z \in D^*(0, 1)$. הוכיחו שהסינגולריות של f בראשית - סליקה.

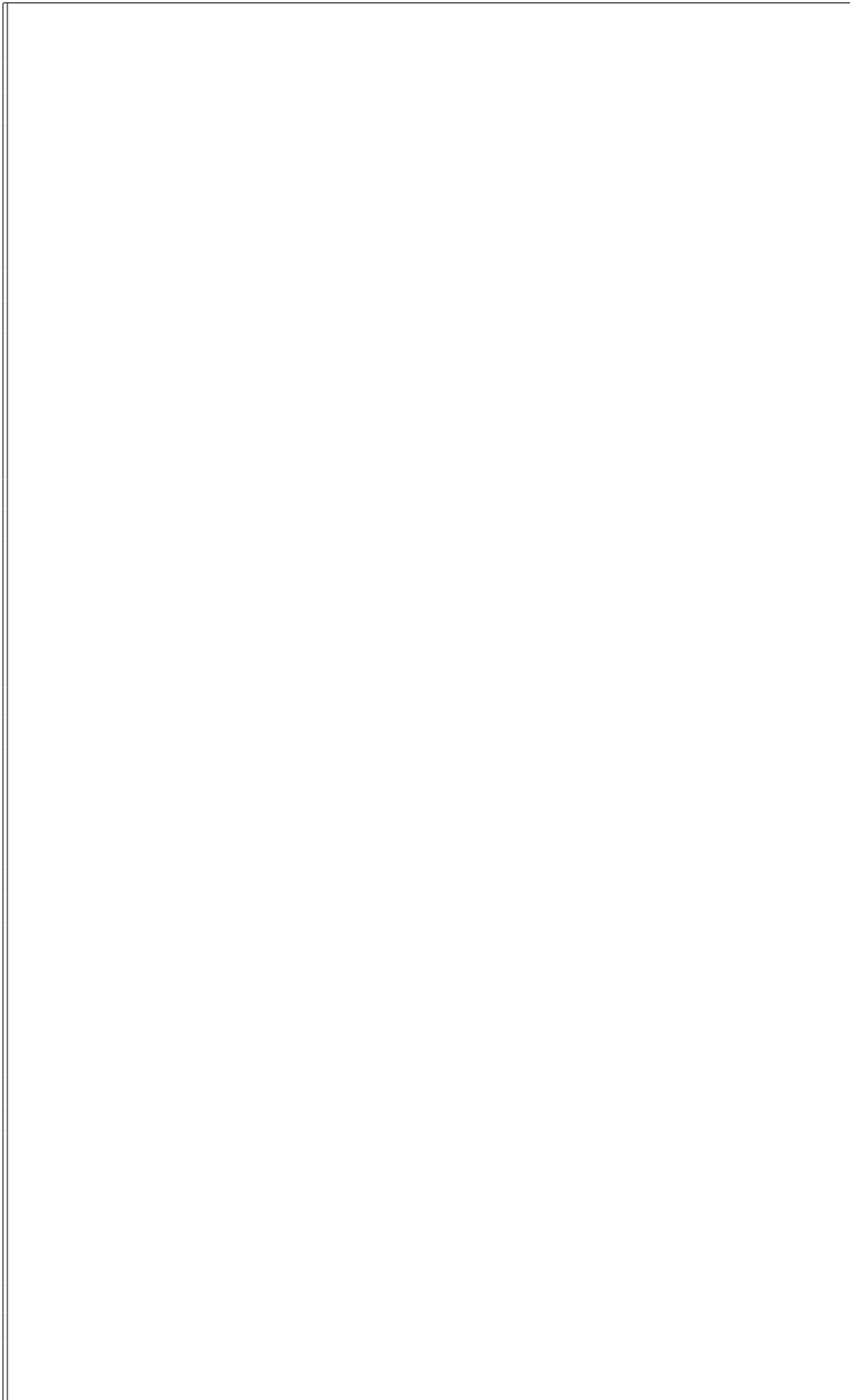
2. נסמן $D(0, 3) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 3\}$. נניח ש- f פונקציה הולומרפית ב- $D(0, 3) \setminus \{2i\}$, עם קוטב מסדר 2 בנקודה $2i$. נתון ש- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ בסביבה של הראשית. הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2i.$$



3. נסמן $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. נניח ש- $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, הולומורפית ב- D . נתון ש- f חח"ע. הוכיחו כי לכל $w_0 \in f(D)$,

$$f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$



(25 נקודות)

4. יהי $R > 0$. חשבו את

$$\int_0^{2\pi} e^{R \cos t} \cos(R \sin t + 3t) dt$$

5. תהי f פונקציה הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. עבור $r > 0$ נסמן $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. נתון כי $M(4) \leq 1$ ו- $M(1) \leq 16$. הוכיחו כי $M(2) \leq 4$.
(רמז: הביטו בפונקציה $g(z) = z^2 f(z)$)
- (25 נקודות)

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

