

בחינה, מועד א' - פונקציות מרוכבות 1

סמסטר ב' תשע"א, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור חמש מתוך שש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

20 נקודות) 1. נסמן $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. תהי $f : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית, כך ש-

$$0 < |z| < 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(f(z)) > 0.$$

הוכיחו של- f יש סינגולריות סליקה ב-0.

20 נקודות) 2. הראו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$$

עבור $-1 < a < 1$.

(רמז: אפשר להעזר במסילה שהיא שפת המלבן $[-R, R] \times [0, \pi]$ במישור המרוכב).

17 נקודות) 3. (א) יהי $n \geq 1$. הוכיחו שלפונקציה

$$(z-1)^n e^z + \frac{1}{2}(z+1)^n$$

יש בדיוק n אפסים (כולל ריבוי) בחצי המישור הימני.

3 נקודות) (ב) הוכיחו שכל האפסים הנ"ל פשוטים.

20 נקודות) 4. נסמן $A = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. מצאו את כל הפונקציות ההולומורפיות $f : A \rightarrow B$ שהן חד-חד-ערכיות ועל.

5. נסמן ב- \mathcal{F} את אוסף הפונקציות השלמות, עם $f(z) = f(z+1)$ לכל $z \in \mathbb{C}$, כך ש-

$$\sup_{t \in [0,1]} |f(t + iR)| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

(א) תנו דוגמא ל- $f \in \mathcal{F}$ שאינה פונקציית האפס. (5 נקודות)

(ב) הוכיחו שלכל $f \in \mathcal{F}$, (15 נקודות)

$$\int_0^1 f(t) dt = 0$$

6. קבוצה $A \subset \mathbb{Z}$ נקראת "שמאלית" אם קיימים $R_1 < R_2$ כך ש-

$$n < R_1 \Rightarrow n \in A, \quad n > R_2 \Rightarrow n \notin A.$$

(א) הוכיחו שלכל $A \subset \mathbb{Z}$ שמאלית קיימות פונקציות מרומורפיות (10 נקודות)

$$f_A, g_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ כך שלכל } |z| > 1,$$

$$f_A(z) = \sum_{n \in A} z^n$$

ולכל $0 < |z| < 1$,

$$g_A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus A} z^n$$

(ב) תהי $A \subset \mathbb{Z}$ שמאלית. הראו כי (10 נקודות)

$$f_A(z) + g_A(z) = 0$$

לכל $z \in \mathbb{C}$ שאינו קוטב של f_A או של g_A .

בהצלחה!