25 באוגוסט 2011

בחינה, מועד ב' - פונקציות מרוכבות 1

סמסטר ב' תשע"א, אוניברסיטת תל־אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור חמש מתוך שש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות $A4$ יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

(20 נקודות) 1. הראו כי

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^a(x+1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

עבור $0 < a < 1$. התרשים הבא הוא רמז לפיתרון אפשרי:

(17 נקודות) 2. (א) יהי $n \geq 1$. הוכיחו שלפונקציה

$$f(z) = 2(z-1)^n e^z - 1$$

יש n אפסים (כולל ריבוי) בדיסק $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z-1| < 1\}$.

(3 נקודות) (ב) הוכיחו שאין ל־ f אפסים בתחום $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ Re(z) > 0, |z-1| > 1\}$.

(20 נקודות) 3. מצאו העתקה הולומורפית, חח"ע ועל $f : A \to B$ כאשר A הוא חצי המישור הימני, ו־

$$B = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Re(z) > 0, \ z \notin [0,1]\}.$$

(20 נקודות) 4. תהי f פונקציה שלמה, עם $f(z)=f(z+1)$ לכל $z\in\mathbb{C}$, כך ש־

$$\sup_{t\in[0,1]}|f(t+iR)|\overset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

הוכיחו כי

$$\int_0^1(Ref(t))^2dt=\int_0^1(Imf(t))^2dt$$

5. נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את אוסף הפונקציות ההולומורפיות $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ כך שלכל $z\neq 0$,

$$f(1/z)=-f(z).$$

(10 נקודות) (א) תהי $f\in\mathcal{F}$. הוכיחו כי השארית של $f(z)/z$ בראשית שווה לאפס.

(10 נקודות) (ב) תהי $f\in\mathcal{F}$ שאינה פונקציית האפס. הוכיחו שהסינגולריות של f בראשית אינה סליקה.

6. נסמן $D=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$. תהי $f:D\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית, כך ש־

$$0<|z|<1\qquad\Rightarrow\qquad f(z)\notin(0,1)$$

(15 נקודות) (א) הוכיחו של־ f יש קוטב או סינגולריות סליקה ב־ 0.

(5 נקודות) (ב) נניח של־ f יש המשכה הולומורפית לכל D, וש־ f אינה פונקציית האפס. הוכיחו ש־ $f(0)\neq 0$.

בהצלחה!