

בחינה, מועד ב' - מבוא לאנליזה הרמונית

סמסטר ב' תשע"ב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

חלק ראשון

פתרו שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות:

1. הוכיחו את נוסחת Plancherel: תהי $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. אזי (30 נקודות)

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

2. יהיו $f \in L^1(\mathbb{T}), x_0 \in \mathbb{T}, \alpha > 0$. נתון ש- f היא פונקציית Hölder מסדר α בסביבה של x_0 . הוכיחו כי טור פורייה של f מתכנס ב- x_0 . (30 נקודות)

3. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה 2π -מחזורית וחסומה שהיא הפרש של שתי פונקציות עולות. הוכיחו כי קיים קבוע $C > 0$ כך ש- (30 נקודות)

$$\forall N, \|S_N f\|_\infty \leq C$$

$$\text{כאשר, כרגיל, } S_N(f)(t) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{int}.$$

4. מצאו את כל הדיסטריבוציות המתונות $L \in \mathcal{S}^*$ (tempered distributions) שעבורן (30 נקודות)

$$(D - 3i)^2(L) = 0.$$

$$\text{כאשר } (D - 3i)(L) = L' - 3iL.$$

חלק שני

פתרו את השאלה הבאה:

(10 נקודות) 5. יהי $p \geq 2$ שלם וזוגי, ו- $f, g \in L^p(\mathbb{T})$. נתון שלכל $n \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}(n)| \leq \hat{g}(n)$$

הוכיחו כי

$$\|f\|_p \leq \|g\|_p$$

בהצלחה!