נפחים בממד גבוה

סמסטר ב' 2014

סיכומי שיעור של בועז קלרטג, נכתבו על-ידי עמיר ליבנה בר-און.

אוניברסיטת תל-אביב, 2014.

תוכן עניינים

1 הקוביה במימד גבוה: משפטי גבול מרכזי במשתנים בלתי-תלויים (19/2/2014)

שעה 10

[הקדמה שפספסתי]

[משהו על סקאלות גודל ב-$\mathbb{R}^n$ כש-$n \to \infty$: הגיוני לחשוב על 1 ועל $\sqrt{n}$]

נחקור היום את הקוביה $Q^n = [0,1]^n$.

סימון: $X \sim \mathrm{Unif}\,(A)$ משמעו ש-X וקטור מקרי עם התפלגות

$$P\,(X \in B) = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

קוטר הקוביה הוא

$$\mathrm{diam}\,(Q^n) = \sup_{x,y \in Q^n} |x-y|$$

מהו $|X-Y|$ כאשר $X, Y \sim \mathrm{Unif}\,(Q^n)$ ב"ת?

חישבנו את ממוצע L^2:

$$\sqrt{\mathbb{E}\,|X-Y|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |X_i - Y_i|^2} = [\ldots] = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}}$$

אפשר להראות גם $\mathbb{E}\,|X-Y| \approx \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}}$, וגם החציון, וגם כל מדד סביר למרחק טיפוסי יתן תוצאה כזו, עד-כדי הפרש יחסי מסדר גודל $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

נשנה את הסימון, ונעבוד מעכשיו עם קוביה $Q^n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ סביב ראשית הצירים. אם $X \sim \mathrm{Unif}\,(Q^n)$, אז $\mathbb{E}X_i = 0, \mathbb{E}X_i^2 = \frac{1}{12}$.

נסמן $Y_i = \sqrt{12}X_i$, אז Y_i עם תוחלת 0, שונות 1, וממשפט הגבול המרכזי $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} Y_i \sim N\,(0,1)$ בערך. למעשה לכל וקטור $\theta \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\mathbb{E}\,\langle \theta, Y \rangle = 0$, $\mathrm{Var}\,\langle \theta, Y \rangle = |\theta|^2$.

משפט 1: (משפט הגבול המרכזי, CLT)

קיים קבוע $C > 0$ כל שלכל מספר טבעי n, לכל $\theta \in S^{n-1}$ ולכל $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \mathbb{P}\left(\langle \theta, Y \rangle \le t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \right| \le C \cdot \sum_{i=1}^{n} \theta_i^4$$

המקרה החשוב ביותר הוא $\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, אז $\sum \theta_i^4 = \frac{1}{n}$.

במקרה שבו $\theta=(1,0,\ldots,0)$, $\sum\theta_i^4=1$ ו-$\langle\theta,Y\rangle=Y_1$ לא מתפלג קרוב לנורמלי.

תחת הנרמול $|\theta|=1$, יש קירוב גאוסי כאשר $\max|\theta_i|\ll 1$. למה?

$$\sum\theta_i^4\le\max|\theta_i|^2\cdot\sum\theta_i^2=\max|\theta_i|^2$$

(יש גם משפט דומה עם א"ש בכיוון ההפוך או משהו)

המשמעות הגאומטרית של CLT:

[היו פה הרבה ציורים, הסברים על משפט פוביני, חתכים וכו']

המסקנה הסופית היתה שאם $X\sim\mathrm{Unif}\left(Q^n\right)$, הצפיפות של $\langle\theta,X\rangle$ היא שטח החתך $f_\theta\left(t\right)=\mathrm{Vol}_{n-1}\left(Q^n\cap H_{\theta,t}\right)$ כאשר $H_{\theta,t}$ הוא העל-מישור

$$H_{\theta,t}=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta\rangle=t\}$$

משפט 2: (גם כן גבול מרכזי)

(קיים C) עבור $\theta\in S^{n-1}$, $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\left|\sqrt{12}f_\theta\left(\sqrt{12}t\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\le C\cdot\sum\theta_i^4$$

זו דוגמא ל<u>עקרון האוניברסליות בממד גבוה</u>: הגאוסיאן מופיע בקירוב, בלי קשר לפרטים של הבעיה.

שעה 11

דיברנו על העובדה הבאה: אם לוקחים את קובית היחידה ב-$\mathbb{R}^n$ ולוקחים חתכים שמאונכים ל-$\theta\in S^{n-1}$, $Q^n\cap H_{\theta,t}$, הנפחים שלהם מתפלגים גאוסי. זה כאשר הקורדינאטות של θ קטנות, אפשר להגיע עד דרגת קירוב $\frac{1}{n}$, אבל אם θ קרוב לוקטור בסיס זה כמובן לא יהיה נכון.

נוכיח את משפט 2. (החלק הראשון לפחות)

השיטה שנשתמש בה רלבנטית רק לקוביה, אבל לא לכדור נניח, כי היא משתמשת באי-תלות של המשתנים. זה יהיה באמצעות טרנספורם פוריה.

הגדרה: עבור $f\in L^1\left(\mathbb{R}\right)$, מגדירים את טרנספורם פוריה של f לפי הנוסחא

$$\hat{f}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-2i\pi xt}dx$$

תכונות:

- הפונקציה $\hat{f}$ תמיד חסומה:

$$\left|\hat{f}\left(t\right)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\underbrace{e^{-2i\pi xt}}_{\left|\cdot\right|=1}dx\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\right|_{L^{1}\left(\mathbb{R}\right)}<\infty$$

- הפונקציה $\hat{f}$ תמיד רציפה: יהיו $t_{n}\to t$ ב-$\mathbb{R}$, רוצים להראות $\hat{f}\left(t_{n}\right)\to\hat{f}\left(t\right)$, אם

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-2i\pi t_{n}x}dx\to\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-2i\pi tx}dx$$

זה נכון כי הפונקציות מתכנסות נקודתית כב"מ, ויש מז'ורנטה אינטגרבילית $\left|f\right|$. ממשפט ההתכנסות הנשלטת $\hat{f}$ רציפה.

- טרנספורם פוריה של משתנה מקרי נקרא "פונקציה אופיינית" "characteristic function".

$$\varphi_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}e^{-2i\pi tX}$$

וזה שקול לטרנספורם פוריה של הצפיפות של X, אם יש לו צפיפות.

דוגמאות:

- הכי חשוב: גאוסיאן. זו נקודת שבת הכי יפה. יש מרחב אינסוף-ממדי של נקודות שבת.

אם

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^{2}}$$

אז

$$\hat{f}\left(t\right)=e^{-2\pi^{2}t^{2}}$$

(איך לזכור? $\widehat{e^{-\pi x^{2}}}=e^{-\pi xt^{2}}$, ובאופן כללי $\widehat{af\left(ax\right)}=\hat{f}\left(t/a\right)$)

חישוב במרוכבות נותן את התוצאה הזו:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\pi xt}e^{-\pi x^{2}}dx=e^{-\pi t^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(x+it\right)^{2}}dx\underset{\text{translate contour}}{=}e^{-\pi t^{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^{2}}dx}_{1}=e^{-\pi t^{2}}$$

- אם $f=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\mathbf{1}_{[-\sqrt{3},\sqrt{3}]}$ אז

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{12}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}e^{-2i\pi xt}dx=\frac{1}{\sqrt{12}}\frac{e^{-2i\pi xt}}{2i\pi t}|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{12}}\frac{\sin\left(-2\pi\sqrt{3}t\right)}{-\pi t}=\operatorname{sinc}\left(\sqrt{12}t\right)$$

כאשר $\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

- נניח $X_i\sim\operatorname{Unif}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$, הפונקציה האופיינית של $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$ היא

$$\varphi(t)=\mathbb{E}e^{-2i\pi t\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}\underset{\text{indep.}}{=}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}e^{-2i\pi t\frac{X_i}{n}}$$

ראינו שעבור $\sqrt{12}X_j$ מתקיים

$$\mathbb{E}e^{-2i\pi t\sqrt{12}X_j}=\operatorname{sinc}\left(\sqrt{12}t\right)$$

ולכן

$$\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n}$$

- לסיכום, אם f היא הצפיפות של $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$ אז

$$\hat{f}(t)=\operatorname{sinc}^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

מטרתנו היא להראות ש- $\sqrt{12}f\left(\sqrt{12}x\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

האסטרטגיה שלנו: נראה ש- $\hat{f}(t)\approx e^{-\pi^2t^2/6}$ (שהוא הפוריה של הגאוסיאן).

נשתמש ב-

משפט: (נוסחת ההיפוך של טרנספורם פוריה)

נניח $f,\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. אז כמעט לכל $x\in\mathbb{R}$, ולכל x בו f רציפה,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{2i\pi xt}dt$$

ובפרט אפשר לשנות את f בקבוצת נקודות ממידה 0 ולקבל פונקציה רציפה.

תקציר הוכחה:

1. משתמשים בפוביני, ומראים שלכל $f,g\in L^1$,

$$\int\hat{f}g=\int_{\mathbb{R}^2}f\left(x\right)e^{-2i\pi xt}g\left(t\right)dxdt=\int f\hat{g}$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(t\right)\underbrace{e^{-\pi\delta t^2}e^{2i\pi x_0t}}_{\text{fourier+phase}}dt=\int f\left(x\right)K_\delta\left(x-x_0\right)dx$$

כאשר $K_\delta\left(t\right)=\delta^{-1/2}e^{-\pi t^2/\delta}$.

3. כאשר $\delta\searrow0$, צד שמאל שואף ל-$\int\hat{f}\left(t\right)e^{2i\pi x_0t}dt$ (מהתכנסות נשלטת), ואילו צד ימין שואף ל-$f\left(x_0\right)$. כאשר f רציפה ב-x_0 זה קל לראות, ובשאר המקרים צריך לקרב אותה עם פונקציות רציפות.

נוכיח כעת את משפט הגבול המרכזי.

כזכור, המטרה היא לקרב את $\hat{f}$ ע"י גאוסיאן, ולהשתמש בנוסחת ההיפוך, כאשר

$$\hat{f}\left(t\right)=\operatorname{sinc}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

בפונקציה sinc בסביבות 0, יש קטע באורך $O\left(1\right)$ שמאוד קרוב לקבוע. לכן ל-$\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ יש קטע כמעט-קבוע באורך $O\left(\sqrt{n}\right)$. ליתר דיוק, פיתוח טיילור נותן

$$\operatorname{sinc}\left(t\right)\approx1-\frac{\pi^2}{6}t^2$$

ולכן

$$\operatorname{sinc}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\approx\left(1-\frac{\pi^2}{6}\frac{t^2}{n}\right)^n\approx e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}$$

נעשה את זה מפורט ומדויק.

למה 1: לכל $|x|\le1/2$,

$$\log\operatorname{sinc}\left(x\right)=-\frac{\pi^2}{6}x^2+O\left(x^4\right)$$

כאשר $O\left(y\right)$ הוא קיצור לביטוי מסובך E, עם התכונה ש-$|x|\le Cy$ כאשר $C>0$ קבוע אוניברסלי.

הוכחה:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+R\left(x\right)x^5$$

עם $R\left(x\right)=\frac{1}{5!}\cos\xi$, כלומר $\left|R\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{120}$.

לכן, עבור $\left|x\right|\leq\frac{1}{2}$,

$$\mathrm{sinc}\left(x\right)=\frac{\sin\left(\pi x\right)}{\pi x}=\frac{\pi x-\frac{\pi^{3}}{6}x^{3}+R\cdot\pi^{5}x^{5}}{\pi x}=1-\frac{\pi^{2}}{6}x^{2}+\tilde{R}\cdot x^{5}$$

כאשר $1<\frac{\pi^{4}}{120}\geq\left|\tilde{R}\right|$.

בנוסף, אם $\left|x\right|\leq\frac{3}{4}$ אז

$$\log\left(1+x\right)=x+O\left(x^{2}\right)$$

כדי להשתמש בקירוב הזה נרצה לוודא שאכן $\left|\mathrm{sinc}\left(x\right)-1\right|\leq\frac{3}{4}\impliedby\left|x\right|\leq\frac{1}{2}$:

$$\left|-\frac{\pi^{2}}{6}x^{2}+\tilde{R}\cdot x^{5}\right|\leq\frac{\pi^{2}}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{32}<\frac{3}{4}$$

ומכאן ש-

$$\log\mathrm{sinc}\left(x\right)=\left(-\frac{\pi^{2}}{6}x^{2}+\tilde{R}\cdot x^{5}\right)+O\left(\left[-\frac{\pi^{2}}{6}x^{2}+\tilde{R}\cdot x^{5}\right]^{2}\right)=-\frac{\pi^{2}}{6}x^{2}+O\left(x^{4}\right)$$

שעה 12

נזכור איפה אנחנו. רצינו להראות $\hat{f}\left(t\right)=\mathrm{sinc}^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\approx e^{-\frac{\pi^{2}}{6}t^{2}}$.

למה 2: עבור $\left|t\right|\leq\frac{n^{1/4}}{10}$,

$$\left|\hat{f}\left(t\right)-e^{-\frac{\pi^{2}}{6}t^{2}}\right|\leq\frac{Ct^{4}e^{-\frac{\pi^{2}}{6}t^{2}}}{n}$$

(כלומר, אם $\frac{t^{4}}{n}\ll1$, היחס $\frac{\hat{f}\left(t\right)}{e^{-\frac{\pi^{2}}{6}t^{2}}}\approx1$)

(כהערה צדדית, אם רוצים רק קירוב של $\frac{1}{\sqrt{n}}$, אפשר לקבל טווח של $\sqrt{n}$)

הוכחה:

יודעים שעבור $\left|s\right|\leq\frac{1}{2}$,

$$\log\mathrm{sinc}\left(s\right)=-\frac{\pi^{2}}{6}s^{2}+O\left(s^{4}\right)$$

מכיוון ש- $\frac{1}{10} \leq \frac{t}{n^{1/4}} \leq \frac{t}{\sqrt{n}}$,

$$\begin{aligned}
\log \hat{f}(t) &= n \log \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= n\left[-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + O\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4\right)\right] \\
&= -\frac{\pi^2}{6}t^2 + O\left(\frac{t^4}{n}\right)
\end{aligned}$$

נפעיל אקספוננט: בטווח שלנו, $\frac{t^4}{n} \leq 1$. נשתמש בכך ש-

$$x = O(1) \implies e^x = 1 + O(|x|)$$

ליתר דיוק: לכל $A > 0$ קיים $B > 0$ כך ש-

$$|x| \leq A \implies |e^x - 1| \leq B \cdot |x|$$

לכן עבור $|t| \leq \frac{n^{1/4}}{10}$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t) &= \exp\left[-\frac{\pi^2}{6}t^2 + O\left(\frac{t^4}{n}\right)\right] \\
&= e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2} \cdot e^{O\left(\frac{t^4}{n}\right)} \\
&= e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2} \cdot \left[1 + O\left(\frac{t^4}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

ולכן,

$$\left|\hat{f}(t) - e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right| \leq e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2} \cdot O\left(\frac{t^4}{n}\right)$$

אי-שיוויון:

$$\forall x > 0. \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dx \leq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

הסבר:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \int_x^\infty t e^{-\frac{1}{2}t^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \cdot \left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_x^\infty = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

למה 3:

$$\int_{\frac{n^{1/4}}{10}}^{\infty}\left|\hat{f}\left(t\right)\right|dt=O\left(\frac{1}{n^{10}}\right)\le\frac{C}{n}$$

הוכחה:

נשתמש בשני חסמים על sinc.

ראינו קודם שכאשר $\left|x\right|\le\frac{1}{2}$,

$$\mathrm{sinc}\left(x\right)=1-\frac{\pi^{2}}{6}x^{2}+\tilde{R}x^{4},\qquad\left|\tilde{R}\right|\le1$$

לכן, עבור $\left|x\right|\le\frac{1}{2}$ מתקיים

$$\mathrm{sinc}\left(x\right)\le1-\frac{1}{2}x^{2}+\left(x^{2}-\left(\frac{\pi^{2}}{6}-\frac{1}{2}\right)\right)x^{2}\le1-\frac{1}{2}x^{2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{\pi^{2}}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}<1-\frac{1}{2}x^{2}$$

חסם I: $\left|x\right|\le\frac{1}{2}\implies\mathrm{sinc}\left(x\right)\le1-\frac{x^{2}}{2}$.

חסם II: $\left|\mathrm{sinc}\left(x\right)\right|=\left|\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right|\le\frac{1}{\pi\left|x\right|}$.

הפונקציה זוגית, ולכן מספיק לטפל ב-$\int_{\frac{n^{1/4}}{10}}^{\infty}\left|\hat{f}\left(t\right)\right|dt$.

נחלק את האינטגרל לשני חלקים: $\left[\frac{n^{1/4}}{10},\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$ ו-$\left[\frac{1}{2}\sqrt{n},\infty\right]$.

בחלק הראשון נשתמש בחסם I.

$$\int_{\frac{n^{1/4}}{10}}^{\frac{n^{1/2}}{2}}\left|\mathrm{sinc}^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|dt\le\int_{\frac{n^{1/4}}{10}}^{\frac{n^{1/2}}{2}}\left(1-\frac{t^{2}}{2n}\right)^{n}dt\le\int_{\frac{n^{1/4}}{10}}^{\infty}e^{-\frac{t^{2}}{2}}dt=O\left(e^{-\frac{\sqrt{n}}{100}}\right)\le\frac{C}{n^{10}}$$

כאשר השתמשנו ב-$\left(1-\alpha\right)^{n}\le e^{-\alpha n}$, ששקול ל-$\forall x\in\mathbb{R}.\,1+x\le e^{x}$.

לגבי החלק השני,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{n^{1/2}}{2}}^{\infty}\left|\hat{f}\left(t\right)\right|dt & = & \int_{\frac{n^{1/2}}{2}}^{\infty}\left|\mathrm{sinc}^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|dt\le\int_{\sqrt{n}/2}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi t/\sqrt{n}}\right)^{n}dt\\
\left[s=\frac{t}{\sqrt{n}}\right] & = & \int_{1/2}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi s}\right)^{n}\cdot\sqrt{n}\cdot ds=\frac{\sqrt{n}}{\pi}\cdot\frac{\left(1/2\right)^{n-1}}{n-1}\le\frac{C}{n^{10}}
\end{aligned}$$

הערה: בלמות 1,2 השתמשנו רק בידיעה של 2-3 נגזרות של sinc בראשית, וקיבלנו

$$\hat{f}\left(t\right)\approx e^{-\frac{\pi^{2}}{6}t^{2}}$$

עבור $|t| \le n^{1/4}$.

החלק הזה של ההוכחה עובד גם להתפלגויות לא אחידות.

למה 3 השתמשה בדעיכה של sinc ל-0 באינסוף.

אם מוכיחים את CLT למשתנים כלליים, צריך להתאמץ כאן קצת יותר. מצד שני, זו למה שיש בה יותר חופש, ואולי לכן משפט הגבול המרכזי עובד בעוד הרבה מקרים.

משפט: אם $\hat{f}(t) = \mathrm{sinc}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ אז לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|f(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi/6}} e^{-6x^2}\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$

הוכחה:

מנוסחת ההיפוך של פוריה,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi xt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2} e^{2i\pi xt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{f}(t) - e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right] e^{2i\pi xt} dt$$

למה מותר להפעיל פה את נוסחת ההיפוך? כלומר למה $f, \hat{f} \in L^1$? f היא צפיפות הסתברות, ועבור $n \ge 2$,

$$\left|\hat{f}(t)\right| = \left|\mathrm{sinc}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \le \frac{1}{\pi^2 t^2}$$

וזה דועך מספיק מהר ב-∞ כדי שיהיה אינטגרבילי. עבור $n = 1$, צריך לתת צידוק אחר למה נוסחת ההיפוך עובדת, למשל שהפונקציה ב-L^2. לא נטפל בזה כאן.

נרשום כך:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/6}} e^{-6x^2} + E$$

כאשר

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{f}(t) - e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right] e^{2i\pi xt} dt$$

מטרתנו: $|E| \le \frac{C}{n}$.

יש לנו

$$|E| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(t) - e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right| dt = 2\int_{0}^{\infty} \left|\hat{f}(t) - e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right| dt$$

נחלק את האינטגרל לשני חלקים:

1. בקטע $I_1=\left[0,\frac{n^{1/4}}{10}\right]$,

$$\left|\hat{f}\left(t\right)-e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right|\leq\frac{C}{\sqrt{n}}t^4e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}$$

ולכן

$$\int_{I_1}\left|\hat{f}\left(t\right)-e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right|dt\leq\frac{C}{\sqrt{n}}\int_{I_1}t^4e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}dt\leq???\leq\frac{\tilde{C}}{n}$$

2. בקרן $I_2=\left[\frac{n^{1/4}}{10},\infty\right]$

$$\int_{I_2}\left|\hat{f}\left(t\right)-e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}\right|dt\leq\underbrace{\int_{I_2}\left|\hat{f}\left(t\right)\right|dt}_{lemma\,3:\leq\frac{c}{n^{10}}}+\underbrace{\int_{I_2}e^{-\frac{\pi^2}{6}t^2}dt}_{\leq e^{-\frac{\sqrt{n}}{200}}}\leq\frac{\tilde{C}}{n^{10}}$$

ולכן $|E|\leq\frac{C}{n}$, מש"ל.

האסטרטגיה הזו (לקרב את טרנספורם פוריה בעזרת גאוסיאן בקטע גדול $\left[-n^{1/4},n^{1/4}\right]$ ולהראות שהשאר זניח) מובילה ל-

משפט: (Berry,Esseen)

נניח ש-$X_1,\ldots,X_n$ משתנים ב"ת ושווי התפלגות. נניח ש-$\mathbb{E}X_1=0$, $\mathbb{E}X_1^2=1$, $\mathbb{E}X_1^3\leq R$.

אז

$$\forall t.\quad\left|\mathbb{P}\left(\sum\theta_iX_i\leq t\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\right|\leq CR\sum_{i=1}^{n}\left|\theta_i\right|^3$$

(יש עוד מקרים שבהם אפשר לקבל חזקה רביעית ולא שלישית)

דוגמא שממחישה למה השגיאה היא $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ולא יותר טוב:

אם $P\left(X_1=\pm1\right)=\frac{1}{2}$ אז

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}=0\right)=\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}\approx\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

ולכן, עבור $\theta_1=\ldots=\theta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, באמת השגיאה עלולה להיות $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ב-$t=0$.

עובדה נוספת: נניח של-X_1 יש צפיפות f. נסמן ב-φ את הצפיפות של $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_i$. אזי

$$\left|\frac{\varphi\left(x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}}-1\right|<\alpha_n\,for\,|x|\leq n^{1/6}$$

כאשר $\alpha_n\to0$. כלומר בטווח בגודל $O\left(n^{1/6}\right)$ יש קירוב עד-כדי $e^{-n^{1/3}}$.

2 הספירה במימד גבוה: גבול מרכזי, ריכוז מידה, קבוצות איזופרימטריות (26/2/2014)

שעה 10

בשיעור שעבר דיברנו על הקוביה הרב-ממדית $Q^n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

- ראינו שהמרחק בין שתי נקודות טיפוסיות הוא בערך $\sqrt{n}$.
- ראינו שהנפחים של חתכים $n-1$-ממדיים מתנהגים לפי ההתפלגות הגאוסית (כשהממד גדול).

  זה לא לכל החתכים, אלא רק כאשר כל הקורדינאטות של הנורמל קטנות.

הנושא שלנו להיום יהיה הכדור/הספירה ה-n ממדיים.

נגדיר

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

הנוסחא לנפח של כדור היא

$$\begin{aligned} \kappa_n \quad &:= \quad \mathrm{Vol}_n\left(B^n\right) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \\ & \quad\quad where\,\Gamma\left(n+1\right) = \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = n! \end{aligned}$$

איך מחשבים את זה? עושים אינטגרציה בקורדינאטות פולריות.

באופן כללי, עבור f מדידה,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(|x|\right) dx = n\kappa_n \int_0^\infty r^{n-1} f\left(r\right) dr$$

לנוסחא הזו יש מובן אינטואיטיבי מאוד ברור: (חלוקה של המרחב לסקטורים שהם חרוטים אינסופיים, זה מסביר למה יש r^{n-1} בצד ימין)

כדי להוכיח, מספיק להראות עבוד פונקציות $f\left(t\right) = \mathbf{1}_{\{a<t<b\}}$, כי צירופים לינאריים שלהן צפופים בכל הפונקציות המדידות. עבור פונקציה כזו,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(|x|\right) dx = \mathrm{Vol}_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < |b|\}\right) = \kappa_n\left(b^n - a^n\right) = n\kappa_n \int_a^b r^{n-1} dr$$

כדי לקבל את נפח הכדור צריך להציב פונקציה אחת ולראות מה האינטגרלים. ניקח $f(r)=e^{-\frac{1}{2}r^{2}}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{-\frac{1}{2}|x|^{2}}dx &= \left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}|x|^{2}}dx\right)^{n}=(2\pi)^{n/2}\\ \int_{0}^{\infty}r^{n-1}e^{\frac{1}{2}r^{2}}dr &= \left[s=\frac{1}{2}r^{2}\right]=\int_{0}^{\infty}(2s)^{\frac{n-2}{2}}e^{-s}ds=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\end{aligned}$$

ומקבלים את הנוסחא הנכונה.

עבור פונקציה גמא אפשר לקבל גם הערכה: נוסחת סטירלינג

$$\Gamma(n+1)=n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

מה האסימפטוטיקה?

$$\mathrm{Vol}_{n}(B^{n})=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\left(\frac{\sqrt{2\pi e}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\right)^{n}$$

זה שואף ל-0 יותר מהר מכל אקספוננט. כלומר כדור ב-$\mathbb{R}^{n}$ מכסה שטח זעיר מהקוביה שחוסמת אותו.

בממדים נמוכים אגב, נפח הכדור עולה עם הממד, עד ממד 6 או 7.

בשביל דברים הסתברותיים נרצה כדור עם נפח 1. מה הרדיוס של הכדור עם נפח 1? הרדיוס צריך להיות

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}+O\left(n^{-1/2}\right)}$$

כדי לא להסתבך בחישובים, ננרמל ב-$\sqrt{n}$, כלומר נחקור את $\sqrt{n}B^{n}=\{\sqrt{n}x:x\in B^{n}\}$.

נראה שנפחי החתכים של כדור מתפלגים גאוסי.

יהי X וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^{n}$ שמתפלג אחיד בכדור $X\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{n}B^{n})$.

הקורדינטות שלו $X_{1},\ldots,X_{n}$ הן משתנים מקריים תלויים, בניגוד למקרה של הקוביה. למרות זאת ההוכחה לא יותר מסובכת.

נבחר וקטור כיוון (קבוע) $\theta\in S^{n-1}$ ונביט במ"מ $\langle X,\theta\rangle=\sum_{i=1}^{n}\theta_{i}X_{i}$. נסמן ב-$f_{\theta}$ את פונקצית הצפיפות של $\langle X,\theta\rangle$. כמו בקוביה,

$$f_{\theta}(t)=\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\sqrt{n}B^{n}\cap H_{\theta,t})}{\mathrm{Vol}_{n}(\sqrt{n}B^{n})}$$

כאשר $H_{\theta,t}$ הוא העל-מישור $H_{\theta,t}=\{x\in\mathbb{R}^{n}:\langle x,\theta\rangle=t\}$.

נשים לב ש-$f_\theta(t) = f(t)$ לא תלוי ב-θ, עקב הסימטריה הסיבובית של הבעיה.

נשים לב גם ש-$H_{\theta,t} \cap \sqrt{n}B^n$ הוא כדור, מממד $n-1$. אפשר לחשב את הרדיוס שלו באמצעות משפט פיתגורס ולקבל $\sqrt{n-t^2}$. לכן

$$f(t) = \frac{\kappa_{n-1} \cdot \left(\sqrt{n-t^2}\right)^{n-1}}{\kappa_n \cdot \left(\sqrt{n}\right)^n} = c_n \cdot \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

כאשר

$$c_n = \frac{\kappa_{n-1}}{\sqrt{n}\kappa_n} \underset{\text{stierling}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

זה שואף לגאוסיאן, כיוון ש-

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

תרגיל: הוכיחו $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}t^2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

<u>המסקנה</u>: לכל $\theta \in S^{n-1}$, אם $X \sim \mathrm{Unif}\left(\sqrt{n}B^n\right)$ אז הצפיפות של $\langle\theta, X\rangle$ מקיימת

$$\forall t \qquad \left|f(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le \frac{C}{n}$$

גם בכדור, ולא רק בקוביה, הנפחים של חתכים מקבילים (מממד $n-1$) דועכים גאוסית, וזה למרות שהמשתנים תלויים.

היסטורית, התכונה הזו של הכדור ושל הספירה (שנראה עוד מעט) משויכת למקסוול (Maxwell).

הערה: יתכן שלספירה ולכדור יש קשר ל-CLT (משפט הגבול המרכזי) למרות שיש תלויות. יש איזו הוכחה שמקרבת את המצב הזה עם משתנים בלתי-תלויים או משהו.

תכונה נוספת של הכדור B^n: כמעט כל המאסה שלו מרוכזת ליד השפה שלו S^{n-1}.

למה הכוונה? יהי $X \sim \mathrm{Unif}(B^n)$. כאשר $r \le 1$,

$$\mathrm{Prob}\left[|X| \le r\right] = \frac{\mathrm{Vol}(rB^n)}{\mathrm{Vol}(B^n)} = r^n$$

ניקח r קרוב ל-1, $r = 1 - \frac{1}{n}$, אז

$$\mathrm{Prob}\left[|X| \le 1 - \frac{1}{n}\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \le e^{-1} < \frac{1}{2}$$

כלומר רוב המאסה נמצאת בקליפה בעובי $\frac{1}{n}$.

שעה 11

נדבר על המידה האחידה על הספירה S^{n-1}. האינטואיציה אומרת אחרי התוצאה האחרונה שהיא תהיה מאוד דומה למידה האחידה על הכדור B^n.

את הספירה קצת יותר נוח לחקור, כי כל הנקודות בה שוות מעמד.

נסמן ב-$\sigma = \sigma_{n-1}$ את מידת ההסתברות האחידה על S^{n-1}, כלומר

$$\sigma\left(A\right) = \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(A \cap S^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(S^{n-1}\right)}$$

יש (לפחות) 2 דרכים לעבוד/לחשוב על σ:

1. זו מידת Haar ביחס ל-$O\left(n\right)$, מידת ההסתברות היחידה שאינווריאנטית לסיבובים ולשיקופים. כלומר לכל $U \in GL_n$ אם $UU^t = I$ אז

$$\int_{S^{n-1}} f\left(x\right) d\sigma\left(x\right) = \int_{S^{n-1}} f\left(Ux\right) d\sigma\left(x\right)$$

דוגמא: נניח $X \sim \mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$. אזי $\mathbb{E}X_1^2 = \frac{1}{n}$.

הסבר: מסימטריה, $X_1 \overset{d'}{=} X_2 \overset{d'}{=} \ldots \overset{d'}{=} X_n$, ולכן $\mathbb{E}X_1^2 = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left|X\right|^2 = \frac{1}{n}$.

2. זו מידת שטח פנים ב-$\mathbb{R}^n$. עבור $A \subset S^{n-1}$ שמוכלת בהמיספירה, יש הטלה $P : A \to \mathbb{R}^{n-1}$, ואז A היא הגרף של הפונקציה $f\left(x\right) = \sqrt{1 - \left|x\right|^2}$ על $P\left(A\right)$. הגרדיאנט הוא $\nabla f\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-\left|x\right|^2}}$, ולכן

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\left(A\right) = \int_{P\left(A\right)} \sqrt{1 + \frac{\left|x\right|^2}{1 - \left|x\right|^2}} dx$$

תרגיל:

1. נניח X, Y וקטורים מקריים ב"ת על S^{n-1}, ונניח $Y \sim \mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$. הוכיחו של-$X \cdot Y$ ול-Y_1 יש אותה התפלגות.
2. ארכימדס: נניח $X = \left(X_1, \ldots, X_n\right) \sim \mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$. אזי $\left(X_1, \ldots, X_{n-2}\right) \sim \mathrm{Unif}\left(B^{n-2}\right)$.

רמז - הצפיפות של $\left(X_1, \ldots, X_{n-1}\right)$ פרופורציונית ל-$\frac{1}{\sqrt{1-\left|x\right|^2}}$ (אולי?) על B^{n-1}.

(ההטלה על קורדינטה אחת נותנת התפלגות אחידה, לפחות ב-S^2)

חישוב של הצפיפות של marginal:

מתרגיל 2 נובע שאם $X\sim\mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$ אז הצפיפות של $\sqrt{n}X\cdot\theta$ כאשר $\theta\in S^{n-1}$ קבוע, היא

$$c_n\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-2-1}{2}}=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$

כמקודם, אם f הצפיפות של $\sqrt{n}X\cdot\theta$ אזי ל-$n\geq3$

$$\forall t\qquad\left|f\left(t\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\leq\frac{C}{n-2}\leq\frac{\tilde{C}}{n}$$

נעבור לדבר על סטיות גדולות - Large Deviations.

נחשב מה ההסתברות להיות במרחק $\sqrt{n}$ סטיות תקן, כלומר נחסום את

$$\mathrm{Prob}\left[\sqrt{n}X_1\geq t\right]$$

הצפיפות של $\sqrt{n}X_1$ היא $c_n\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}$, עם $c_n\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

לכן,

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\left[\sqrt{n}X_1\geq t\right] &= c_n\int_t^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{s^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}ds\\ &\leq c_n\int_t^{\sqrt{n}}e^{-\frac{s^2}{2n}(n-3)}ds\\ &= c_n\int_t^{\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}s^2-\frac{3s^2}{2n}}ds\\ &\leq \tilde{C}\int_t^{\infty}e^{-\frac{1}{2}s^2}\leq\frac{\tilde{C}}{t}e^{-\frac{1}{2}t^2}\end{aligned}$$

מסקנה: אם $X\sim\mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$ אז

$$\forall t\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\qquad\mathrm{Prob}\left[X_1\geq t\right]\leq Ce^{-\frac{n}{2}t^2}$$

עבור $0\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתקיים $\mathrm{Prob}\left[X_1\geq1\right]\leq1\leq\tilde{C}e^{-\frac{n}{2}t^2}$, ולכן אותה הערכה נכונה לכל $t\geq0$.

הערת צד על קירובים להתפלגות נורמלית: -

$$\int_t^{\infty}e^{-\frac{1}{2}s^2}=\cfrac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t+\cfrac{1}{t+\cfrac{2}{t+\cfrac{3}{\ddots}}}}$$

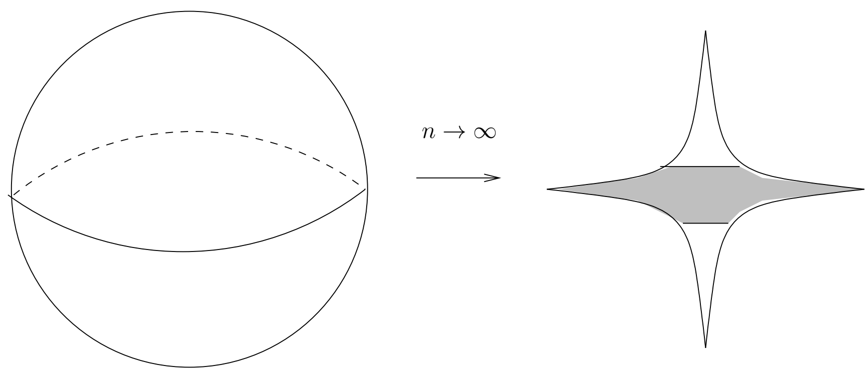
המשמעות הגיאומטרית של מה שעשינו: נראה עבור $t=\frac{1}{10}$. ההסתברות $\mathrm{Prob}\left[X_1\geq t\right]$ היא השטח היחסי של כיפה מתוך הספירה. נראה במבט ראשון שעבור t קטן זה אמור להיות כמעט חצי ספירה, אבל בממד גבוה זה $\mathrm{Prob}\left(X_1\geq\frac{1}{10}\right)\leq Ce^{-\tilde{c}n}$, ויש מעט מאוד מאסה מעל קו רוחב 10^0 ננית.

מסקנה: רוב המאסה של S^{n-1} מרוכזת ליד $\left\{x\in S^{n-1}:x_1=0\right\}$,

$$\sigma\left(x\in S^{n-1}:|x_1|<10\right)\geq1-Ce^{\tilde{c}n}$$

נראה שיש פה פרדוקס: יש המון קוי משווה, וברור שחיתוך של סביבות של הרבה מהם הוא ריק.

זו <u>תופעת ריכוז המידה בממד גבוה</u>, concentration of measure phenomenon.



איור 1: דרך לצייר את הספירה בממדים גבוהים, שמדגישה את ריכוז הנפח אבל מאבדת את הסימטריה הסיבובית

נעבור לעסוק בבעיה האיזופרימטרית על S^{n-1}.

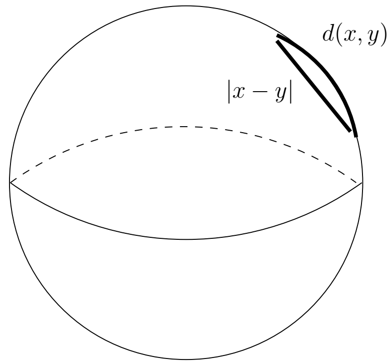
קודם כל צריך להגדיר מטריקה. יש שתי אפשרויות:

1. בהינתן $x,y\in S^{n-1}$, המרחק יהיה המרחק הגאודזי ביניהן על הספירה

$$\cos d\left(x,y\right)=\left\langle x,y\right\rangle$$

2. אפשר לחשוב על המרחק האוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$ בין שתי נקודות $x,y\in S^{n-1}$, זה $|x-y|$.

ברור ש-$|x-y|\leq d\left(x,y\right)\leq\pi\left|x-y\right|$, בחיי היומיום רואים את זה כי מנהרה תהיה יותר קצרה מאשר כביש על פני השטח. כלומר הנורמות שקולות.



איור 2: שתי המטריקות על הספירה

כעת נסמן עבור $A \subset S^{n-1}$ ו-$\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in S^{n-1} : \inf_{y \in A} |x-y| \le \varepsilon \right\}$$

למשל עבור ההמיספירה הדרומית

$$H = \left\{ x \in S^{n-1} : x_1 \le 0 \right\}$$

ההרחבה היא $H_\varepsilon = \left\{ x \in S^{n-1} : x_1 \le \varepsilon \right\}$.

מה היא תופעת ריכוז המידה בניסוח הזה? $\sigma(H) = \frac{1}{2}$ אבל $\sigma(H_\varepsilon) \ge 1 - ce^{-\varepsilon^2 n/2}$.

<u>משפט</u>: (הבעיה האיזופרימטרית ב-S^{n-1}, הוכח ע"י P. Levy בשנות ה-30 או משהו)

לכל $A \subset S^{n-1}$ בורל, ולכל $\varepsilon > 0$, אם $\sigma(A) \ge \frac{1}{2}$ אז $\sigma(A_\varepsilon) \ge \sigma(H_\varepsilon)$.

הוכחה:

מספיק להצטמצם לקבוצות סגורות, שהרי $A_\varepsilon = \left(\overline{A}\right)_\varepsilon$, אבל זה רק מגדיל את A.

טענה 1: נסמן ב-$\text{Closed}\left(S^{n-1}\right)$ את אוסף הקבוצות הסגורות ב-S^{n-1}. אזי לכל $\varepsilon > 0$, לקבוצה

$$\left\{ \sigma(A_\varepsilon) : \begin{array}{c} A \in \text{Closed}\left(S^{n-1}\right) \\ \sigma(A) \ge 1/2 \end{array} \right\}$$

יש מינימום.

הוכחה:

נגדיר את מטריקת Hausdorff על $\text{Closed}\left(S^{n-1}\right)$ לפי

$$d_H(A,B) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \begin{array}{c} A \subset B_\varepsilon \\ B \subset B_\varepsilon \end{array} \right\}$$

קל לראות שזו אכן מטריקה.

רשימת תכונות:

- אם $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ קבוצות סגורות ב-S^{n-1} אז

$$\lim_{\substack{\ell\to\infty \\ d_H}} K_\ell = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} K_\ell$$

הסבר: צריך שלכל $\varepsilon > 0$, החל ממקום מסוים m_0 מתקיים

$$\begin{aligned} m \geq m_0 \quad &\Longrightarrow \quad \bigcap_{\ell=1}^{\infty} K_\ell \subset (K_m)_\varepsilon \qquad \text{- trivial} \\ &\Longrightarrow \quad K_m \subset \left(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} K_\ell\right)_\varepsilon \end{aligned}$$

כדי להוכיח את החלק השני, נביט ב-$\tilde{K}_m = K_m \backslash \mathrm{int}\left(\left(\bigcap K_\ell\right)_\varepsilon\right)$. אלה גופים סגורים וקומפקטיים $\tilde{K}_1 \supset \tilde{K}_2 \supset \ldots$. אם $\bigcap \tilde{K}_m = \emptyset$, מהלמה של קנטור קיים m_0 כך ש-$\tilde{K}_{m_0} = \emptyset$, ואז $K_{m_0} \subset \mathrm{int}\left(\left(\bigcap K\right)_\varepsilon\right)$, ולכל $m \geq m_0$ מתקיים $K_m \subset K_{m_0} \subset \mathrm{int}\left(\left(\bigcap K\right)_\varepsilon\right)$. לא יתכן $\bigcap \tilde{K}_m \neq \emptyset$, כי אם $x_0 \in \bigcap \tilde{K}_m$, אז בפרט $x_0 \in \bigcap K_m$, וזו סתירה.

שעה 12

- מטריקת האוסדורף שלמה: כל סדרת קושי מתכנסת.

תהי $\{K_m\}_{m\geq 1}$ סדרת קושי. ניקח את $K = \bigcap_{N=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m\geq N} K_m}$. זה חיתוך של סדרה יורדת, לכן $K \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\bigcup_{m\geq N} K_m}$. נותר להראות $d\left(K_N, \overline{\bigcup_{\geq N}}\right) \to 0$ כאשר $N \to \infty$, וזה כי K_m סדרת קושי.

- המרחב המטרי $\left(\mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right), d_H\right)$ קומפקטי.

למה? מרחב מטרי שלם הוא קומפקט אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ יש רשת ε סופית, כלומר כמות סופית של כדורים ברדיוס ε מכסים את המרחב, $F \subset \mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$, $|F| < \infty$, $F_\varepsilon = \mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$.

איך נבנה רשת-ε ל-$\mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$? ניקח רשת של S^{n-1}, כלומר $F \subset S^{n-1}$ סופית עם $F_\varepsilon \subset S^{n-1}$. נביט ב-$2^F = \{A : A \subset F\} \subset \mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$. ברור ש-$2^F$ סופית. למה היא רשת ε של $\mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$? אם ניקח $A \in \mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$, אז $B = \{x \in F : \inf_{y\in A} |x-y| < \varepsilon\} \in 2^F$ ו-$d_H(A,B) \leq \varepsilon$.

מההוכחה רואים שאפשר אפילו לשאוף לכל קבוצה עם קבוצות סופיות בלבד.

- הפונקציה הבאה רציפה מלמעלה (upper semi-continuous):

$$\mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right) \ni A \mapsto \sigma(A) \in [0,1]$$

כלומר אם $A_m \to A \implies \limsup \sigma(A_m) \le \sigma(A)$.

הוכחה: נניח $A_m \to A$. יהי $\varepsilon > 0$, אז $A_m \subset A_\varepsilon$ עבור m מספיק גדול. לכן $\limsup \sigma(A_m) \le \sigma(A_\varepsilon)$. הסדרה $A_{1/m}$ היא סדרה יורדת, ומרציפות (בהתכנסות מקודתית של קבוצות) של מידת לבג, $\sigma(A_\varepsilon) \searrow \sigma(A)$.

- נסמן ב-H את ההמיספירה הדרומית $H = \left\{x \in S^{n-1} : x_1 \le 0\right\}$. אז

$$A \mapsto \sigma(A \cap H)$$

גם רציפה מלמעלה.

ההוכחה זהה להוכחה הקודמת. (לא היינו בטוחים; זו בטוח הוכחה נורא דומה)

- לכל $\varepsilon > 0$, $A \mapsto \sigma(A_\varepsilon)$ פונקציה רציפה ב-A.

הוכחה: הרציפות מלמעלה נובעת מזה שההעתקה $A \mapsto A_\varepsilon$ היא העתקה - 1ליפשיץ ב-$\mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$.

למה יש רציפות מלמטה? ניקח $0 < \delta < \varepsilon$, ו-$A \to A_m$. רוצים להראות ש-$\liminf \sigma\left((A_m)_\varepsilon\right) \ge \sigma(A_\varepsilon)$. החל ממקום מסוים, $A \subset (A_m)_\delta$, ולכן $A_{\varepsilon-\delta} \subset (A_m)_\varepsilon$, ומזה נובע ש-$\liminf \sigma\left((A_m)_\varepsilon\right) \ge \sigma(A_{\varepsilon-\delta})$. אם נשאיף את δ ל-0, מרציפות מידת נקבל בצד ימין $\left\{x \in S^{n-1} : d(x,A) < \varepsilon\right\}$. מרגולריות של המידה האחידה על הספירה, זו קבוצה עם אותה מידה כמו A_ε, ולכן $\liminf \sigma\left((A_m)_\varepsilon\right) \ge \sigma(A_\varepsilon)$.

פירוט לגבי העניין עם הרגולריות: אם A קבוצה מדידה ב-S^{n-1}, ואם $\varepsilon > 0$, נסמן $A'_\varepsilon = \left\{x \in S^{n-1} : d(x,A) < \varepsilon\right\}$. נרצה להראות ש-$\sigma(A'_\varepsilon) = \sigma(A_\varepsilon)$. הרגולריות של המידה, משמעה שיש סדרה של כדורים $B(u_k, r_k)$ שמכסה את A'_ε ושסכום המידות שלהם הוא לכל היותר $\sigma(A'_\varepsilon) + \delta$, לכל $\delta > 0$. קל לראות שהכדורים $B\left(u_k, r_k + \delta \cdot 2^{-k}\right)$ מכסים את A_ε, ולכן $\sigma(A_\varepsilon) \le \sigma(A'_\varepsilon) + 2\delta$ לכל $\delta > 0$, מש"ל.

הוכחת טענה 1:

נביט באוסף

$$\mathcal{F} = \left\{A \in \mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right) : \sigma(A) \ge \frac{1}{2}\right\}$$

אז $\mathcal{F}$ היא סגורה, כי $A \mapsto \sigma(A)$ רציפה מלמעלה. הפונקציה $A \mapsto \sigma(A_\varepsilon)$ רציפה והמרחב $\mathrm{Closed}\left(S^{n-1}\right)$ קומפקטי, ולכן המינימום מתקבל.

נקרא לקבוצה סגורה "ממזערת" אם בה מתקבל המינימום, כלומר אם $\sigma(A) \le \frac{1}{2}$ ו-$\sigma(A_\varepsilon) = \min\left\{\sigma(B) : B \in \mathcal{F}\right\}$.

ראינו שיש קבוצות ממזערות, ולמעשה אוסף הקבוצות הממזערות הוא עצמו קומפקט. מטרתנו להראות היא שקבוצה ממזערת היא המיספירה.

טענה 2: יש מקסימום לקבוצה

$$\left\{\sigma(A \cap H) : A\, is\, a\, minimizer\right\}$$

הוכחה:

ראינו שאוסף הקבוצות הממוזערות הוא קומפקט, והפונקציה $A \mapsto \sigma\left(A\cap H\right)$ רציפה מלמעלה. לכן יש מקסימום.

קבוצה ממוזערת תיקרא דרומית אם יש לה חיתוך מקסימלי על H.

מטרתנו: להראות שהקבוצה הממוזערת הדרומית היחידה היא H.

מה שעשינו עד עכשיו מאוד מופשט, ואפשר לעשות פחות או יותר בכל מרחב מטרי. עכשיו צריך רעיון גאומטרי. המחשה לזה אפשר לקבל מזה שיודעים שיש קבוצות ממוזערות ב-$\mathbb{T}^n$ או ב-$\mathbb{R}P^n$, עבור $n\geq 4$, אבל לא יודעים מה הן.

נשתמש בסימטריזציית 2 נקודות: זו פעולה שמקבלת קבוצה $A\subset S^{n-1}$, ונותנת קבוצה "יותר דרומית" $S_\theta\left(A\right)\subset S^{n-1}$ עם אותה מידה, ונראה שקבוצה ממזערת דרומית ביותר היא נקודת שבת של זה, ונראה שזה בהכרח H.

3 המשך הבעיה האיזופרימטרית על S^{n-1} וריכוז מידה (5/3/2014)

שעה 10

בפעם הקודמת דיברנו על תכונות של ספירות במימד גבוה, וראינו שרוב המאסה נמצאת ליד קו המשווה - כל קו משווה.

ליתר דיוק, אם $H=\left\{x\in S^{n-1}:x_1<0\right\}$ ההמיספירה הדרומית, אז $\sigma\left(H\right)=1/2$ (כאשר σ מידת ההסתברות האחידה), והרחבת ε של $A\subset S^{n-1}$ היא

$$A_\varepsilon=\left\{x\in S^{n-1}:\exists y\in A.\ |x-y|<\varepsilon\right\}$$

(כאן המרחק הוא "מרחק מנהרה" ב-$\mathbb{R}^n$, נקבל אותן תוצאות בעצם עם המרחק הגאוד-זי על הספירה)

אז

$$\sigma\left(H_\varepsilon\right)\geq 1-Ce^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 n}$$

כאשר $C>0$ קבוע אוניברסלי.

לגבי $>$ לעומת $\leq$, צריך לשים לב שהחלפנו פה קונבנציה, אבל זה לא משנה כי לכל קבוצת בורל $A\subset S^{n-1}$ ולכל $\varepsilon>0$,

$$\sigma\left(\left\{x\in S^{n-1}:d\left(x,A\right)=\varepsilon\right\}\right)=0$$

(זה מוסבר בדף שמופיע בעמוד הבית של הקורס)

הוכחנו בשבוע שעבר אי-שיוויון איזופרימטרי: אם $A\subset S^{n-1}$ קבוצת בורל ו-$\varepsilon>0$, ואם $\sigma\left(A\right)\geq\sigma\left(H\right)=\frac{1}{2}$, אז $\sigma\left(A_\varepsilon\right)\geq\sigma\left(H_\varepsilon\right)$.

במהלך ההוכחה הפסקנו באמצע הטענה שהמינימום

$$\min\left\{\sigma\left(A_\varepsilon\right):A\subset S^{n-1}\,Borel,\sigma\left(A\right)\geq\frac{1}{2}\right\}$$

מתקבל, כלומר יש קבוצה ממזערת. קל לראות שהיא חייבת להיות סגורה.

הראינו שמרחב הקבוצות הסגורות קומפקטי תחת מטריקת האוסדורף, ולכן מקיום קבוצה ממזערת נובע שיש ממזער דרומי ביותר, כלומר כזה שעבורו $\sigma\left(A\cap H\right)\geq$ $\sigma\left(A'\cap H\right)$ לכל קבוצה סגורה ממזערת אחרת $A'\subset S^{n-1}$.

היום נראה $A=H$, ושזה הפתרון היחיד.

כמו שאמרנו, זה המקום שיש בו את הבניה הגאומטרית, ושאר ההוכחה די גנרית.

נגדיר שיקוף ב-$\mathbb{R}^{n}$ ביחס לעל-מישור:

$$\pi_{\theta}\left(x\right)=x-2\left(x\cdot\theta\right)\theta$$

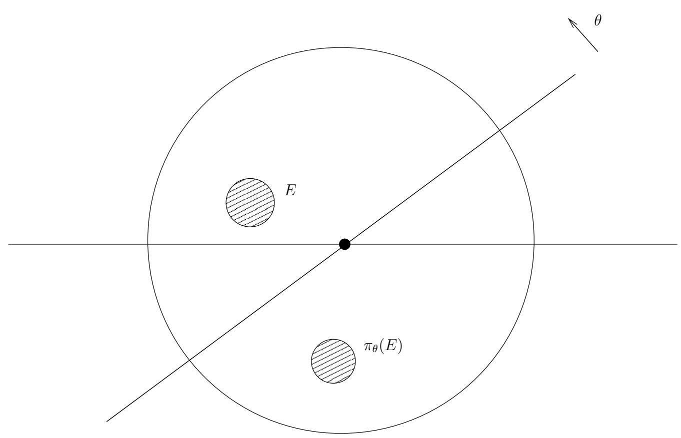
ונשים לב ש-$\pi_{\theta}=\pi_{-\theta}$.

יהי $A\subset S^{n-1}$ ממזערת דרומי ביותר.

טענה: יהי $\theta\in S^{n-1}$ עם $\theta_{1}>0$, ונניח

$$E\subset A\cap\left\{ x\in S^{n-1}:x_{1}>0,x\cdot\theta>0,\pi_{\theta}\left(x\right)\in H\right\}$$

וגם $\sigma\left(E\right)>0$. אז $\pi_{\theta}\left(E\right)\cap A\neq\emptyset$.



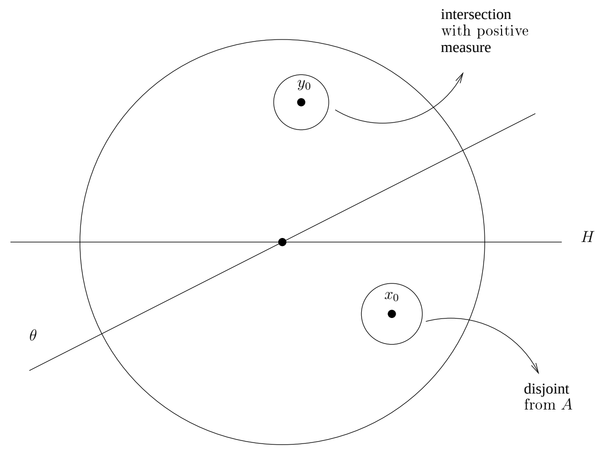
איור 3: מיקום הקבוצה E ביחס ל-A ול-H

ההוכחה ש-$H\subset A$ בהינתן הטענה הזו:

אחרת יש $B\left(x_{0},\varepsilon\right)\subset H$ זר ל-A, כי A סגורה, כאשר $B\left(x_{0},\varepsilon\right)$ הוא הכדור

$$B\left(x_{0},\varepsilon\right)=\left\{ x\in S^{n-1}:\left|x-x_{0}\right|<\varepsilon\right\}$$

כיוון ש-$\sigma\left(A\right)=\frac{1}{2}$, ההפרש גדול $\sigma\left(A\backslash\overline{H}\right)>0$. לכן יש איזשהו $B\left(y_{0},\varepsilon\right)\subset S^{n-1}\backslash\overline{H}$ עם $\sigma\left(A\cap B\left(y_{0},\varepsilon\right)\right)>0$. למה? אפשר לראות את זה עם כיסוי של $S^{n-1}\backslash\overline{H}$ עם כמות בת-מניה של כדורים ברדיוס ε.



איור 4: מיקום שני הכדורים ביחס ל-A

בהכרת $(x_0)_1 < 0$ ו-$(y_0)_1 > 0$, וכך גם לכל הנקודות בתוך הכדורים. נבחר $\theta = (y_0 - x_0)/|y_0 - x_0|$, אז

$$\pi_\theta\left(B\left(y_0, \varepsilon\right)\right) = B\left(x_0, \varepsilon\right)$$

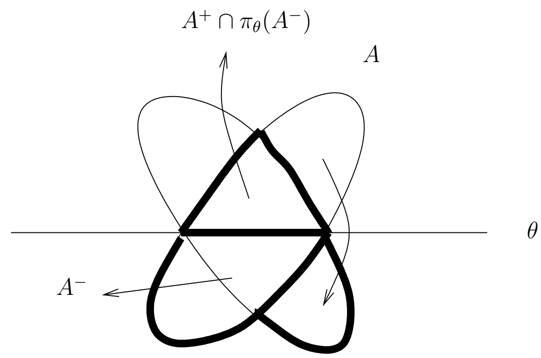
ניקח $E = A \cap B\left(y_0, \varepsilon\right)$, אז $\sigma(E) > 0$ אבל $\pi_\theta(E) \cap A = \emptyset$ בסתירה לטענה.

מזה נובע הא"ש האיזופרימטרי: אם $H \subset A$ אז גם $\overline{H} \subset A$, ולכן $\sigma\left(A_\varepsilon\right) \geq \sigma\left(H_\varepsilon\right)$.

ההוכחה של הטענה מסתמכת על <u>סימטריזציית שתי נקודות</u>. (two-point symmetriza-tion, two-point rearrangement, polarization)

הרעיון הוא לקחת קבוצה $A \subset S^{n-1}$, וליצור ממנה קבוצה $S_\theta(A) \subset S^{n-1}$. נקבע $\theta \in S^{n-1}$, ונגדיר

$$\begin{aligned} (x \in A) \qquad T_A(x) &= \begin{cases} \pi_\theta(x) & \pi_\theta(x) \notin A, x \cdot \theta > 0 \\ x & otherwise \end{cases} \\ S_\theta(A) &= \left\{T_A x : x \in A\right\} \end{aligned}$$



איור 5: תוצאת הפעולה

נחלק את A לחתיכות:

$$
\begin{aligned}
A^+ &= \{x \in A : x \cdot \theta > 0\} \\
A^- &= \{x \in A : x \cdot \theta \le 0\} \\
A &= A^- \uplus \left(A^+ \cap \pi_\theta\left(A^-\right)\right) \uplus \left(A^+ \backslash \pi_\theta\left(A^-\right)\right) \\
S_\theta\left(A\right) &= A^- \uplus \left(A^+ \cap \pi_\theta\left(A^-\right)\right) \uplus \pi_\theta\left(A^+ \backslash \pi_\theta\left(A^-\right)\right)
\end{aligned}
$$

אז זו לא ממש סימטריזציה, אבל נראה ש-$S_\theta A$ יותר "למטה" מאשר A.

דוגמא: $A = B\left(x_0, \varepsilon\right)$. (תרגיל טוב כדי להבין מה קורה פה גאומטרית)

- אם $x_0 \cdot \theta < 0$ אז $S_\theta\left(B\left(x_0, \varepsilon\right)\right) = B\left(x_0, \varepsilon\right)$.
- אם $x_0 \cdot \theta \ge 0$ אז $S_\theta\left(B\left(x_0, \varepsilon\right)\right) = B\left(\pi_\theta\left(x_0\right), \varepsilon\right)$.

תכונות:

- ההעתקה T_A משמרת מידה: לכל קבוצת בורל $F \subset A$,

$$\sigma\left(F\right) = \sigma\left(T_A\left(F\right)\right)$$

- בפרט, $\sigma\left(S_\theta A\right) = \sigma\left(A\right)$.
- מונוטוניות: אם $A \subset \tilde{A}$ אז $S_\theta A \subset S_\theta \tilde{A}$.
- אם $\theta_1 > 0$ אז $T_A\left(H\right) \subset H$. (ליתר דיוק, T_A מוגדרת רק בתוך A, אז $T_A\left(H \cap A\right) \subset H \cap A$)

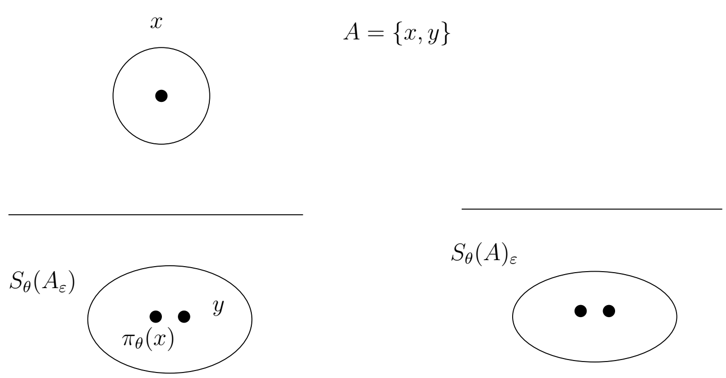
- החלפת סדר של הרחבת קבוצות:

$$[S_\theta(A)]_\varepsilon \subset S_\theta(A_\varepsilon)$$

הוכחה: ניקח $x \in S_\theta(A)$. צריך להראות ש-$B(x,\varepsilon) \subset S_\theta(A_\varepsilon)$.
נפריד למקרים:

1. נניח $x \in A$ וגם $\pi_\theta(x) \in A$. אז $B(x,\varepsilon) \subset A_\varepsilon$ וגם $B(\pi_\theta x,\varepsilon) \subset A_\varepsilon$. לכן $B(x,\varepsilon)$ נשמר בסימטריזציה, וההכלה עובדת.
2. נניח $x \in A$ אבל $\pi_\theta x \notin A$. כיוון ש-$x \in S_\theta(A)$, אפשר לדעת ש-$x \cdot \theta < 0$. מכך ש-$B(x,\varepsilon) \subset A_\varepsilon$ ו-$x \cdot \theta < 0$ נובע $S_\theta(A_\varepsilon) \supset S_\theta(B(x,\varepsilon)) = B(x,\varepsilon)$.
3. נניח $x \notin A$, אז מ-$x \in S_\theta A$ נובע $\pi_\theta x \in A$ ו-$x \cdot \theta < 0$. כמו במקרה הקודם, $S_\theta(A_\varepsilon) \supset S_\theta(B(\pi_\theta x,\varepsilon)) = B(x,\varepsilon)$.

שעה 11



איור 6: דוגמא של מקרה בו יש הכלה ממש

- נניח $\theta_1 > 0$. תהי E כמו בטענה, כלומר

$$E \subset A \cap \left\{x \in S^{n-1} : x_1 > 0, x \cdot \theta > 0, \pi_\theta(x) \in H\right\}$$

אז $\sigma(S_\theta A \cap H) \geq \sigma(A \cap H) + \sigma(E)$.

הוכחה: נראה ש-$S_\theta(A)$ מכילה את $T_A(A \cap H) \uplus S_\theta(E \backslash \pi_\theta(A))$. למה? החלק הראשון הוא מהכלה פשוטה $A \cap H \subset A$ שממנה נובע $T_A(A \cap H) \subset T_A(A) = S_\theta A$.

לגבי ההכלה השניה, נסמן $\tilde{E} = E \backslash \pi_\theta(A)$, אז $\pi_\theta\left(\tilde{E}\right) \subset S_\theta(A)$.

למה האיחוד $T_A(A \cap H) \cup S_\theta\left(\tilde{E}\right)$ זר? כי גם $\tilde{E}$ וגם $\pi_\theta\left(\tilde{E}\right)$ זרים ל-$A \cap H$ וגם ל-$\pi(A \cap H)$.

מההכלה הזו נובע

$$
\begin{aligned}
\sigma(S_\theta A) &\ge \sigma(T_A(A\cap H)) + \sigma(E\backslash \pi_\theta(A)) \\
&= \sigma(A\cap H) + \sigma(E\backslash \pi_\theta(A))
\end{aligned}
$$

הוכחת הטענה:

אם A קבוצה ממזערת דרומית ביותר, אז $\sigma(S_\theta A) = \sigma(A) \ge \frac{1}{2}$, אבל $\sigma((S_\theta A)_\varepsilon) \le \sigma(S_\theta(A_\varepsilon)) = \sigma(A_\varepsilon)$, ולכן $S_\theta A$ גם כן קבוצה ממזערת.

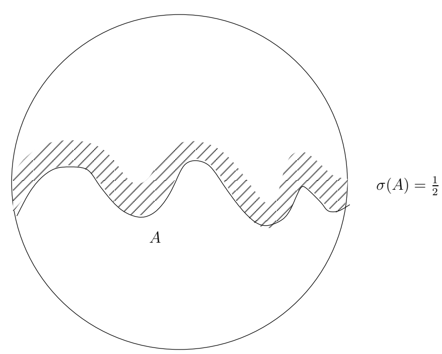
כיוון ש-$\sigma(S_\theta A\cap H) \ge \sigma(A\cap H)$, היא גם דרומית ביותר, ולכן $\sigma(E\backslash \pi_\theta A) = 0$, ומשיקוף π_θ מקבלים $\sigma(\pi_\theta E\backslash A)$, וכיוון ש-$\sigma(\pi_\theta E) = \sigma(E) > 0$, החיתוך $\pi_\sigma E\cap A$ לא ריק.

זה מסיים את הוכחת המשפט האיזופרימטרי.

התכונה הגאומטרית שבה בעצם השתמשנו פה היא שיש הרבה אינבולוציות עם קשרים הדוקים ביניהן.

מסקנה: תהי $A\subset S^{n-1}$ קבוצת בורל, ונניח $\sigma(A) \ge \frac{1}{2}$, אז מקבלים $\sigma(A_\varepsilon) \ge \sigma(H_\varepsilon) = 1 - Ce^{-\varepsilon^2 n/2}$.

זו תוצאה חזקה מאוד של ריכוז מידה: לא רק שהמאסה מרוכזת סביב מעגלים גדולים, היא מרוכזת סביב שפה של כל קבוצה ממידה $\frac{1}{2}$.



איור 7: דוגמא לקבוצה עם שפה יותר פתלתלה

נראה כמה ישומים של העובדה הזו. (במובן מסוים, רוב הקורס יהיה ישומים של העובדה הזו)

פונקציות ליפשיץ על S^{n-1}

סימון: $\{f\ge t\} := \left\{x\in S^{n-1} : f(x)\ge t\right\}$.

משפט (Levy 1950's, Schmidt):

תהי $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ פונקציה 1-ליפשיץ, כלומר $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$. החציון M של f הוא המספר שמקיים $\sigma(\{f\ge M\})\ge\frac{1}{2}$ ו-$\sigma(\{f\le M\})\ge\frac{1}{2}$.

אז לכל $t>0$, מתקיים $\sigma(\{|f-M|\ge t\})\le C^{-t^2n/2}$.

הוכחה:

ניקח $A=\{f\le M\}$, אז $\sigma(A_t)\ge 1-Ce^{-t^2n/2}$. אך עבור $x\in A_t$, מתכונת ליפשיץ נובע $f(x)\le M+t$.

בדומה נגדיר $B=\{f\ge M\}$, אז $\sigma(B_t)\ge 1-Ce^{-t^2n/2}$, ועבור $x\in B_t$ מקבלים $f(x)\ge M-t$.

לכן $\sigma(A_t\cap B_t)\ge 1-2Ce^{-t^2n/2}$ ו-$\{|f-M|\ge t\}\subset(A_t\cap B_t)^c$, ולכן

$$\sigma(\{|f-M|\ge t\})\le 2Ce^{-t^2n/2}$$

המשפט הזה אומר שפונקציה ליפשיץ על S^{n-1} היא "אפקטיבית קבועה". כלומר לפונקציה ספציפית כמו $f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{10}\left(x_1^4+x_2^2x_7\right)$, אם מחשבים את הערך שלה בנקודות אקראיות על הספירה לא מקבלים ערכים בכל הטווח אלא רק נורא קרובים לחציון.

דבר אחד שמפריע: החציון הוא פרמטר שקשה לחשב. היה יותר נוח אם המשפט היה מדבר על אומדים אחרים.

מסקנה: תהי $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ פונקציה L-ליפשיץ, ונסמן $E=\int_{S^{n-1}}fd\sigma$. אז

$$\forall t>0,\qquad \sigma(\{|f-E|>t\})\le Ce^{-\frac{ct^2n}{L^2}}$$

כאשר $C,c>0$ קבועים אוניברסליים. (הם אפילו לא נוראיים, הם $\frac{1}{2}$ ו-2 או משהו)

הוכחה:

נניח $L=1$. נראה ש-$|E-M|\le\frac{\tilde{C}}{\sqrt{n}}$:

$$|E-M|=\left|\int_{S^{n-1}}(f-M)\,d\sigma\right|\le\int_{S^{n-1}}|f-M|\,d\sigma=\int_0^\infty\sigma(\{|f-M|\ge t\})\,dt$$

ממשפט לבג. האינטגרל האחרון חסום

$$\int_0^\infty\sigma(\{|f-M|\ge t\})\,dt\le\int_0^\infty Ce^{-nt^2/2}dt=\frac{C}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{\tilde{C}}{\sqrt{n}}$$

נוכיח כעת את החסם על $\sigma(\{|f-E|>t\})$.

- אם $t\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ אז בחירה של $C\ge e$ ו-$c\le 1$ תגרום לחסם Ce^{-ct^2n} להיות נכון באופן טריויאלי.

- אם $t \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, מהקירוב $|E-M| \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{n}}$ נקבל

$$\{|f-E| \geq t\} \subset \left\{|f-M| \geq \left(\tilde{C}+1\right) t\right\}$$

ומשימוש במשפט הקודם נקבל

$$\sigma\left(\{|f-E| \geq t\}\right) \leq \sigma\left(\{|f-M|\} \geq \hat{C}t\right) \leq \overline{C}e^{-\tilde{c}t^2 n}$$

שעה 12

היישום הבא שניתן לריכוז מידה יהיה למשפט הגבול המרכזי (CLT) ולבעיית thin shell.

נתחיל בתזכורות.

יהי $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ וקטור מקרי, עם $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$. מטריצת השונות המשותפת (covariance) של X היא מטריצה בגודל $n \times n$ עם איברים

$$\mathrm{Cov}\left(X\right)_{i,j} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j$$

כדי להבין את המשמעות של המטריצה הזו, ניקח $v \in \mathbb{R}^n$ כלשהו (דטרמיניסטי), אז עבורו

$$\mathrm{Var}\left(X \cdot v\right) = \mathrm{Cov}\left(X\right) v \cdot v$$

ובפרט $\mathrm{Cov}\left(X\right)$ מטריצה סימטרית ואי-שלילית. (positive semi-definite)

איך מגיעים לשיוויון הזה?

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum v_i X_i\right) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_i v_i X_i, \sum_j v_j X_j\right) \\
&= \sum_{i,j} v_i v_j \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \left\langle \mathrm{Cov}\left(X\right) v, v\right\rangle
\end{aligned}$$

הגדרה: נגיד שהוקטור המקרי X הוא מנורמל או איזוטרופי אם $\mathbb{E}X = 0$ ו-$\mathrm{Cov}\left(X\right) = \mathrm{Id}$.

[יש כל מיני אינטואיציות לקווריאנס, מהטלות על מימד אחד ומפיזיקה, לא הכללתי אותן פה כי הן לא הבהירו לי יותר את המושג]

תרגיל: להוכיח שלכל וקטור מקרי X עם $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$ שאינו נתמך בעל-מישור קיים וקטור b ומטריצה מוגדרת חיובית T כך ש-$T\left(X\right) + b$ איזוטרופי. (רמז: $\mathrm{Cov}\left(TX\right) = T\mathrm{Cov}\left(X\right)T^t$)

כאשר X איזוטרופי, לכל $\theta \in S^{n-1}$ מתקיים $\mathbb{E}X \cdot \theta = 0$ ו-$\mathrm{Var}\left(X \cdot \theta\right) = 1$. ההטלות האלה נקראות marginal distribution. זה נראה כמו נרמול טוב בשביל משפט גבול מרכזי.

דוגמאות לוקטורים איזוטרופיים:

- התפלגות אחידה בקוביה $X \sim \mathrm{Unif}\left(\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]^n\right)$: ראינו בשיעור הראשון.
- התפלגות אחידה על הספירה $X \sim \mathrm{Unif}\left(\sqrt{n}S^{n-1}\right)$. ברור שהתוחלת ב-0. השונות היא

$$\mathbb{E}X_1^2 = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(X_1^2 + \ldots + X_n^2\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{n}\right)^2 = 1$$

ומסימטריה סיבובית זה כך לכל כיוון בספירה, ולכן $\mathrm{Cov}\left(X\right) = \mathrm{Id}$.

- נאמר שמידת הסתברות μ היא איזוטרופית אם הוקטור המקרי שהיא מגדירה את ההתפלגות שלו הוא איזוטרופי.

נניח ש-μ אינווריאנטית להחלפת סדר הקורדינאטות ולהחלפת סימני הקור-דינאטות, וננרמל כך ש-$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \, d\mu\left(x\right) = n$. אז μ היא איזוטרופית. (תרגיל)

דוגמא למידה כל כך סימטרית מתקבלת מהמידה האחידה על

$$B\left(\ell_p^n\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1\right\}$$

(בנרמול מתאים)

- אם $G \subset O\left(n\right)$ גדולה מספיק כדי לקיים

$$\forall \mathcal{E} \text{ ellipsoid}. \left(\forall g \in G.\, g\mathcal{E} = \mathcal{E}\right) \implies \mathcal{E} \text{ is a ball}$$

אז כל מידה G-אינווריאנטית עם $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \, d\mu\left(x\right) = n$ היא איזוטרופית.

- מתי המידה האחידה על אליפסואיד היא איזוטרופית? רק כאשר הוא כדור אוקלידי.
- וקטור של משתני ברנולי $\mathrm{Prob}\left[X_i = \pm 1\right] = \frac{1}{2}$ בלתי-תלויים הוא איזוטרופי.
- וקטור עם התפלגות $\mathrm{Prob}\left[X = \pm e_i \sqrt{n}\right] = \frac{1}{2n}$ הוא איזוטרופי.

משפט ה-thin shell (Sudakov '76, Diaconis-Freedman '84):

יהי X וקטור מקרי איזוטרופי ב-$\mathbb{R}^n$. יהי $\varepsilon > 0$, ונניח

$$\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1\right)^2 \leq \varepsilon^2$$

אז קיימת קבוצת בורל $\mathcal{F} \subset S^{n-1}$ ממידה גדולה $\sigma(\mathcal{F}) \ge 1 - Ce^{-c\sqrt{n}}$ כך שלכל $\theta \in \mathcal{F}$, ה-marginal המתאים מאוד קרוב להיות גאוסיאן, כלומר

$$\forall t \qquad \left|\mathrm{Prob}\left[X \cdot \theta \le t\right] - \Phi(t)\right| \le \tilde{C}\left[\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{n^{1/8}}\right]$$

כאשר

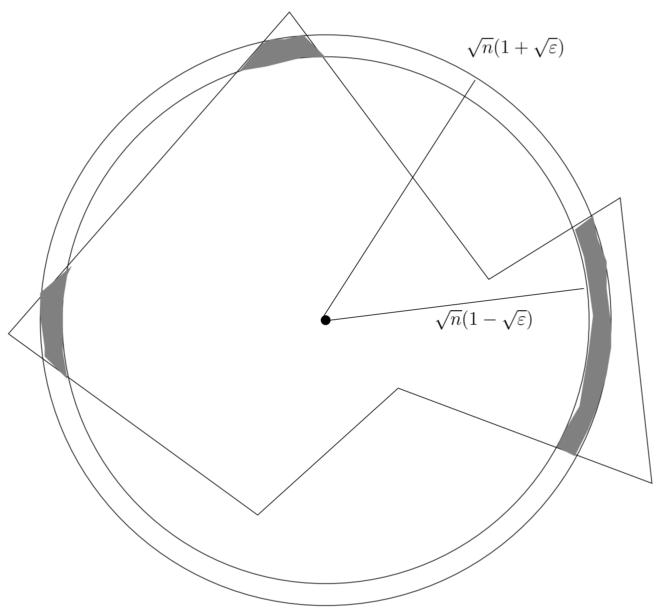
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

ו-$c, C, \tilde{C}$ קבועים אוניברסליים.

כאשר המימד עולה, ההתפלגות מאוד מתקרבת להיות גאוסית כמעט בכל הכיוונים.

מה המשמעות של ההנחה $\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1\right)^2 \le \varepsilon^2$? מאי-שיוויון צ'בישב נקבל

$$\mathrm{Prob}\left[1 - \sqrt{\varepsilon} \le \frac{|X|}{\sqrt{n}} \le 1 - \sqrt{\varepsilon}\right] \ge 1 - \varepsilon$$



איור 8: הקליפה הדקה בה מרוכזת רוב ההסתברות, במקרה של התפלגות אחידה בתוך קבוצה

תרגיל: אם X איזוטרופי ו-$\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{R} - 1\right)^2 \le \varepsilon^2$ אז $\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1\right)^2 \le C\varepsilon^2$.

מה הקשר למשפט הגבול המרכזי?

יהיו $X_1,\dots,X_n$ משתנים מקריים ב"ת זהי התפלגות, $\mathbb{E}X_i=0,\operatorname{Var}(X_i)=1,\mathbb{E}X_i^4\le$ 50, אז X מקיים thin shell עם $\varepsilon\le\frac{10}{\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}}-1\right)^2 &\le \mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}}-1\right)^2\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}}+1\right)^2\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{|X|^2}{n}-1\right)^2=\operatorname{Var}\left(\frac{|X|^2}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}\sum\operatorname{Var}\left(X_i^2\right)=\frac{1}{n}\operatorname{Var}\left(X_i^2\right)\le\frac{49}{n}\end{aligned}$$

משפט הגבול המרכזי אומר שבכיוון מאוד מסוים $\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ה-marginal שואף להיות גאוסי, משפט ה-thin shell נותן על קבוצה רחבה מאוד של כיוונים אבל לא דווקא בזה.

הערה: בלי הנחת ה-thin shell, הרבה כיוונים לא קרובים להיות גאוסיים.

4 משפט הקליפה הדקה (12/3/2014)

תזכורות מהשיעור הקודם:

- ריכוז מידה ב-S^{n-1}:
  אם $A\subset S^{n-1}$ ו-$\sigma(A)=\frac{1}{2}$ אז $\sigma(A_\varepsilon)\ge 1-Ce^{-\varepsilon^2 n/2}$.
- ריכוז של פונקציות ליפשיץ:
  אם $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ פונקציה L-ליפשיץ, אז

$$\forall t>0,\qquad \sigma\left(\{x:|f(x)-E|>t\}\right)\le Ce^{-ct^2n/L^2}$$

כאשר $E=\int_{S^{n-1}}fd\sigma$.

- יישום: משפט הקליפה הדקה (thin shell theorem).
  יהי X וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^n$, ויהי $\varepsilon>0$. נניח ש-X איזוטרופי (או מנורמל), ומקיים את תנאי הקליפה הדקה

$$\mathbb{E}\left|\frac{|X|}{\sqrt{n}}-1\right|^2\le\varepsilon^2$$

אז קיימת $\mathcal{F}\subset S^{n-1}$ עם $\sigma(\mathcal{F})\ge 1-Ce^{-c\sqrt{n}}$ ו-

$$\forall\theta\in\mathcal{F},t\in\mathbb{R}\qquad \left|\operatorname{Prob}\left[X\cdot\theta\le t\right]-\Phi(t)\right|\le C\left[\frac{1}{n^{1/8}}+\sqrt{\varepsilon}\right]$$

כאשר

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{2}s^{2}}ds$$

- תזכורת:
המשמעות של איזוטרופיות פה היא לא אינווריאנטיות לסימטריה סיבובית.
לפרטים אפשר לקרוא את ההגדרה מסיכום השיעור הקודם.
- [דוגמאות למידות איזוטרופיות: התפלגות דיסקרטית אחידה על $\{\pm e_i\}_{i=1}^{n}$, המידה האחידה על הספירה $\sqrt{n}S^{n-1}$]

הוכחת משפט הקליפה הדקה:

אם $Y\sim\mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$, אז הצפיפות של $\sqrt{n}Y_1$ היא

$$\varphi_n(t)=c_n\left(1-\frac{t^2}{n}\right)_{+}^{\frac{n-3}{2}}$$

עם $c_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+O\left(\frac{1}{n}\right)$. קירוב טיילור שלא קשה לראות נותן

$$\forall t\qquad\left|\varphi_n(t)-\varphi(t)\right|\le\frac{C}{n}$$

כאשר $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

תרגיל: נסמן $\Phi_n(t)=\mathrm{Prob}\left[\sqrt{n}Y_1\le t\right]=\int_{-\infty}^{t}\varphi_n$, הוכח ש-$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_n-\Phi|\le\frac{C}{n}$.
רמז: לחלק את תחום האינטגרציה, עבור $|t|\ge n^{1/4}$ החלק של $\int 1-\Phi$ זניח, ועבור $|t|\le n^{1/4}$ מתקיים $|\varphi_n(t)-\varphi(t)|\le C\frac{t^4}{n}\varphi(t)$. (אולי צריך גם לחלק בנקודה $n^{1/2}$)

מרחק וסרשטיין: (Monge, Kantorovich, Wasserstein, von Neumann)

יהיו μ,ν מידות הסתברות על $\mathbb{R}$ (או על כל מרחב מטרי). נגדיר

$$d_w(\mu,\nu)=W_1(\mu,\nu)=\sup_{F\text{ 1-Lip.}}\left[\int_{\mathbb{R}}Ff\mu-\int_{\mathbb{R}}Fg\nu\right]$$

באנגלית: the L^1-Wasserstein distance. זו מטריזציה של טופולוגיית w^* על מרחב מידות ההסתברות. (התכנסות היא התכנסות חלשה)

(יש הגדרה שקולה עם transportation of measure)

למה: יהיו μ_1,μ_2 מידות הסתברות על $\mathbb{R}$, נסמן את פונקציות ההתפלגות המצטברות

$$\Psi_i(t)=\mu_i\left((-\infty,t]\right)$$

נניח:

1. ל-μ_1, μ_2 יש צפיפויות ρ_1, ρ_2.

2. יש התכנסות $\lim_{t\to\infty} |t| \cdot |\Psi_1(t) - \Psi_2(t)| = 0$.

3. ל-μ_1, μ_2 יש מומנטים ראשונים סופיים $\int |x|\, d\mu_i(x) < \infty$. (התנאי הזה דרוש כדי שהמרחק יהיה מוגדר באופן ברור)

אז $d_w(\mu_1, \mu_2) \le \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1 - \Psi_2|$.

(אין קבוע אוניברסלי אז זו לא יכולה להיות למה קשה)

הוכחה:

נזכור מהקורס באנליזה ממשית שאם F, G פונקציות ליפשיץ (או אפילו absolutely continuous), יש אינטגרציה בחלקים (בנגזרות מוכללות)

$$\int_a^b F'G = FG|_a^b - \int_a^b FG'$$

נבחר פונקציה 1-ליפשיץ F כלשהי. המטרה: להראות

$$\int_{\mathbb{R}} F d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}} F d\mu_2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1 - \Psi_2|$$

מאינטגרציה בחלקים נקבל

$$\begin{aligned}\int F d\mu_1 - \int F d\mu_2 &= \int F(\rho_1 - \rho_2) = \int F(\Psi_1 - \Psi_2)' \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} F(\Psi_1 - \Psi_2)' \\ &= \lim_{T\to\infty} F(\Psi_1 - \Psi_2)|_{-T}^{T} - \int_{-T}^{T} F'(\Psi_1 - \Psi_2)\end{aligned}$$

מההנחה השניה נקבל

$$F(t) \cdot (\Psi_1(t) - \Psi_2(t)) \le (F(0) + |t|) \cdot (\Psi_1(t) - \Psi_2(t)) \to 0$$

וזה מחסל את הגורם הראשון.

עבור הגורם השני,

$$\int_{-T}^{T} F'(\Psi_1 - \Psi_2) \le \left| \int_{-T}^{T} F'(\Psi_1 - \Psi_2) \right| \le \int_{-T}^{T} |\Psi_1 - \Psi_2| = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1 - \Psi_2|$$

מסקנה: אם $Z \sim N(0,1)$ ו-$Y \sim \mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$ אז לכל פונקציה 1-ליפשיץ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\left| \mathbb{E} f(Z) - \mathbb{E} f\left(\sqrt{n} Y_1\right) \right| \le \frac{C}{n}$$

הלמה העיקרית:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה L-ליפשיץ. אז $\exists\mathcal{F}\subset S^{n-1}$ ממידה $\sigma(\mathcal{F})\geq 1-Ce^{-c\sqrt{n}}$, שעבור כל $\theta\in\mathcal{F}$ מתקיים

$$\left|\mathbb{E}f\left(X\cdot\theta\right)-\mathbb{E}f\left(Z\right)\right|\leq CL\left(\frac{1}{n^{1/4}}+\varepsilon\right)$$

כאשר $C,c>0$ קבועים אוניברסליים, ו-$Z\sim N\left(0,1\right)$. (ה-ε פה הוא אותו אחד כמו החסם של ה-thin shell)

הערה: פה סדר הכמתים הפוך מהתוצאה שרוצים במשפט. פה זה $\forall f\exists\mathcal{F}$, והתוצאה החזקה יותר תהיה $\exists\mathcal{F}\forall f$.

הוכחה:

נסמן $g\left(\theta\right)=\mathbb{E}f\left(X\cdot\theta\right)$ עבור $\theta\in S^{n-1}$. אם נדמיין את f כפונקציה אופיינית של חצי ישר, אז g מודדת כמה מהמאסה יש בכל חצי מרחב. אנחנו רוצים להראות:

1. הפונקציה g פחות-או-יותר קבועה. (essentially constant)
2. הקבוע הזה הוא בערך $\mathbb{E}f\left(Z\right)$.

פונקציות ליפשיץ ב-S^{n-1} הן כמעט קבועות, נבדוק ש-g כזו. יהיו $\theta_1,\theta_2\in S^{n-1}$. נחשב:

$$\begin{aligned}
\left|g\left(\theta_1\right)-g\left(\theta_2\right)\right| &= \left|\mathbb{E}f\left(X\cdot\theta_1\right)-\mathbb{E}f\left(X\cdot\theta_2\right)\right|\\
&\leq \mathbb{E}\left|f\left(X\cdot\theta_1\right)-f\left(X\cdot\theta_2\right)\right|\\
(f\ L\text{-Lip.})\quad &\leq L\cdot\mathbb{E}\left|X\cdot\theta_1-X\cdot\theta_2\right|=L\cdot\mathbb{E}\left|X\cdot\left(\theta_1-\theta_2\right)\right|\\
(\text{C-S})\quad &\leq L\sqrt{\mathbb{E}\left(X\cdot\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)^2}\\
(\text{isotropicity})\quad &= L\left|\theta_1-\theta_2\right|
\end{aligned}$$

כלומר גם g היא L-ליפשיץ.

זה אומר ש-g פחות-או-יותר קבועה, נחשב את התוחלת שלה. לשם מה? המשפט על ריכוז של פונקציות ליפשיץ אומר

$$\forall t\qquad \sigma\left(\left\{\theta\in S^{n-1}:\left|g\left(\theta\right)-E\right|\geq t\right\}\right)\leq Ce^{-cnt^2/L^2}$$

אם ניקח $t=\frac{L}{n^{1/4}}$, נקבל שהקבוצה $\mathcal{F}=\left\{\theta\in S^{n-1}:\left|g\left(\theta\right)-E\right|\leq\frac{L}{n^{1/4}}\right\}$ היא גדולה מאוד $\sigma\left(\mathcal{F}\right)\geq 1-Ce^{-c\sqrt{n}}$, ולכל $\theta\in\mathcal{F}$

$$\left|\mathbb{E}f\left(X\cdot\theta\right)-E\right|\leq c\frac{L}{n^{1/4}}$$

[בועז העדיף לשים פה קבוע, מסיבות אסתטיות או משהו]

נותר להראות ש-$\left|E-\mathbb{E}f\left(Z\right)\right|\leq CL\left(\frac{1}{n^{1/4}}+\varepsilon\right)$.

נעבור לסימון הסתברותי:

$$E=\int_{S^{n-1}}g\left(\theta\right)d\sigma\left(\theta\right)=\int_{S^{n-1}}\mathbb{E}\left(X\cdot\theta\right)d\sigma\left(\theta\right)=\mathbb{E}f\left(X\cdot Y\right)$$

כאשר $Y\sim\mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$ ב"ת ב-X.

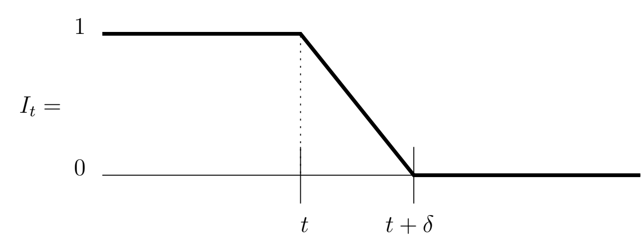
הערה מעניינת: העובדה שכל ה-marginals דומים לגאוסיאן נובעת מתנאי ה-thin shell. אבל אם התנאי הזה לא מתקיים, עדיין נקבל שכל ה-marginals דומים זה לזה. בהמשך הקורס נדבר על איך ההתפלגויות האלה נראות, זה סכום של גאוסיאנים או משהו.

להמשך החישוב נשתמש בתרגיל משיעורי הבית: אם $Y\sim\mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$ אז ל-$X\cdot Y$ ול-$\left|X\right|Y_{1}$ יש אותה התפלגות. מזה נובע $E=\mathbb{E}f\left(\left|X\right|Y_{1}\right)$. לכן

$$\begin{aligned}
\left|E-\mathbb{E}f\left(Z\right)\right| & = \left|\mathbb{E}f\left(\left|X\right|Y_{1}\right)-\mathbb{E}f\left(Z\right)\right|\\
 & \leq \left|\mathbb{E}f\left(\left|X\right|Y_{1}\right)-f\left(\sqrt{n}Y_{1}\right)\right|+\underbrace{\left|f\left(\sqrt{n}Y_{1}\right)-\mathbb{E}f\left(Z\right)\right|}_{\leq L\cdot d_{w}\left(\sqrt{n}Y_{1},Z\right)}\\
 & \leq L\mathbb{E}\left|\left|X\right|Y_{1}-\sqrt{n}Y_{1}\right|+\frac{CL}{n}\\
 & = \frac{CL}{n}+L\mathbb{E}\left|\left(\frac{\left|X\right|}{\sqrt{n}}-1\right)\sqrt{n}Y_{1}\right|\\
\text{(C-S)} & \leq \frac{CL}{n}+L\sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{\left|X\right|}{\sqrt{n}}-1\right)^{2}\cdot\mathbb{E}\left(\sqrt{n}Y_{1}\right)^{2}}\\
 & \leq \frac{CL}{n}+L\cdot\varepsilon=CL\left(\frac{1}{n}+\varepsilon\right)\leq CL\left(\frac{1}{n^{1/4}}+\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

זה מוכיח את הלמה. נעבור להוכחת המשפט העיקרי.

נקבע $\delta=\max\left\{ \frac{1}{n^{1/8}},\sqrt{\varepsilon}\right\}$, ונגדיר עבור $t\in\mathbb{R}$,



$$I_{t}=\begin{cases}
1 & x\geq t\\
1-\frac{1}{\delta}\left(x-t\right) & t\leq x\leq t+\delta\\
0 & x\geq t+\delta
\end{cases}$$

לכל $\theta \in S^{n-1}$ מתקיים כעת

$$\mathrm{Prob}\left[X\cdot\theta \le t\right] \le \mathbb{E} I_t\left(X\cdot\theta\right) \le \mathrm{Prob}\left[X\cdot\theta \le t+\delta\right]$$

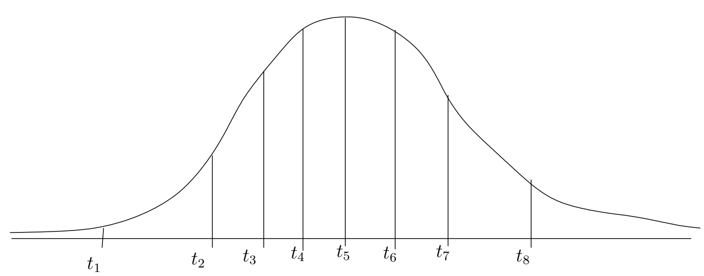
היתרון של הביטוי הזה הוא ש-$X\cdot\theta$ יכול להיות מאוד לא ליפשיץ, למשל זה יכול להיות משתנה בדיד. אבל הפוקנציה I_t היא $\frac{1}{\delta}$-ליפשיץ.

הבעיה היא שאנחנו צריכים לשלוט בבת אחת בכל הערכים של t על הישר, והלמה מאפשרת לשלוט רק בפונקציה ליפשיץ אחת בכל פעם.

נסמן $k=\left\lceil \frac{1}{\delta}-1\right\rceil$, אז $k\le n^{1/8}$. נבחר את ערכי t שלנו להיות כאלה שההתפלגות הגאוסית תתחלק ביניהם באופן שווה: $t_j=\Phi^{-1}\left(j\delta\right)$. נקבע גם $t_{-1}=t_0=-\infty$ ו-$t_{k+1}=+\infty$. או אם $Z\sim N\left(0,1\right)$,

$$\mathrm{Prob}\left(Z\le t_j\right)=j\delta$$

כאשר $j=1,\ldots,k$.



איור 9: מיקומי נקודות הרשת

הצפיפות המקסימלית של ההתפלגות הגאוסית היא $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ולכן הרוחב של כל מקטע הוא לפחות $\left|t_{j+1}-t_j\right|\ge\sqrt{2\pi}\delta\ge\delta$.

אם $t_{j-2}\le t\le t_j+\delta$ אז $t\le t_{j+1}$ ולכן $\left|\mathrm{Prob}\left[Z\le t\right]-j\delta\right|\le 2\delta$.

נפעיל את הלמה העיקרית עבור $f=I_{t_j}$. נקבל שיש $\mathcal{F}_j\subset S^{n-1}$ עם $\sigma\left(\mathcal{F}_j\right)\ge 1-Ce^{-c\sqrt{n}}$ וגם

$$\forall\theta\in\mathcal{F}_j\qquad\left|\mathbb{E}I_{t_j}\left(X\cdot\theta\right)-\mathbb{E}I_{t_j}\left(Z\right)\right|\le C\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\left(\frac{1}{n^{1/4}}+\varepsilon\right)$$

נגדיר $\mathcal{F}=\bigcap_{j=1}^{k}\mathcal{F}_j$, אז המידה עדיין תהיה גדולה

$$\begin{aligned}\sigma\left(\mathcal{F}\right) &\ge 1-k\cdot Ce^{-c\sqrt{n}}\\ &\ge 1-2n^{1/8}Ce^{-c\sqrt{n}}\\ &\ge 1-\tilde{C}e^{-\tilde{c}\sqrt{n}}\end{aligned}$$

ומתקיים לכל $\theta \in \mathcal{F}$ ולכל $j = 1, \ldots, k$

$$\left|\mathbb{E}I_{t_j}\left(X \cdot \theta\right) - \mathbb{E}I_{t_j}\left(Z\right)\right| \leq \frac{C}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right)$$

נקבע $\theta \in \mathcal{F}$ ו-$t \in \mathbb{R}$. אנחנו רוצים להראות

$$\left|\text{Prob}\left[X \cdot \theta \leq t\right] - \text{Prob}\left[Z \leq t\right]\right| \leq \tilde{C}\left(\frac{1}{n^{1/8}} + \sqrt{\varepsilon}\right)$$

צעד ראשון: נקבע $t \in \mathbb{R}$, אז יש j כלשהו ש-$t_{j-1} < t \leq t_j$, ומתקיים מצד אחד

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\left[X \cdot \theta \leq t\right] &\leq \text{Prob}\left[X \cdot \theta \leq t_j\right] \leq \mathbb{E}I_{t_j}\left(X \cdot \theta\right) \\
&\leq \mathbb{E}I_{t_j}\left(Z\right) + \frac{C}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right) \\
&\leq \text{Prob}\left[\mathrm{Z} \leq \mathrm{t_j} + \delta\right] + \frac{\mathrm{C}}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right) \\
&\leq \text{Prob}\left[\mathrm{Z} \leq \mathrm{t}\right] + 2\delta + \frac{\mathrm{C}}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right) \leq \text{Prob}\left[Z \leq t\right] + \hat{C}\delta
\end{aligned}$$

ומצד שני

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\left[X \cdot \theta \geq t\right] &\geq \text{Prob}\left[X \cdot \theta \leq t_{j-1}\right] \geq \text{Prob}\left[X \cdot \theta \leq t_{j-2} + \delta\right] \geq \mathbb{E}I_{t_{j-2}}\left(X \cdot \theta\right) \\
&\geq \mathbb{E}I_{t_{j-2}}\left(Z\right) - \frac{C}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right) \\
&\geq \text{Prob}\left[Z \geq t_{j-2}\right] - \frac{C}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right) \\
&\geq \text{Prob}\left[Z \geq t\right] - 2\delta - \frac{C}{\delta}\left(\frac{1}{n^{1/4}} + \varepsilon\right) \geq \text{Prob}\left[Z \geq t\right] - \hat{C}\delta
\end{aligned}$$

[הערך של δ נבחר בשביל השלב האחרון הזה]

מש"ל.

ההוכחה היתה די פשוטה, כמעט לא משנה כמה הקירובים שנעשה גרועים, ריכוז המידה כל כך חזק שקל לקבל את השאיפה לגאוסיאן.

מסקנה:

יהי (Ω, μ) מרחב הסתברות, ותהי $f_1, \ldots, f_n \in L^2\left(\mu\right)$ מערכת אורתונורמלית עם

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \equiv n$$

ונניח גם את התנאי המיותר $\int f_i d\mu = 0$ $\forall i.$, שיקל על ההוכחה. אז יש $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in S^{n-1}$ כך שמתקיים

$$\forall t > 0. \qquad \left| \mu \left(\left\{ \sum_{i=1}^{n} \theta_i f_i \leq t \right\} \right) - \Phi(t) \right| \leq \frac{C}{n^{1/8}}$$

זה מתקיים למשל לפונקציות טריגונומטריות של פירוק פוריה, ולבסיס של הרמוניות ספריות. באופן יותר כללי, לכל חבורה קומפקטית G שפועלת על Ω באופן טרנזיטיבי, התנאי $\sum f_i^2 \equiv n$ מתקיים לכל בסיס אורתותנורמלי של הצגה של G כפונקציות ב-$L^2(\Omega)$.

יש ביטוי של פיזיקאים, חלקם לפחות (מייקל ברי) אומרים שפונקציה "אקראית" היא f שמקיימת $\sigma(\{f \leq t\}) = \Phi(t)$.

השערה יותר מדויקת: "גל אקראי הוא פונקציה אקראית", כלומר פונקציה עצמית אקראית של הלפלסיאן על משטחים כלליים היא קרובה לגאוסיאן.

הוכחה של המסקנה:

יהי Y משתנה מקרי שמתפלג לפי μ. התנאי של האורתונורמליות אומר $\mathbb{E} f_i(Y) f_j(Y) = \delta_{ij}$. ידוע גם $\mathbb{E} f_i(Y) = 0$. זה מזכיר מאוד איזוטרופיות.

נגדיר וקטור מקרי עם רכיבים $X_i = f_i(Y)$, אז זה ממש איזוטרופי.

יתר על כן,

$$|X|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(Y)^2 = n$$

ולכן $\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1\right)^2 = 0$, תנאי thin shell עם $\varepsilon = 0$.

ממשפט הקליפה הדקה, יש $\theta \in S^{n-1}$, אפילו הרבה כאלה, שמקיימים

$$\forall t \qquad |\mathrm{Prob}(X \cdot \theta \leq t) - \Phi(t)| \leq \frac{C}{n^{1/8}}$$

כלומר

$$\left| \mu \left(\left\{ \sum \theta_i f_i \leq t \right\} \right) - \Phi(t) \right| \leq \frac{C}{n^{1/8}}$$

הערה: הבעיה העיקרית פה היא שרק מבטיחים קיום של θ, לא מצביעים על $\frac{1}{\sqrt{n}}(\theta, \ldots, \theta)$ או על אף וקטור ספציפי אחר. למרות שזה בסיכוי גבוה, זה מפריע להשתמש במשפט.

נראה דוגמא שמהירה למה תנאי הקליפה הדקה נדרש.

יש מידות איזוטרופיות שאין להן קליפה דקה.

נגדיר למשל מידת הסתברות μ שבסיכוי $\frac{1}{2}$ מתפלגת אחיד על ספירה ברדיוס אחד, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ מתפלגת אחיד על ספירה ברדיוס אחר. (הרדיוסים יהיו $\frac{1}{2}\sqrt{n}, \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{n}$ כנראה)

לזה אין קליפה דקה, אין אף רדיוס שבסביבתו יש יותר מ-50% מהמידה, למרות שזו מידה איזוטרופית.

ניקח $Y \sim \operatorname{Unif}\left(S^{n-1}\right)$ ומשתנה ברנולי $R \sim \operatorname{Unif}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{n}, \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{n}\right\}$, אז $X = RY$ מתפלג ככה. מתקיים $c < \mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1\right)^2$ אז גם התנאי עם המומנטים לא מתקיים, והמשפט לא מבטיח כלום.

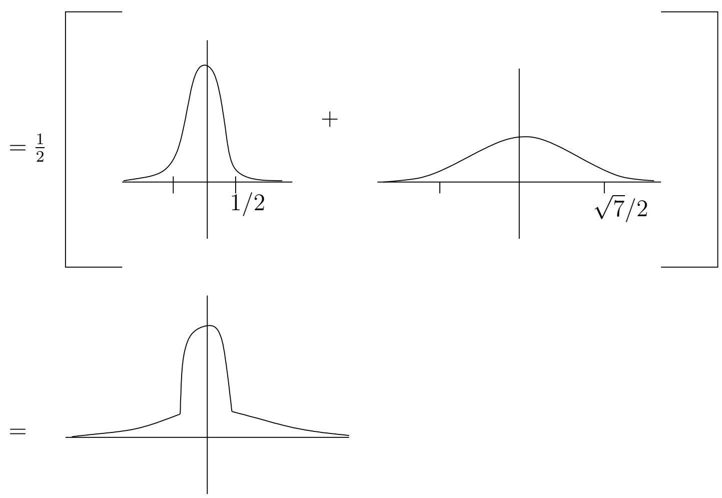
מה ה-marginal distributions?

נגיד עבור $\theta = e_1$,

$$X_1 = RY_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{n}Y_1 & p = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{n}Y_1 & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

אז הצפיפות היא

$$f_{X_1} = \frac{f_{\frac{1}{2}\sqrt{n}Y_1} + f_{\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{n}Y_1}}{2}$$



כלומר בכלל לא גאוסית.

הסבר יותר פוקמלי למה נחוץ תנאי thin shell.

נניח ש-X וקטור מקרי איזוטרופי, ו-$\operatorname{Prob}\left[|X| \geq 2\sqrt{n}\right] \geq \frac{1}{10}$ או $\operatorname{Prob}\left[|X| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}\right] \geq \frac{1}{10}$.

נסביר פה למה רוב ה-marginals לא גאוסיים.

נגדיר את פונקציית ההתפלגות המצטברת של marginal אחד $F_\theta = \operatorname{Prob}\left[X \cdot \theta \leq t\right]$, כדי לטעון שבדרך כלל F_θ שונה מ-Φ נדבר על הפונקציה הממוצעת.

טענה: אם תנאי thin shell לא מתקיים,

$$F(t)=\int_{S^{n-1}}F_{\theta}(t)\,d\sigma(\theta)$$

רחוק מ-Φ, במובן נורמת L^{∞}: יש t ש-$|F(t)-\Phi(t)|>c>0$.

הוכחה:

השלב הראשון בחישוב הוא

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_{S^{n-1}}\mathrm{Prob}\left[X\cdot\theta\le t\right]d\sigma(\theta)\\ &= \mathrm{Prob}\left(X\cdot Y\le t\right)=\mathrm{Prob}\left[\left|X\right|Y_{1}\le t\right]\end{aligned}$$

(כאן $Y\sim\mathrm{Unif}\left(S^{n-1}\right)$)

כיוון ש-X איזוטרופי, $\mathbb{E}\left(\left|X\right|Y_{1}\right)^{2}=1$.

נשתמש בהערכה

$$\begin{aligned}1-\Phi(3) &\approx 10^{-3}\\ 1-\Phi(6) &\approx 10^{-8}\end{aligned}$$

ולכן זו גם בערך ההתפלגות של $\sqrt{n}Y_{1}$.

לכן

$$1-F(6)=\mathrm{Prob}\left[\left|X\right|Y_{1}\ge6\right]\ge\frac{1}{10}\mathrm{Prob}\left[2\sqrt{n}Y_{1}\ge6\right]=\frac{1}{10}\mathrm{Prob}\left[\sqrt{n}Y_{1}\ge3\right]\approx10^{-4}$$

זה רחוק מ-$1-\Phi(6)\approx10^{-8}$.

עוד הערה: בלי thin shell, $X\cdot\theta$ הוא בדרך כלל סופרפוזיציה של גאוסיאנים עם שונויות שונות.

כמו שאמרנו קודם, יש פה שתי תופעות: ה-marginals דומים זה לזה, וה-marnigals של ספירה הם גאוסיאנים.

בהינתן וקטור מקרי X, אפשר להסתכל על הסימטריזציה הסיבובית שלו, שמחלקים את ההסתברות על כל קליפה. אז כל ה-marginals ממש אותו דבר, ורואים בקלות שהם סופרפוזיציה של גאוסיאנים, כל ספירה ברדיוס R תורמת גאוסיאן עם שונות R^{2}/n.

יש עוד המון על מה לדבר על ריכוז מידה, בכיוונים שונים: אי-שיוויוני פואנקרה, אי-שיוויוני לוג-סובולב, מרטינגלים.

אבל זה יהיה מאוד טכני ויראה אולי חסר מוטיבציה.

אז נסיים את חלק הראשון של הקורס: הקדמה לממד גבוה, ובשבוע הבא נעבור לדבר על קמירות. בהמשך הקורס הנושאים האלה יתחברו.

5 קמירות: ברון-מינקובסקי, פרקופה-לינדלר, ריכוז מידה (19/3/2014)

ארבעת השיעורים הראשונים היו חלק א': הקדמה לממד גבוה.

עכשיו נתחיל את חלק ב': מידות הסתברות עם תכונות של קמירות.

למה בכלל להכניס הסתברות כאן? ראינו קודם שריכוז מידה דורש איזושהי תכונה של רגולריות בממד גבוה.

ראינו קודם על הספירה, ובקרוב נראה שהתנאי של הסימטריה לא הכרחי, ושאפשר להניח במקומו הנחות קמירות.

קמירות היא תנאי גאומטרי, ונראה שהיא נותנת תוצאות חזקות בממד גבוה.

מבחינתנו, אפשר לחשוב על קמירות כצורה חזקה של רגולריות גאומטרית. אין כל כך תכונות נוחות ונפוצות שנותנות תוצאות חזקות במידה דומה. (נראה כאילו צורות חלשות של רגולריות אמורות לתת גם כן תוצאות חזקות)

ההרצאה היום תהיה פחות טכנית ויותר פשוטה, ונפתח בפיתוח התורה הבסיסית של קמירות.

הגדרה: צורה $K\subset\mathbb{R}^n$ היא קמורה אם כאשר $x,y\in K$ גם כל הקטע ביניהם מוכל ב-K, כלומר לכל $0<\lambda<1$, גם $\lambda x+(1-\lambda)\,y\in K$.

הגדרה: גוף קמור (convex body בממד 3 לפחות, בממד 2 בדרך כלל convex shape) הוא קבוצה קמורה, פתוחה, וחסומה (ולא ריקה).

התוצאה הראשונה שנוכיח היא:

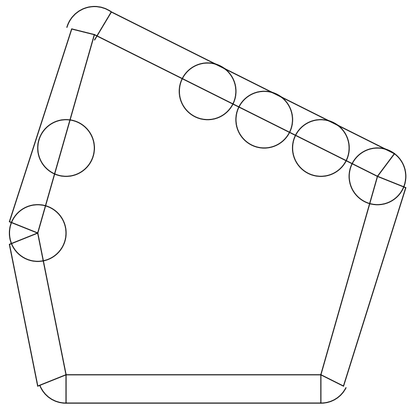
משפט: (אי-שיוויון ברון-מינקובסקי Brunn-Minkowski)

יהיו $A,B\subset\mathbb{R}^n$ קבוצות בורל לא-ריקות. אז

$$|A+B|^{1/n}\geq|A|^{1/n}+|B|^{1/n}$$

כאשר $|A|=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$ מידת לבג, וסכום מינקובסקי (Minkowski sum) של קבוצות הוא

$$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\}=\bigcup_{x\in A}\left(x+B\right)$$



איור 10: סכום מינקובסקי של מחומש A ועיגול B

במישור, כמו שרואים בציור, מתקיים $|A+tB| = |A| + t\,|\partial A| + \pi t^2$, כאשר $B = B(0,1)$ עיגול היחידה ו-$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$.

תכונה כללית: כאשר $A, B \subset \mathbb{R}^n$ קמורות, $|A+tB|$ הוא פולינום ב-t ממעלה n. יש תיאוריה שלמה של "נפח מעורב" שמתחילה מהאבחנה הזו, שלא נוכיח פה.

למה אמרנו שב"מ קשור לקמירות? הרי היא לא מופיעה בניסות.

- דבר ראשון, אפשר לאפיין קמירות בעזרת סכום מינקובסקי: $A \subset \mathbb{R}^n$ קמורה אם ורק אם לכל $0 < \lambda < 1$, $\lambda A + (1-\lambda) A \subset A$.
- אם $|A|, |B| > 0$ ו-A ו-B קבוצות סגורות, יש שיווין בא"ש ב"מ אם ורק אם A, B קמורות, ו-B הזזה של ניפוח (dilation) של A.

  בדיקה של הכיוון הקל: אם $B = x_0 + \lambda A$ אז

$$A + B = (x + \lambda A) + A = x + (1+\lambda) A$$

  ואז $|A+B|^{1/n} = (1+\lambda)\,|A|^{1/n} + |A|^{1/n}$.

יש המון הוכחות של ב"מ. אחת מהן היא עם סימטריזציה, ודומה מאוד להוכחה שראינו לפני שבועיים, אבל עם סימטריזציה אחרת. יש עם טרנספורטציה, יש עם לוקליזציה, כלומר חיתוך על-ידי על-מישורים. אנחנו נראה הוכחה אנליטית.

הערה: הא"ש לא נכון עם אף חזקה אחרת. נבנה דוגמא נגדית בעזרת מקרה השיוויון. אם $|A| = 1$ אז $|sA + tA|^{1/n} = s + t$, ו-$|sA|^{1/n} = s$ ו-$|tA|^{1/n} = t$. במספרים יש אי-שיוויון, שאם $\alpha \ge 1$ ו-$x, y > 0$ אז $(x+y)^\alpha \ge x^\alpha + y^\alpha$, ואם נפעיל אותו עם חזקה $\beta \ge \frac{1}{n}$ נקבל

$$|A+B|^\beta = \left(|A+B|^{1/n}\right)^{n\beta} \ge \left(|A|^{1/n} + |B|^{1/n}\right)^{n\beta} \ge |A|^\beta + |B|^\beta$$

וזה פשוט א"ש חלש יותר. כאשר $\beta < \frac{1}{n}$ נקבל שבמקרי השיוויון הא"ש לא נכון, כלומר $|A+B|^{\beta} < |A|^{\beta} + |B|^{\beta}$.

יישומים של א"ש ב"מ:

- הא"ש האיזופרימטרי ב-$\mathbb{R}^n$: אם $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצת בורל, ואם $B \subset \mathbb{R}^n$ כדור, אז

$$|A| = |B| \implies |A_{\varepsilon}| \geq |B_{\varepsilon}|$$

כאשר $A_{\varepsilon} = A + \varepsilon B(0,1)$.

הערה: אם ל-A שפה חלקה, $\mathrm{Vol}_n(A) > 0$, אז

$$(\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A) =)\, |\partial A| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|A_{\varepsilon}| - |A|}{\varepsilon}$$

ולכן מקבלים גם

$$|A| = |B| \implies |\partial A| \geq |\partial B|$$

כדי לעשות את זה באופן יותר מדויק צריך הגדרה טובה לשטח פנים, והוא לא מטופל מספיק טוב בחומר הרקע. אבל מה שכתבנו נכון במקרה של שפה חלקה.

נוכיח את הא"ש הפרימטרי מא"ש ב"מ:

$$\begin{aligned} |A_{\varepsilon}| &= |A + \varepsilon B(0,1)| \geq \left(|A|^{1/n} + \varepsilon |B(0,1)|^{1/n}\right)^n \\ &= \left(|B|^{1/n} + \varepsilon |B(0,1)|^{1/n}\right)^n = \left(|B + B(0,1)|^{1/n}\right)^n = |B_{\varepsilon}| \end{aligned}$$

- נניח $K \subset \mathbb{R}^n$ קמורה עם $K = -K$. יהי $E \subset \mathbb{R}^n$ תת-מרחב ℓ-ממדי. אזי

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{Vol}_{\ell}(K \cap E) \geq \mathrm{Vol}_{\ell}(K \cap (E + x))$$

הוכחה: נסמן $K_x = K \cap (E + x)$. אזי מקמירות $\frac{K_x + K_{-x}}{2} \subset K$, ומצד שני $E = (E+x) + (E-x)$, ולכן $\frac{K_x + K_{-x}}{2} \subset K_0 = K \cap E$.

מב"מ בממד ℓ,

$$|K \cap E|^{1/\ell} \geq \frac{1}{2}\left(|K_x|^{1/\ell} + |K_{-x}|^{1/\ell}\right) = |K_x|^{1/\ell}$$

כי $K_{-x} = -K_x$, ולכן יש להם אותו הנפח.

- גרסא כפלית של ברון-מינקובסקי:

יהיו $A, B \subset \mathbb{R}^n$ קבוצות בורל (אולי ריקות), $0 < \lambda < 1$. אזי

$$|\lambda A + (1-\lambda) B| \geq |A|^{\lambda} |B|^{1-\lambda}$$

הוכחה: מברון-מינקובסקי ומהא"ש החשבוני-הנדסי.

אם אחת הקבוצות ממידה 0, זה ברור. אחרת נפעיל את א"ש ב"מ ונקבל

$$|\lambda A+(1-\lambda)B|^{1/n}\geq\lambda|A|^{1/n}+(1-\lambda)|B|^{1/n}\geq\left(|A|^{1/n}\right)^{\lambda}\left(|B|^{1/n}\right)^{1-\lambda}$$

קל לקבל גם את הגרסא ה"רגילה" האדיטיבית מהגרסא הכפלית.

נתונים $A,B\subset\mathbb{R}^n$ ממידה חיובית. נסמן

$$\begin{aligned}\tilde{A}&=|A|^{-1/n}A\\ \tilde{B}&=|B|^{-1/n}B\end{aligned}$$

גופים מנפח 1. נבחר $\lambda=\frac{|A|^{1/n}}{|A|^{1/n}+|B|^{1/n}}$ ונקבל מהגרסא הכפלית

$$\left|\frac{1}{|A|^{1/n}+|B|^{1/n}}(A+B)\right|=\left|\lambda\tilde{A}+(1-\lambda)\tilde{B}\right|\geq\left|\tilde{A}\right|^{\lambda}\left|\tilde{B}\right|^{1-\lambda}=1$$

$$\Longrightarrow|A+B|\geq\left(|A|^{1/n}+|B|^{1/n}\right)^n$$

- גרסא פונקציונלית של ברון-מינקובסקי: אי-שיוויון פרקופה לינדלר (Prekopa-Lindler).

  יהיו $f,g,h:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ מדידות, $0<\lambda<1$, ונניח שמתקיים

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n\qquad h(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq f(x)^{\lambda}g(y)^{1-\lambda}$$

אזי

$$\int h\geq\left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}$$

קשר לגרסא הכפלית של ב"מ: נבחר

$$\begin{aligned}f&=\mathbf{1}_A\\ g&=\mathbf{1}_B\\ h&=\mathbf{1}_{\lambda A+(1-\lambda)B}\end{aligned}$$

אנחנו רוצים להראות שאם $x,y\in\mathbb{R}^n$ אז

$$\mathbf{1}_{\lambda A+(1-\lambda)B}(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\mathbf{1}_A(x)^{\lambda}\mathbf{1}_B(y)^{1-\lambda}$$

צד ימין מתאפס אלא אם $x \in A, y \in B$, ובמקרה הזה לפי ההגדרה

$$\mathbf{1}_{\lambda A+(1-\lambda)B}\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=1$$

מא"ש פ"ל נקבל

$$|\lambda A+(1-\lambda)B| = \int \mathbf{1}_{\lambda A+(1-\lambda)B} \geq \left(\int \mathbf{1}_A\right)^{\lambda}\left(\int \mathbf{1}_B\right)^{1-\lambda} = |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}$$

זה אי-שיוויון הפוך, או "משלים", את א"ש Holder.

יש נורמליזציה של הא"ש בו הוא $\int f^{\lambda}g^{1-\lambda} \leq \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}$ עם $0<\lambda<1$.
החסם המשולב עם פ"ל הוא

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{\lambda} g(x)^{1-\lambda}dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda} \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sup_{x=\lambda y+(1-\lambda z)} f(y)^{\lambda} g(z)^{1-\lambda}\right)dx$$

בספרות א"ש פ"ל מנוסח לפעמים כך: אם יש פונקציות $F,G,H : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty)$ ו-$0<\lambda<1$,

$$\forall x,y \qquad H\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \leq \lambda F(x)+(1-\lambda)G(y) \implies \int e^{-H} \geq \left(\int e^{-F}\right)^{\lambda}\left(\int e^{-G}\right)^{1-\lambda}$$

הוכחה של א"ש P-L (פרקופה-לײנדלר):

נראה את התוצאה באינדוקציה על הממד.

$n=1$: נתונות שלוש פונקצית $f,g,h:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ וקבוע $0<\lambda<1$, עם

$$\forall x,y \qquad h\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \geq f(x)^{\lambda}g(y)^{1-\lambda}$$

ורוצים להראות ש-$\int h \geq \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}$.

אפשר לקטום את הפונקציות ולהניח שהן חסומות. כלומר $f_M=\min\{f,M\}$ וכנ"ל g_M,h_M. התנאי עדיין מתקיים עבור הפונקציות הקטומות: בנקודות בהן $h=h_M$ זה ברור, ואם $h_M<h$ אז צד שמאל הוא M, וצד ימין הוא בהכרח לא יותר מ-M. תהליך גבולי מראה שאם הא"ש מתקיים לכל הפונקציות החסומות, הוא מתקיים לכל הפונקציות המדידות. (התכנסות נשלטת)

אם כופלים את f בקבוע A, את g בקבוע B, ואת h בקבוע $A^{\lambda}B^{1-\lambda}$, זה לא משפיע על הנחות המשפט או על המסקנות. לכן מותר לנרמל את f ואת g, ולהניח

$$\|f\|_{\infty}=\|g\|_{\infty}=1$$

נסמן $\{f>t\}=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>t\}$.

טענה: לכל $0<t<1$,

$$\{h>t\}\supset\lambda\cdot\{f>t\}+(1-\lambda)\cdot\{g>t\}$$

נבדוק זאת: אם $x\in\{f>t\}$ ו-$y\in\{g>t\}$, אז

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)g(y)>t$$

ולכן $\lambda x+(1-\lambda)y\in\{h>t\}$.

נשתמש בא"ש ב"מ בממד 1: אם $A,B\subset\mathbb{R}$ עם מידה חיובית, אז $|A+B|\geq|A|+|B|$.

הוכחה של זה: אם אחת הקבוצות ממידה אינסופית זה בהכרח נכון. אם לא, אפשר להסיר קבוצה ממידה 0 ולהזיז כך ש-A ו-B חסומות, ו-$\sup A=\inf B=0$. אז לכל $\varepsilon,\delta>0$,

$$A+B\supset(A+\varepsilon)\cup(B+\delta)$$

וזה ממידה לפחות $|A|+|B|-\varepsilon-\delta$.

נקבל מזה

$$|\{h>t\}|\geq\lambda|\{f>t\}|+(1-\lambda)|\{g>t\}|$$

וממשפט פוביני $\int_{\mathbb{R}}f=\int_0^{\|f\|_\infty}|\{f>t\}|\,dt$ נקבל

$$\begin{aligned}\int_0^{\|h\|_\infty}|\{h>t\}|\geq\int_0^1|\{h>t\}| &\geq \lambda\int_0^1|\{f>t\}|+(1-\lambda)\int_0^1|\{g>t\}|\\ \int_{\mathbb{R}}h &\geq \lambda\int_{\mathbb{R}}f+(1-\lambda)\int_{\mathbb{R}}g\end{aligned}$$

ומהא"ש החשבוני-הנדסי נקבל

$$\int_{\mathbb{R}}h\geq\lambda\int_{\mathbb{R}}f+(1-\lambda)\int_{\mathbb{R}}g\geq\left(\int_{\mathbb{R}}f\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}}g\right)^{1-\lambda}$$

הערה: באופן כללי, אם נורמת L_∞ של f ו-g שוות, אז נכון גם הא"ש החיבורי החזק יותר. אבל התהליך של הנרמול משאיר רק א"ש כפלי.

נעשה את מעבר האינדוקציה. נניח שהא"ש נכון עבור $k\leq n-1$, ונוכיח עבור ממד n.

נשתמש בקורדינאטות $\mathbb{R}^n\ni x=(y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$. הפונקציות שלנו הן $f(y,t)$, $g(y,t)$, $h(y,t)$, והן מקיימות

$$h(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2,\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\geq f(y_1,t_1)^{\lambda}f(y_2,t_2)^{1-\lambda}$$

נסמן

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y,t)\,dt \\ G(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y,t)\,dt \\ H(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y,t)\,dt \end{aligned}$$

מטרתנו:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h\right)^{1-\lambda}$$

באופן שקול, צ"ל

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G\right)^{1-\lambda}$$

נרצה להוכיח זאת בעזרת פ"ל בממד $n-1$, ולשם כך צריך לבדוק את התנאי

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \qquad H(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \geq F(y_1)^{\lambda} G(y_2)^{1-\lambda}$$

כדי לראות זאת, נקבע $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$. נסמן $f_y(t) = f(y,t)$ ובדומה עבור g, h. נתון

$$h_{\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2}(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \geq f_{y_1}(t_1)^{\lambda} g_{y_2}(t_2)^{1-\lambda}$$

כלומר $f_{y_1}, g_{y_2}, h_{\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2}$ מקיימות את תנאי P-L בממד 1, והא"ש המתקבל על האינטגרלים הוא בדיוק מה שרצינו:

$$H(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2} \geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{y_1}\right)^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g_{y_2}\right)^{1-\lambda} = F(y_1)^{\lambda} G(y_2)^{1-\lambda}$$

בדקנו את התנאי, ומא"ש פ"ל בממד $n-1$ נקבל

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G\right)^{1-\lambda}$$

מש"ל.

בעצם הראינו פה שתנאי P-L נשמר תחת מעבר להתפלגות שולית (marginal).

נראה ישום של ברון-מינקוסבקי כדי לקבל ריכוז מידה. הלקח הוא שאפשר לקבל ריכוז מידה בלי סימטריה, רק מתוך קמירות.

יש קשר בין קמירות לבין מרחבי בנך. נניח $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור, שמכיל את 0 (בד"כ מניחים $K=-K$). מגדירים את פוקנציונל מינקובסלי:

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\qquad \left\Vert x\right\Vert_K:=\inf\left\{\lambda>0:x\in\lambda K\right\}$$

זו נורמה שהוא כדור היחידה שלה:

- הומוגניות: אם $\lambda\in\mathbb{R}$, $0<\lambda$, $x\in\mathbb{R}^n$ אז $\left\Vert\lambda x\right\Vert_K=\lambda\left\Vert x\right\Vert_K$.
- אי-שיוויון המשולש: תמיד מתקיים $x\in\left(\left\Vert x\right\Vert_K+\varepsilon\right)K$ ו-$y\in\left(\left\Vert y\right\Vert_K+\varepsilon\right)K$, ומקמירות K

$$x+y\in\left(\left\Vert x\right\Vert_K+\left\Vert y\right\Vert_K+2\varepsilon\right)K$$

  זה נכון לכל $\varepsilon>0$, ולכן $\left\Vert x+y\right\Vert_K\le\left\Vert x\right\Vert_K+\left\Vert y\right\Vert_K$.
- $\left\Vert x\right\Vert_K=0$ אם ורק אם $x=0$, כי $0\in K$.

זו נקראת "נורמה לא סימטרית".

אם $K=-K$ אז $\left\Vert x\right\Vert_K=\left\Vert -x\right\Vert_K$, ואז זו נורמה כשרה.

יש התאמה חח"ע מדויקת בין נורמות לא סימטריות לבין גופים קמורים שמכילים את 0.

זו מכילה את ההתאמה המדויקת בין נורמות לבין גופים סימטריים ביחס לראשית.

הגדרה: (קמירות במידה אחידה, uniform convexity)

נניח $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור, $0\in K$.

עבור $\varepsilon>0$ נגדיר את <u>מודולוס הקמירות</u> של K בתור

$$\delta\left(\varepsilon\right)=\inf\left\{1-\left\Vert\frac{x+y}{2}\right\Vert_K;\ \begin{array}{c}x,y\in K\\ \left\Vert x-y\right\Vert_K>\varepsilon\end{array}\right\}$$

(אם היינו מסתכלים על $\overline{K}$, האינפימום היה מתקבל)

מתקיים $\delta\left(\varepsilon\right)>0$ לכל $\varepsilon>0$ (K קמור באופן אחיד) אם ורק אם ∂K לא מכילה קטע.

ככל ש-$\delta\left(\varepsilon\right)$ יותר גדול, חושבים על הגוף כעל גוף "יותר קמור".

דוגמאות:

- תרגיל: עבור K שהוא כדור או אפילסואיד, $\delta\left(\varepsilon\right)\geq\frac{1}{8}\varepsilon^{2}$.
(ההגדרה אינווריאנטית להעתקות לינאריות)
- תרגיל יותר קשה: נסמן $B\left(\ell_{p}^{n}\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}:\sum\left|x_{i}\right|^{p}\leq1\right\}$. עבור $p=1$ יש קטעים, עבור $1<p<2$ מתקיים

$$\delta\left(\varepsilon\right)\geq c\left(p-1\right)\varepsilon^{2}$$

ועבור $p>2$,

$$\delta\left(\varepsilon\right)\geq c_{p}\varepsilon^{p}$$

נוכיח ריכוז מידה בגופים קמורים כלליים.

נקבע $K\subset\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור, $0\in K$.

נסמן ב-μ את מידת ההסתברות האחידה על K

$$\mu\left(A\right)=\frac{\left|A\cap K\right|}{\left|K\right|}$$

עבור $A\subset\mathbb{R}^{n}$ ו-$x\in\mathbb{R}^{n}$, נגדיר

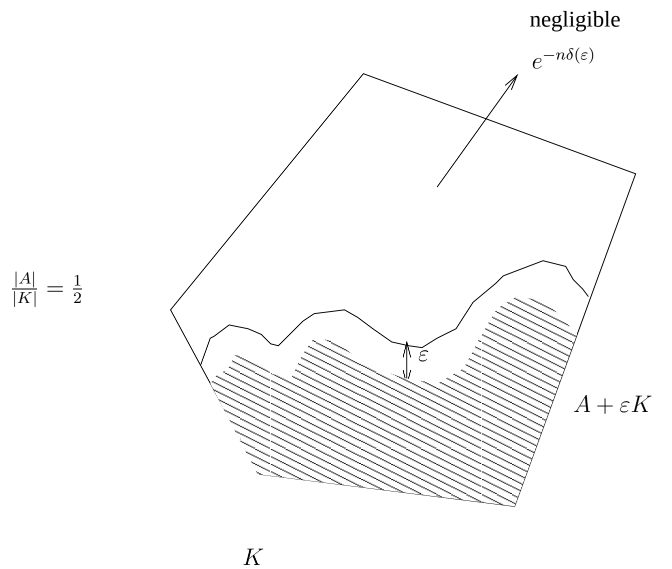
$$d\left(x,A\right)=\inf_{y\in A}\left\Vert x-y\right\Vert _{K}$$

אין נורמה אוקלידית שמושרה מ-$\mathbb{R}^{n}$, הכל ביחס ל-K. עובדים במרחב נורמי אבסטרקטי ממימד סופי.

משפט: (ריכוז מידה לגופים קמורים באופן אחיד)

תהי $A\subset\mathbb{R}^{n}$ בורל. אזי

$$\forall\varepsilon>0\qquad\mu\left(\left\{ x\in K:d\left(x,A\right)\geq\varepsilon\right\} \right)\leq\frac{1}{\mu\left(A\right)}e^{-2n\delta\left(\varepsilon\right)}$$



איור 11: תמונה גאומטרית של הקבוצות המעורבות

הוכחה:

נסמן $B = \{x \in K : d(x, A) \geq \varepsilon\}$. אזי לכל $x \in A \subset K$ ו-$y \in B$ מתקיים $\|x - y\|_K \geq \varepsilon$, ולכן

$$\frac{x + y}{2} \in (1 - \delta(\varepsilon)) K$$

כלומר

$$\begin{aligned} \frac{A + B}{2} &\subset (1 - \delta(\varepsilon)) K \\ \left| \frac{A + B}{2} \right| &\leq (1 - \delta(\varepsilon))^n K \end{aligned}$$

ומא"ש B-M,

$$\sqrt{|A| \cdot |B|} \leq \left| \frac{A + B}{2} \right| \leq (1 - \delta(\varepsilon))^n K$$

נחלק ב-$|K|$ ונקבל

$$\sqrt{\mu(A)\,\mu(B)} \leq (1 - \delta(\varepsilon))^n \leq e^{-n\delta(\varepsilon)}$$

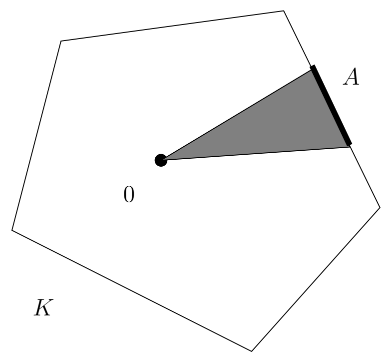
ולכן

$$\mu(\{x \in K : d(x, A) \geq \varepsilon\}) = \mu(B) \leq \frac{1}{\mu(A)} e^{-2n\delta(\varepsilon)}$$

מש"ל.

כדי לשחזר את א"ש ריכוז המידה על S^{n-1} נדבר על ה-cone measure (מידת חרוטים?) על ∂K.

$$A \subset \partial K \implies \nu_{\partial K}(A) = \frac{\mathrm{Vol}_n\left(\{tx : x \in A, t \in [0,1]\}\right)}{\mathrm{Vol}_n(K)}$$



$\nu_{\partial K}$ היא מידת הסתברות על ∂K. היא בד"כ לא מידת שטח הפנים. (במקרה כן כאשר $K = B\left(\ell_p^n\right)$ עם $p = 1, 2, \infty$, או פוליטופ שהמרחק של כל הפאות מ-0 אותו דבר)

תרגיל: נסחו והוכיחו ריכוז מידה על ∂K ביחס ל-$\nu_{\partial K}$.

רמז:

$$\tilde{A} = \left\{tx : x \in A, t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]\right\}$$

לא נראה יישומים של זה עכשיו, כנראה שנראה בהמשך הקורס. כרגיל, איפה שיש ריכוז מידה יש כל מיני תוצאות חזקות.

נעבור לדבר על א"ש סנטלו (Santalo).

הגדרה:

יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור (שמכיל את 0, לפעמים נוח לדרוש $K = -K$). הגוף הדואלי/הפולרי שלו הוא

$$K^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in K,\ x \cdot y \le 1\}$$

"כדור היחידה של הנורמה הדואלית"

למה הכוונה? אם $\|\cdot\|_K$ נורמה ב-$\mathbb{R}^n$, מגדירים את הנורמה הדואלית

$$\|x\|_K^* = \sup_{y\neq 0} \frac{|x\cdot y|}{\|y\|_K}$$

(הנורמה הדואלית של הפונקציונל $\langle x,\cdot\rangle$)

טענה: אם $K=-K$, אזי $\|x\|_K^* = \|x\|_{K^0}$.

תכונות:

- הקבוצה K^0 תמיד קמורה, אפילו אם K לא קמור.
הסבר: אפשר להגדיר באופן שקול כחיתוך של חצאי מרחבים
$$K^0 = \bigcap_{y\in K} \{x\in\mathbb{R}^n : x\cdot y \le 1\}$$

- אם $p,q\ge 1$ ו-$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, אז $B\left(\ell_p^n\right)^0 = B\left(\ell_q^n\right)$.
- אם K קמור, $\overline{K} = \left(K^0\right)^0$.
הסבר: $\left(K^0\right)^0$ סגור. $K\subset \left(K^0\right)^0$ מההגדרה.
מההגדרה, הגוף הפולרי הוא הגוף המקסימלי שמתקיים
$$\forall x\in K, y\in K^0 \qquad x\cdot y\le 1$$

למה $\left(K^0\right)^0 \subset \overline{K}$ כאשר K קמור? זה נובע ממשפט ההפרדה: אם $x\notin\overline{K}$, אז יש על-מישור מפריד. אפשר להוכיח אותו בכל מיני דרכים, זה היה איפשהו בתואר הראשון.

תהי כעת $x\notin\overline{K}$, ונראה ש-$x\notin\left(K^0\right)^0$. קיים $y\in\mathbb{R}^n$ כך שלכל $z\in K$, $z\cdot y<1$ אבל $x\cdot y>1$. (הכיוון של האי-שיוויונים כזה כי $0\in K$)

מכאן ש-$y\in K^0$, אבל $x\cdot y>1$ ולכן $x\notin\left(K^0\right)^0$.

- מתקיים $K=K^0$ אם ורק אם $K=B\left(0,1\right)$.
הכיוון $\Longrightarrow$ ברור.

בכיוון ההפוך, אם $x\in K, y\in K^0$ אז $x\cdot y\le 1$, ולכן ברור $K\cap K^0\subset\overline{B\left(0,1\right)}$.
אם $K=K^0$, $\overline{K}\subset\overline{B\left(0,1\right)}$, ודואליות הופכת כיוון הכלה, ולכן $\overline{B\left(0,1\right)}\subset K^0$.
לכן $K=B\left(0,1\right)$.

א"ש סנטלו: תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה שמכילה את 0. נניח ש-$\text{barycenter}\left(K^0\right)=0$, אז

$$|K|\cdot\left|K^0\right|\le\left|B\left(0,1\right)\right|^2$$

6 טרנספורם לז׳נדר, אי-שיוויון סנטלו (26/3/2014)

בשיעור הקודם הוכחנו את א"ש ברון-מינקובסקי: אם $A,B\subset\mathbb{R}^n$ עם $|A|,|B|>0$,

$$|A+B|^{1/n}\geq|A|^{1/n}+|B|^{1/n}$$

את זה הראינו העזרת א"ש פרקופה-לינדפר, שהוא גרסא פונקציונלית: אם $f,g,h:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ו-$0<\lambda<1$, ואם מתקיים

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n\qquad h\left(\lambda x+(1-\lambda)\,y\right)\geq f\left(x\right)^{\lambda}g\left(y\right)^{1-\lambda}$$

אז

$$\int h\geq\left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{\lambda}$$

אז זה ראינו באינדוקציה על המימד.

(זה סוג של כיוון הפוך לא"ש הולדר)

הגדרנו קבוצות פולאריות: אם $K\subset\mathbb{R}^n$ עם $0\in\mathrm{int}K$,

$$K^0=\{x\in\mathbb{R}^n:\forall y\in K.\,x\cdot y\leq1\}$$

דוגמאות:

- אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אז $B\left(\ell_p^n\right)^0=B\left(\ell_q^n\right)$
- אם $K\subset\mathbb{R}^n$ הוא פוליטור עם V קודקודים ו-F פאות ממימד $n-1$, אז K^0 הוא פוליטופ עם F קודקודים ו-V פאות ממימד $n-1$.

אי-שיוויון סנטלו, שנוכיח עוד מעט: אם $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה (לא בהכרח קמורה) ו-$K=-K$, אז

$$|K|\cdot\left|K^0\right|\leq|B_2^n|^2$$

עם שיוויון באליפסואידים.

הערה: בדרך כלל K יהיה גוף קמור, אבל ההנחה הזו לא הכרחית.

הערה: אפשר להחליש את הנחת הסימטריה, במקום $K=-K$ אפשר להניח שמרכז המאסה של K^0 הוא בראשית, כלומר

$$\text{barycenter}\left(K^0\right):=\left(\int_{K^0}x_1dx,\ldots,\int_{K^0}x_ndx\right)=(0,\ldots,0)$$

גרסא פונקציונלית של א"ש סנטלו: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מדידה, אם מתקיימת אחת מתכונות הסימטריה

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\vec{x}e^{-f(x)} &= 0\\ \int_{\mathbb{R}^n}\vec{x}e^{-f^*(x)} &= 0\end{aligned}$$

אז

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-f}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-f^*}\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right)^2=(2\pi)^n$$

כאן הפונקציה הפולארית מוגדרת באמצעות טרנספורם לז'נדר.

הגדרה: בהינתן $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ מדידה, נגדיר

$$f^*(y)=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ f(x)<\infty}}\left[\langle x,y\rangle-f(x)\right]$$

תכונות:

- הפונקציה f^* היא הפונקציה המינימלית (האינפימום) שמקיימת $f(x)+f^*(y)\ge x\cdot y$ לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$.
- הפונקציה f^* קמורה, כלומר לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ ו-$0<\lambda<1$,

$$f^*(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f^*(x)+(1-\lambda)f^*(y)$$

תכונות של פונקציות קמורות:

- הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}^n:f^*(x)<t\}$ קמורה לכל $t\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
- מקסימום וסופרמום של פונקציות קמורות הם פונקציות קמורות.
- האפיגרף (epigraph)

$$\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:t\ge f^*(x)\}$$

הוא קבוצה קמורה. (אם f^* רציפה זו קבוצה סגורה)
ממשפט הפרדה במרחב הילברט, מקבלים שבכל נקודה שבה f^* סופית יש פונקציה אפינית שקטנה מ-f^*. אם הפונקציה גזירה זה יהיה המשיק.

אפשר להסיק ש-f^* קמורה כי היא סופרמום של פונקציות לינאריות.

- טענה: אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ קמורה ורציפה מלמטה (lower semi continuous), אז $f=f^{**}$.

הגדרה של רציפות מלמטה: $f(x_0)\le\underline{\lim}_{x\to x_0}f(x)$. לחליפין, f רציפה מלמטה אם ורק אם האפיגרף הוא קבוצה סגורה.

הערה: אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קמורה (ולא מקבלת את הערך $+\infty$), אז היא רציפה. (תרגיל)

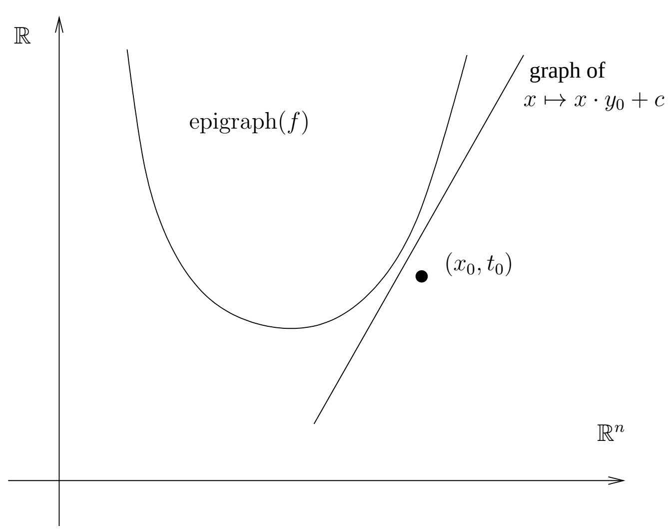
הוכחה של הטענה:

הכיוון $f\le f^{**}$ ברור. למה? כי f^{**} היא הפונקציה המינימלית שמקיימת $f^{**}(x)+f^{*}(y)\ge x\cdot y$, ו-$f$ מקיימת את התנאי הזה.

בשביל הכיוון ההפוך צריך להשתמש בקמירות וברציפות. נקבע $x_0\in\mathbb{R}^n$ ו-$t_0<f(x_0)$. המטרה: להראות $f^{**}(x_0)>t_0$.

נשתמש בהפרדה של קבוצות קמורות מנקודות. אנחנו יודעים ש-$(x_0,t_0)\notin\text{epigraph}(f)$. האפיגרף הוא קבוצה סגורה וקמורה, אז יש על-מישור מפריד, כלומר קיימים $y_0\in\mathbb{R}^n$ ו-$c\in\mathbb{R}$, כך שמתקיים

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\qquad f(x)\ge y_0\cdot x+c$$
$$t_0<y_0\cdot x+c$$



איור 12: מיקום העל-מישור ביחס לפונקציה

ייתכן שהעל-מישור הזה מקביל ל-e_{n+1}. זה בלתי אפשרי אם f סופית למשל. נטפל במקרה הזה אחר כך.

מההפרדה הזו נובע

$$f^{*}(y_0)=\sup\left[x\cdot y_0-f(x)\right]\le\sup\left[x\cdot y_0-(y_0\cdot x+c)\right]=-c$$

ולכן

$$f^{**}(x_0) \geq x_0 \cdot y_0 - f^*(y_0) \geq x_0 \cdot y_0 + c > t_0$$

במקרה בו העל-מישור לא מגדיר פונקציה אפינית, x_0 מופרד מהקבוצה $\{f < \infty\}$ ע"י על-מישור ב-$\mathbb{R}^n$, ואפשר לנסח טיעון דומה שמכסה את המקרה הזה.

- ב-$\mathbb{R}$: אם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ו-$f(t) = \frac{1}{p}|t|^p$, אז $f^*(s) = \frac{1}{q}|s|^q$. זה נובע מהאי-שיוויון המוכר

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

- ב-$\mathbb{R}^n$: אם $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור (האם צריך $K = -K$?), ו-$f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_K^p$ אז $f^*(x) = \frac{1}{q}\|x\|_{K^0}^q$.

למה?

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left[x \cdot y - \frac{\|y\|_K^p}{p} \right] = \sup_{\substack{t > 0 \\ y \in \mathbb{R}^n}} \left[x \cdot (ty) - \frac{\|ty\|_K^p}{p} \right] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|y\|_K^p \cdot \sup_{t > 0} \left[\frac{x \cdot y}{\|y\|_K^p} t - \frac{t^p}{p} \right] = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|y\|_K^p \cdot \frac{\left(\frac{|x \cdot y|}{\|y\|_K^p} \right)^q}{q} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q} \left(\frac{|x \cdot y|}{\|y\|_K^{p - p/q}} \right)^q = \frac{1}{q} \|x\|_{K^0}^q \end{aligned}$$

- אם f פונקציה קמורה, וגזירה ב-$x \in \mathbb{R}^n$,

$$f^*(\nabla f(x)) + f(x) = x \cdot \nabla f(x)$$

למה? כי

$$f^*(\nabla f(x)) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\nabla f(x) \cdot y - f(y)]$$

והגרדיאנט של הביטוי $\nabla f(x) \cdot y - f(y)$ (ביחס ל-y) מתאפס ב-$y = x$, והוא פונקציה קמורה ב-y. לכן הסופקמום מתקבל ב-$y = x$.

התכונה הזו משמשת להגדרת טרנספורם לז'נדר במכניקה אנליטית או משהו. [כאן בא דיון במכניקה אנליטית, שלא ממש הבנתי]

- פונקציה היא טרנספורם לז'נדר של עצמה $f=f^*$ אם ורק אם $f(x)=\frac{1}{2}|x|^2$
למה? $f(x)+f^*(y)\geq x\cdot y$ אז

$$f(x)=\frac{f(x)+f^*(x)}{2}\geq\frac{1}{2}|x|^2$$

לטרנספורם לז'נדר יש התכונה שהוא מחליף סדר, כלומר $f\leq g\implies g^*\geq f^*$,
ולכן במקרה שלנו $f^*\geq\frac{1}{2}|x|^2$, ובסך הכל מקבלים $f(x)=\frac{1}{2}|x|^2$.

תרגיל: עבור $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נגדיר

$$I(u)=-\log\int_{\mathbb{R}^n}e^{-u^*}\in\mathbb{R}$$

אם $u_1,u_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, הוכיחו מפרקופה-לינדלר את התכונה

$$I\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\leq\frac{I(u_1)+I(u_2)}{2}$$

נוכיח את א"ש סנטלו הפונקציונלי.

משפט: (הגרסא הכפלית של א"ש פ"ל)

נניח $f,g,h:\mathbb{R}^+\to[0,\infty)$ מדידות, ומתקיים $h\left(\sqrt{xy}\right)\geq\sqrt{f(x)g(y)}$ אז

$$\int_{\mathbb{R}^+}h\geq\sqrt{\int_{\mathbb{R}^+}f\int_{\mathbb{R}^+}g}$$

(יש כמובן גם גרסאות רב-ממדיות, ועם $\lambda\neq\frac{1}{2}$)

(יש גם גרסא של פ"ל עם ממוצע הרמוני)

הוכחה:

נעשה החלפת משתנה בפ"ל:

$$\begin{aligned}H(t)&:=e^th\left(e^t\right)\\G(t)&:=e^tg\left(e^t\right)\\F(t)&:=e^tf\left(e^t\right)\end{aligned}$$

אלה מקיימים $\int_{\mathbb{R}}H=\int_{\mathbb{R}^+}h$ ובדומה לשתיים האחרות. נרצה להראות

$$\int_{\mathbb{R}}H\geq\sqrt{\int_{\mathbb{R}}F\int_{\mathbb{R}}G}$$

בשביל זה נשתמש בפ"ל, אז צריך להראות

$$H\left(\frac{s+t}{2}\right)\geq\sqrt{F\left(s\right)G\left(t\right)}$$

כלומר

$$e^{\frac{s+t}{2}}h\left(e^{\frac{s+t}{2}}\right)\geq e^{\frac{s+t}{2}}\sqrt{f\left(e^{s}\right)g\left(e^{t}\right)}$$

וזו פשוט ההנחה שלנו.

מסקנה: אם $f,g:\mathbb{R}_{+}\to[0,\infty)$ מקיימות

$$f\left(x\right)g\left(y\right)\leq e^{-xy}$$

אז

$$\int_{\mathbb{R}^{+}}f\int_{\mathbb{R}^{+}}g\leq\frac{\pi}{2}$$

הוכחה:

ניקח $h\left(t\right)=e^{-\frac{1}{2}t^{2}}$, אז מתקיים

$$\forall s,t\geq0\qquad\sqrt{f\left(s\right)g\left(t\right)}\leq e^{-\frac{1}{2}st}=h\left(\sqrt{st}\right)$$

מא"ש פ"ל הכפלי,

$$\int_{\mathbb{R}^{+}}f\int_{\mathbb{R}^{+}}g\leq\left(\int_{\mathbb{R}^{+}}h\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi}\right)^{2}=\frac{\pi}{2}$$

זו כבר תכונה מאוד קרובה לא"ש סנטלו הפונקציונלי.

משפט: (א"ש סנטלו פונקציונלי)

יהיו $f,g:\mathbb{R}^{n}\to[0,\infty)$ עם

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^{n}\qquad f\left(x\right)g\left(y\right)\leq e^{-x\cdot y}$$

ונניח $\int_{\mathbb{R}^{n}}\vec{x}f\left(x\right)=0$ או $\int_{\mathbb{R}^{n}}\vec{x}g\left(x\right)=0$. אז

$$\int_{\mathbb{R}^{n}}f\int_{\mathbb{R}^{n}}g\leq\left(2\pi\right)^{n}$$

למה זה אותו משפט כמו קודם? אם $f=e^{-\psi}$ ו-$g=e^{-\psi^{*}}$, הן מקיימות את התנאי.

הוכחה עבור $n=1$:

נניח ש-f,g אינטגרביליות.

1. נניח שהחציון ב-0, כלומר $\int_{-\infty}^{0} f = \int_{0}^{\infty} f$. נשתמש במסקנה מקודם, ב-$\mathbb{R}^{+}$ וב-$\mathbb{R}^{-}$ בנפרד:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} f \int_{0}^{\infty} g &\leq \frac{\pi}{2} \\ \int_{-\infty}^{0} f \int_{-\infty}^{0} g &\leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

נחבר ונקבל

$$\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\right)\cdot\int_{0}^{\infty} g+\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\right)\cdot\int_{-\infty}^{0} g\leq\pi$$

2. עד כה הראינו שלכל $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ אינטגרבילית יש נקודה $m_f\in\mathbb{R}$ ("החציון") שלכל $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$

$$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f\left(x+m_f\right)g\left(y\right)\leq e^{-xy}\right)\implies\int_{\mathbb{R}} f\int_{\mathbb{R}} g\leq 2\pi$$

או באופן שקול

$$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f\left(x\right)g\left(y\right)\leq e^{-xy-m_f y}\right)\implies\int_{\mathbb{R}} f\int_{\mathbb{R}} g\leq 2\pi$$

נכניס את הגורם $e^{m_f y}$ ל-$g\left(y\right)$, ונקבל שזה אותו דבר כמו

$$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f\left(x\right)g\left(y\right)\leq e^{-xy}\right)\implies\int_{\mathbb{R}} f\int_{\mathbb{R}} g e^{m_f y}\leq 2\pi$$

נניח $\int_{\mathbb{R}} xg\left(x\right)=0$, אז

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(y\right)e^{m_f y}dy\geq\int_{\mathbb{R}} g\left(y\right)\left[1+m_f y\right]dy=\int_{\mathbb{R}} g\left(y\right)dy$$

כלומר הוספת גורם אקספוננציאלי רק מרע את המצב, ולכן גם

$$\int_{\mathbb{R}} f\int_{\mathbb{R}} g\leq 2\pi$$

עבור ההוכחה עם $n>1$, צריך להבין קצת יותר טוב את העבודה ש-f ו-f^* חיות במרחבים דואליים.

הגדרה: אם X מרחב לינארי מממד $\dim X = n$, המרחב הדואלי לו X^* הוא המרחב של הפונקציונלים הלינאריים $\ell : X \to \mathbb{R}$. מתקיים $\dim(X^*) = n$. יש צירוף בילינארי קנוני: אם $x \in X$ ו-$y \in X^*$ יש $y(x) \in \mathbb{R}$.

טרנספורם לז'נדר של $f : X \to \mathbb{R}$ הוא

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} [y(x) - f(x)]$$

כאשר $y \in X^*$.

הקשר להגדרה הרגילה הוא שמכפלה סקלארית מזהה בין מרחב למרחב הדואלי שלו, בעזרת ההתאמה $X \ni x \mapsto \langle x, \cdot \rangle \in X^*$. זה איזומורפיזם של מרחבים לינאריים.

מכפלה סקלארית ב-X משרה מכפלה סקלארית ב-X^*. מרחב לינארי עם מכפלה סקלארית הוא מרחב אוקלידי. אפשר לחשב אורכים, נפחים, זוויות, אינטגרלים, וכן הלאה.

תרגיל:

1. תהי $F : X \times X^* \to \mathbb{R}$. הראו שהאינטגרל

$$\int_{X \times X^*} F(x, y)\, dx dy$$

לא תלוי בבחירה של המכפלה הסקלארית.

2. אם ל-$f : X \to [0, \infty)$ יש אינטגרל חיובי, אז

$$\frac{1}{\int_X f} \int_X x f(x)\, dx$$

לא תלוי במכפלה הסקלארית.

נעבור כעת להוכיח את א"ש סנטלו באינדוקציה.

נניח $n = \dim X \geq 2$, ו-$f : X \to [0, \infty)$ ו-$g : X^* \to [0, \infty)$ אינטגרביליות ומקיימות

$$\forall x \in X, y \in X^* \qquad f(x)\, g(y) \leq e^{-y(x)}$$

נשים לב ש-$\int_X f \int_{X^*} g$ לא תלוי בבחירת המבנה האוקלידי, אז אפשר לבחור איזו מכפלה סקלארית שנרצה.

נניח גם ש-$\int_X \vec{x} f(x)\, dx = 0$.

1. יש על-מישור $H \subset X$ שעובר בראשית, וחצאי מרחבים H^+, H^- שנתמכים עליו, כך שמתקיים

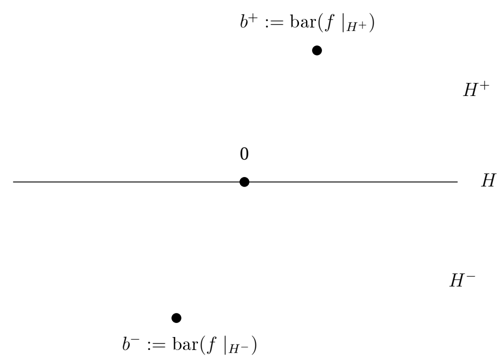
$$\int_{H^+} f = \int_{H^-} f = \frac{1}{2} \int_X f$$

כלומר פוקנציונל $y_0 \in X^*$, ואז

$$\begin{aligned} H &= \{x \in X : y_0(x) = 0\} \\ H^+ &= \{x \in X : y_0(x) > 0\} \\ H^- &= \{x \in X : y_0(x) < 0\} \end{aligned}$$

למה יש H כזה? נסתכל על אליפסה $C \subset X^*$ סביב הראשית, כל נקודה y_0 על שפת האליפסה קובעת את $\int_{H^+} f$ ואת $\int_{H^-} f$, והם מתהפכים כאשר y_0 עובר ל-$-y_0$. מערך הביניים, יש נקודה בה הם שווים.

2. נגדיר את ה-baricenter בשני חצאי המרחב:



נשים לב שמתקיים

$$0 = \mathrm{bar}(f) = \frac{1}{2} \cdot b^+ + \frac{1}{2} \cdot b^-$$

או $b^+ = -b^-$.

נבחר מכפלה סקלארית לפיה $b^+ \perp H$ ו-$|b^+| = 1$.

איך עושים זאת? נבחר בסיס $e_1, \ldots, e_{n-1}$ של H, ונכריז שהבסיס $e_1, \ldots, e_{n-1}, b$ הוא בסיס אורתונורמלי. נסמן $e_n = b$.

3. יש בסיס אורתונורמלי $e_1, \ldots, e_n \in X$, נניח $X = \mathbb{R}^n$. נשתמש בקורדינאטות

$$\mathbb{R}^n \ni x = (y, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^{n-1}}_{H} \times \mathbb{R}$$

ההנחות שלנו:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n-1}, s, t \in \mathbb{R} \qquad f(x,t)\, g(y,s) \leq e^{-(x \cdot y + ts)}$$

$$\forall i=1,\ldots,n{-}1 \qquad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_i f\left(y,t\right)dydt = 0 \qquad \left(\text{and for } \int_{-\infty}^\infty \text{ as well}\right)$$

המטרה:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(x,t\right)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(y,s\right) \le \left(2\pi\right)^n$$

נעשה בדיוק מה שעשינו בהוכחה של פ"ל: ניקח marginal.

הגדרה:

$$\begin{aligned}
F^+\left(x\right) &= \int_0^\infty f\left(x,t\right)dt\\
F^-\left(y\right) &= \int_{-\infty}^0 g\left(y,t\right)dt\\
G^+\left(x\right) &= \int_0^\infty f\left(x,t\right)dt\\
G^-\left(y\right) &= \int_{-\infty}^0 g\left(y,t\right)dt
\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F^+ = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F^- &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f\\
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G^+ + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G^- &= \int_{\mathbb{R}^n} g
\end{aligned}$$

וגם

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \vec{x}F\left(x\right)dx = 0$$

נקבע $x,y\in\mathbb{R}^{n-1}$. אז לכל $s,t>0$,

$$e^{x\cdot y} f\left(x,t\right)g\left(y,s\right) \le e^{-st}$$

מהמסקנה של פ"ל על $[0,\infty)$,

$$e^{x\cdot y}\int_0^\infty f\left(x,t\right)dt\int_0^\infty g\left(y,s\right)ds \le \frac{\pi}{2}$$

ולכן

$$F^+\left(x\right)G^+\left(y\right) \le \frac{\pi}{2}e^{-x\cdot y}$$

ובדומה

$$F^{-}(x)\,G^{-}(y)\leq\frac{\pi}{2}e^{-x\cdot y}$$

ה-baricenter של F^{+} הוא ב-0, ולכן נקבל מהנחת האינדוקמיה

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}F^{+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G^{+}\leq\frac{\pi}{2}\cdot(2\pi)^{n-1}$$

ובדומה

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}F^{-}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G^{-}\leq\frac{\pi}{2}\cdot(2\pi)^{n-1}$$

כמו במקרה החד-ממדי, מהשיוויון

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}F^{+}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n}}f$$

נקבל

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n}}f\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G^{+}+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n}}f\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G^{-}\leq2\cdot\frac{\pi}{2}(2\pi)^{n-1}$$

מש"ל.

איך מסיקים את א"ש סנטלו על קבוצות מהגרסא הפונקציונלית?

תהי $K\subset\mathbb{R}^{n}$ קבוצה קמורה וסימטרית $K=-K$. (הערה: $K^{0}=(\mathrm{conv}K)^{0}$ ולכן אין הגבלת כלליות בהנחה ש-K קמורה)

נגדיר

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\|x\|_{K}^{2}\\ f^{*}(x)&=\frac{1}{2}\|x\|_{K^{0}}^{2}\end{aligned}$$

אז א"ש סנטלו נותן

$$\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{-f}\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{-f^{*}}\leq(2\pi)^{n}$$

נקשר את זה לנפחים:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_K^2} &= \int_0^\infty \left|\left\{e^{\frac{1}{2}\|x\|_K^2} \geq t\right\}\right| dt \\
\left[t = e^{-s^2/2}\right] &= \int_0^\infty se^{-\frac{1}{2}s^2} \mathrm{Vol}_n\left(sK\right) ds \\
&= \mathrm{Vol}_n\left(K\right) \cdot \int_0^\infty s^{n+1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \\
\left[u = s^2/2\right] &= \mathrm{Vol}_n\left(K\right) \cdot \int_0^\infty \left(2u\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}u} du \\
&= 2^{n/2}\mathrm{Vol}_n\left(K\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)
\end{aligned}$$

כלומר א"ש סנטלו הפוקנציונלי נתן

$$|K| \cdot \left|K^0\right| \cdot 2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 \leq \left(2\pi\right)^n$$

כלומר

$$|K| \cdot \left|K^0\right| \leq \left(\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)^2 = \left|B_2^n\right|^2$$

בשיעור הבא נדבר על מידות לוג-קעורות ועל thin shell.

נאמר מה זו מידה לוג-קעורה.

יש פונקציות $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ קמורות, וראינו שמעניין להסתכל עליהן לפעים בתור e^{-f}. זו נקראת פונקציה לוג-קעורה (log-concave).

וקטור אקראי X ב-$\mathbb{R}^n$ הוא לוג-קעור אם קיים תת-מרחב אפיני $E \subset \mathbb{R}^n$, שמתקיים $\mathrm{Prob}\left[X \in E\right] = 1$ וצפיפות ההסתברות של X היא פוקנציה לוג-קעורה ב-E.

7 מידות לוג-קעורות, אי-שיוויון ברסקמפ-ליב (2/4/2014)

נדבר היום על מידות לוג-קעורות. נזכיר במה מדובר. זה יכולה להיות פונקציה, או מידה, או וקטור מקרי.

הגדרה:

וקטור מקרי X ב-$\mathbb{R}^n$ נקרא לוג-קעור אם יש תת-מרחב אפיני $E \subset \mathbb{R}^n$ ש-X נתמך בו, והצפיפות של X ב-E הוא פוקנציה לוג-קעורה. כלומר יש פונקציה $\rho : E \to [0, \infty)$ שמקיימת

$$\rho\left(\lambda x + \left(1-\lambda\right)y\right) \geq \rho\left(x\right)^\lambda \rho\left(y\right)^{1-\lambda}$$

ו-

$$\operatorname{Prob}\left[x \in A\right] = \int_{A \cap E} \rho\left(x\right) dx$$

הסיבה שמרשים תת-מרחבים היא כדי שהתנאי של לוג-קעירות יהיה סגור.

פונקציות לוג-קעורות ב-$\mathbb{R}^n$:

- אפשר לרשום $\rho = e^{-H}$ כאשר $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$ קמורה.

  (אם זו מידת גיבס של מערכת פיזיקלית, H יהיה ההמילטוניאן)
- מידת גאוס היא לוג-קעורה, כי $x \mapsto x^2$ פונקציה קמורה. גם התפלגות רב נורמלית (עם צפיפות $e^{-\langle Ax,x\rangle}$) היא לוג-קעורה.
- אם $K \subset \mathbb{R}^n$ קמורה, אז $\mathbf{1}_K$ פונקציה לוג-קעורה.

  (זו הסיבה שמרשים לפונקציות קמורות לקבל את הערך $+\infty$)

תכונות של פונקציות קמורות:

נניח $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ פונקציה קמורה. אז:

- הפונקציה H רציפה בפנים של $\{H < +\infty\}$ וליפשיץ מקומית. (תרגיל)
- אם a, b שתי נקודות על הגרף של H, המיתר $[a, b]$ נמצא מעל הגרף של H וההמשך של הישר (שתי הקרניים האינסופיות) נמצא מתחת לגרף של H.
- הגרף של H הוא מעל כל העל-מישורים המשיקים לו.
- אם H חלקה C^2, אז H קמורה אם ורק אם ההסיאן $\nabla^2 H$ מוגדר אי-שלילי. ההסיאן הוא המטריצה שמקיימת $\partial_{\theta\theta} H = \left(\nabla^2 H\right) \theta \cdot \theta$.

  (יש פה איזו נקודה עדינה, שהפונקציה מוגדרת בכל $\mathbb{R}^n$ ואנחנו קובעים אותה ל-$+\infty$ בנקודות שהיא לא מוגדרת. לפעמים מאפשרים תחום הגדרה לא קמור ואז מגוון הפונקציות מתרחב מאוד. אף פעם לא נעסוק במקרה הזה)

טענה: תהי $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ פונקציה אינטגרבילית ולוג-קעורה. אז קיימים $A, B > 0$ כך ש-$\rho\left(x\right) \le A e^{-B|x|}$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$.

סקיצה של הוכחה:

1. לכל $\varepsilon > 0$, הקבוצה $\{\rho > \varepsilon\}$ קמורה, ועם נפח סופי כי ρ אינטגרבילית. קבוצה קמורה ב-$\mathbb{R}^n$, אם היא ממימד מלא - היא חסומה. (תרגיל)
2. נזיז את הפונקציה כך ש-$\rho\left(0\right) > 0$, ניקח $\varepsilon = \frac{\rho(0)}{2}$, אז יש $R > 0$ כך ש-$\{\rho > \varepsilon\} \subset B\left(0, R\right)$, אז על השפה מתקיים $\rho\left(x\right) \le \frac{\rho(0)}{2}$. מלוג-קעירות

$$\frac{\rho\left(0\right)}{2} \ge \rho\left(\frac{R}{|x|}\right) \ge f\left(0\right)^{\lambda} f\left(x\right)^{1-\lambda}$$

כאשר $\lambda = 1 - \frac{R}{|x|}$. נקבל

$$\frac{1}{2}\rho\left(0\right)^{1-\lambda} \geq \rho\left(x\right)^{1-\lambda}$$

ולכן

$$\rho\left(x\right) \leq \rho\left(0\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = \rho\left(0\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = \rho\left(0\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|X|/R}$$

וזו דעיכה כמו שרצינו.

טענה: יהיה X, Y וקטורים לוג-קעורים ב"ת ב-$\mathbb{R}^n$. אז

1. אם $E \subset \mathbb{R}^n$ תת- מרחב ו-Proj_E ההטלה האורתוגונלית, אז $\mathrm{Proj}_E\left(X\right)$ לוג-קעור.
2. תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה לינארית/אפינית. אז $T\left(X\right)$ לוג-קעור.
3. הסכום $X + Y$ לוג-קעור.

הוכחה:

לשם הפשטות נניח ש-X ו-Y לא נתמכים על על-מישור (כל אחד בנפרד), כלומר יש להם צפיפות לוג-קעורה. יש מקרי קצה אבל לא נטפל בהם כאן.

1. נשתמש בקורדינאטות שמתאימות להיטל: נרשום $\mathbb{R}^n \ni x = (y, z) \in E \times E^{\perp}$. כלומר אם $x \in \mathbb{R}^n$, אז $\mathrm{Proj}_E\left(x\right) = \mathrm{Proj}_E\left(y, z\right) = y$. אם הצפיפות של X היא ρ, הצפיפות של ההיטל היא

$$\tilde{\rho}\left(y\right) = \int_{E^{\perp}} \rho\left(y, z\right) dz$$

נוכיח ש-$\tilde{\rho}$ לוג-קעורה. נבחר $y_1, y_2 \in E$, $0 < \lambda < 1$. אנחנו רוצים להראות

$$\tilde{\rho}\left(\lambda y_1 + \left(1 - \lambda\right) y_2\right) \geq \tilde{\rho}\left(y_1\right)^{\lambda} \tilde{\rho}\left(y_2\right)^{1-\lambda}$$

כלומר

$$\int_{E^{\perp}} \rho\left(\lambda y_1 + \left(1 - \lambda\right) y_2, z\right) dz \geq \left(\int_{E^{\perp}} \rho\left(y_1, z\right) dz\right)^{\lambda} \left(\int_{E^{\perp}} \rho\left(y_2, z\right) dz\right)^{1-\lambda}$$

כדי להשתמש בפרקופה-לינדלר, צריך להראות שלכל $z_1, z_2 \in E^{\perp}$,

$$\rho\left(\lambda y_1 + \left(1 - \lambda\right) y_2, \lambda z_1 + \left(1 - \lambda\right) z_2\right) dz \geq \rho\left(y_1, z\right)^{\lambda} \rho\left(y_2, z\right)^{1-\lambda}$$

וזו בדיוק הלוג-קעירות של ρ.

(הערה היסטורית: ברון-מינקובסקי התגלה בניסוח הזה, ברון גילה שאם מטילים פונקציה אופיינית של גוף קמור לממד נמוך יותר, מקבלים פונקציה לוג-קעורה)

2. כל העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ אפשר לרשום $T=\mathrm{Proj}_E\circ S$ כאפשר $E\subset\mathbb{R}^n$ תת-מרחב ממימד $\dim E=\mathrm{rank}\,(T)$, ו-$S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית הפיכה. מספיק להראות ש-$S\left(X\right)$ לוג-קעור.

מה הצפיפות של $S\left(X\right)$?

$$\rho_{S(X)}\left(y\right)=\rho_X\left(S^{-1}y\right)\cdot\det{}^{-1}\left(S\right)$$

שינוי משתנים לינארי והכפלה בקבוע שומרים על קמירות.

3. נשים לב ש-$\left(X,Y\right)$ הוא וקטור מקרי לוג-קעור ב-$\mathbb{R}^{2n}$, שהרי הצפיפות שלו היא

$$\rho\left(s,t\right)=\rho_X\left(s\right)\rho_Y\left(t\right)$$

- מכפלה נקודתית של פונקציות לוג-קעורות היא לוג-קעורה.
- גם מינימום נקודתי.

נפעיל את ההטלה $T\left(x,y\right)=x+y$ ונקבל שהקונבולוציה גם כן לוג-קעורה.

נעשה הגדרה אחרת של לוג-קעירות. זה יהיה בשפה של מידות. נזכיר שיש התאמה בין משתנים מקריים למידות:

$$X\;r.v\longleftrightarrow\mu\left(A\right)=\mathrm{Prob}\left[X\in A\right]$$

הגדרה: מידה μ על $\mathbb{R}^n$ היא לוג-קעורה אם לכל זוג קבוצות בורל $A,B\subset\mathbb{R}^n$ ו-$0<\lambda<1$,

$$\mu\left(\lambda A+\left(1-\lambda\right)B\right)\geq\mu\left(A\right)^{\lambda}\mu\left(B\right)^{1-\lambda}$$

תרגיל: הוכיחו שאם ל-μ יש צפיפות ב-$\mathbb{R}^n$, אז ההגדרות שקולות.

נדבר על קשרים בין לוג-קעירות למשפט הגבול המרכזי.

נזכיר שכדי לקבל היטלים גאוסיים של משתנה מקרי, מספיק להראות שחלק גדול מהמאסה שלהם מרוכז סביב ספירה. נראה שבהנחת לוג-קעירות אפשר לקבל תכונות כאלה של קליפה דקה.

נתחיל מטענה:

תהי $f:\mathbb{R}_+\to[0,\infty)$ פונקציה לוג-קעורה ואינטגרבילית (למשל צפיפות של משתנה מקרי). נגדיר את פונקצית המומנטים שלה עבור $p\geq0$:

$$M_f\left(p\right)=\frac{1}{\Gamma\left(p+1\right)}\int_0^{\infty}t^pf\left(t\right)dt$$

אז M_f פונקציה לוג-קעורה על $[0,\infty)$.

הערות:

- אם לא היה הגורם $\frac{1}{\Gamma(p+1)}$, הפוקנציה היתה לוג-קמורה, מא"ש קושי-שוורץ:

$$\int_0^\infty t^{\frac{p+q}{2}} f\left(t\right) dt \leq \sqrt{\int_0^\infty t^p f\left(t\right) dt \cdot \int_0^\infty t^q f\left(t\right) dt}$$

- יש דרך כללית להסיק שאינטגרל הוא לוג-קעור: אם האינטגרנד הוא לוג קעור. הפונקציה $(t,p) \mapsto \frac{t^p f(t)}{\Gamma(p+1)}$ היא לא בהכרח לוג-קעורה.
תרגיל: הוכיחו שהפונקציה

$$\tilde{M}_f\left(p\right) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{p}\right)^p f\left(t\right) dt$$

לוג-קעורה.

- הדוגמא הקיצונית של פונקציה לוג-קעורה היא אקספוננציאלית. אם ניקח $f\left(t\right) = Ae^{-Bt}$, נקבל

$$M_f\left(p\right) = \frac{A}{\Gamma\left(p+1\right)} \int_0^\infty t^p e^{-Bt} dt = \frac{AB^{-(p+1)}}{\Gamma\left(p+1\right)} \int_0^\infty t^p e^{-t} dt = AB^{-(p+1)}$$

זו פונקציה אקספוננציאלית ב-p אז היא לוג-קעורה.

הוכחה:

נקבע $p < q$ ב-$(0,\infty)$. צריך להראות

$$M_f\left(\frac{p+q}{2}\right) \geq \sqrt{M_f\left(p\right) M_f\left(q\right)}$$

(טכנית צריך להראות לכל $0 < \lambda < 1$, אפשר או לעשות את ההוכחה עם עוד פרמטר, או שאפשר לטעון מרציפות של M_f)

נשווה את f לפונקציה אקספוננציאלית. נמצא $A, B > 0$ כך שהפונקציה $g\left(t\right) = Ae^{-Bt}$ מקיימת

$$\begin{aligned} M_f\left(p\right) &= M_g\left(p\right) = AB^{-(p+1)} \\ M_f\left(q\right) &= M_g\left(q\right) = AB^{-(q+1)} \end{aligned}$$

(אלה פשוט משוואות לינאריות על $\log A, \log B$)

נראה שהפונקציות f ו-g נחתכות ב-2 נקודות לפחות.

- לא יתכן ש-$g > f$ תמיד או ש-$f > g$ תמיד, שהרי

$$\int_0^\infty t^p f\left(t\right) dt = \int_0^\infty t^p g\left(t\right) dt$$

- לא יתכן שיש $x_0 \in (0,\infty)$ כך ש-$(t-x_0)(f(t)-g(t))$ חיובי לכל t או שלילי לכל t.

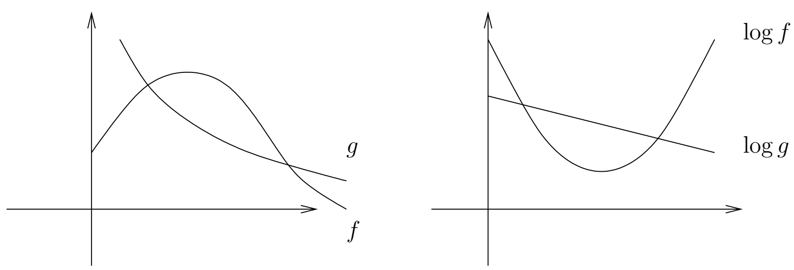
אם מתקיים למשל $g(t) \geq f(t)$ ל-$t < x_0$ ו-$g(t) < f(t)$ ל-$t > x_0$, נגדיר

$$k(x) = \int_x^\infty t^p f(t)\,dt - \int_x^\infty t^p g(t)\,dt$$

זה מקיים $k'(x) = x^p(g(x) - f(x))$, וזה מתחיל שלילי ואחר כך חיובי. כלומר k יורדת ב-$[0,x_0]$ ועולה ב-$[x_0,\infty)$. מתקיים $k(0) = 0$ ו-$k(\infty) = 0$, ולכן $k(x) \leq 0$ לכל $x \in (0,\infty)$, ומתישהו יש אי-שיוויון. נשתמש בתכונה $M_f(p) = M_g(p)$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{q-p}\left(t^p f(t)\right)dt \quad &\underset{by\,parts}{=} \quad (q-p)\int_0^\infty x^{q-p-1}\left(\int_x^\infty t^p f(t)\,dt\right)dx \\ &< \quad (q-p)\int_0^\infty x^{q-p-1}\left(\int_x^\infty t^p g(t)\,dt\right)dx = \int_0^\infty t^q g(t)\,dt\end{aligned}$$

עבור $x > 0$ מסוים, כלומר $M_f(q) < M_g(q)$, וזו סתירה.



איור 13: היחסים בין הפונקציות f ו-g

הפונקציה $\log g - \log f$ היא פונקציה קמורה. לכן היא מתאפסת בשתי נקודות, או על קטע, או על קרן. כלומר יש $a,b \in (0,\infty)$ כך שלכל $x \in [a,b]$, $g(x) \leq f(x)$, ולכל $x \notin [a,b]$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$.

צריך להראות

$$M_f\left(\frac{p+q}{2}\right) \geq \sqrt{M_f(p)\,M_f(q)}$$

צד ימין של זה הוא בדיוק $\sqrt{M_g(p)\,M_g(q)} = M_g\left(\frac{p+q}{2}\right)$. כלומר צריך להראות

$$M_f\left(\frac{p+q}{2}\right) \geq M_g\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

ממה שאמרנו קודם, לכל $x\in(0,\infty)$, ולכל $r>0$,

$$\left(x^{r}-a^{r}\right)\left(x^{r}-b^{r}\right)x^{p}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\leq0$$

נציב $r=\frac{q-p}{2}$ ונעשה אינטגרל

$$\begin{aligned}0 & \geq \int_{0}^{\infty}\left(x^{r}-a^{r}\right)\left(x^{r}-b^{r}\right)x^{p}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\\ & = \int_{0}^{\infty}x^{q}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)-\left(a^{r}+b^{r}\right)\int_{0}^{\infty}x^{\frac{p+q}{2}}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)+a^{r}b^{r}\int_{0}^{\infty}x^{p}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

הגורם הראשון והשלישי נבנו כך שיתאפסו, וממה שנותר מקבלים $M_{f}\left(\frac{p+q}{2}\right)\geq M_{g}\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

נראה שימושים של המשפט הקודם.

נניח ש-X מ"מ ממשי, אי-שלילי ולוג-קעור.

א"ש הולדר נותן למשל $\mathbb{E}X^{4}\geq\left(\mathbb{E}X^{2}\right)^{2}$. אנחנו הוכחנו

$$\frac{\mathbb{E}X^{2}}{2!}\geq\sqrt{\frac{\mathbb{E}X^{4}}{4!}\cdot\frac{\mathbb{E}X^{0}}{0!}}$$

כלומר $\mathbb{E}X^{4}\leq6\left(\mathbb{E}X^{2}\right)^{2}$. זה א"ש בכיוון הפוך.

(גם פרקופה-לינדלר נתן הולדר הפוך, אבל זה הדוק, ולראיה אפשר להסתכל על משתנים מקריים שמתפלגים אקספוננציאלית)

מסקנה: נניח ש-X וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^{n}$, לוג-קעור ובעל סימטריה רדיאלית. (כלומר הצפיפות של X היא פונקציה של $\left|X\right|$). נסמן $\sigma=\mathbb{E}\left|X\right|$. אז $\mathbb{E}\left(\frac{\left|X\right|}{\sigma}-1\right)^{2}\leq\frac{1}{n}$.

הוכחה:

נסמן $\rho\left(x\right)=\rho\left(\left|x\right|\right)$. הצפיפות של $\left|X\right|$ היא הנגזרת של

$$\mathbb{P}\left(\left|X\right|\leq t\right)=\int_{tB^{n}}\rho\left(x\right)dx=n\kappa_{n}\int_{0}^{t}s^{n-1}\rho\left(s\right)ds$$

ולכן הצפיפות של $\left|X\right|$ היא $n\kappa_{n}t^{n-1}\rho\left(t\right)$. מהלמה קודם נקבל

$$M_{\rho}\left(n\right)\geq\sqrt{M_{\rho}\left(n-1\right)M_{\rho}\left(n+1\right)}$$

כלומר

$$\frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty}t^{n}\rho\left(t\right)\geq\sqrt{\frac{\int_{0}^{\infty}t^{n-1}\rho\left(t\right)}{\left(n-1\right)!}\cdot\frac{\int_{0}^{\infty}t^{n+1}\rho\left(t\right)}{\left(n+1\right)!}}$$

נשים לב ש-

$$\mathbb{E}\left|X\right|^{\alpha}=n\kappa_{n}\int_{0}^{\infty}t^{n-1+\alpha}\rho\left(t\right)dt$$

ולכן אפשר להכפיל את הא"ש ב-$n\kappa_n$ ולקבל את השקול

$$\frac{1}{n!}\mathbb{E}\left|X\right|\geq\sqrt{\frac{\mathbb{E}\left|X\right|^{2}}{\left(n-1\right)!\left(n+1\right)!}}$$

או

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\mathbb{E}\left|X\right|\right)^{2}\geq\mathbb{E}\left|X\right|^{2}$$

או

$$\mathbb{E}\left(\frac{\left|X\right|}{\sigma}-1\right)^{2}=\frac{\mathbb{E}\left(\left|X\right|^{2}\right)}{\left(\mathbb{E}\left|X\right|\right)^{2}}-2\frac{\mathbb{E}\left|X\right|}{\mathbb{E}\left|X\right|}+1\leq\frac{1}{n}$$

מש"ל.

אם X איזוטרופי, אז $\mathbb{E}\left|X\right|^{2}=n$, ואם הוא בעל סימטריה סיבובית ולוג-קעור, נקבל שרוחב הקליפה הוא $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

נעשה קשר נוסף בין קמירות לריכוז, סוג של א"ש פואנקרה.

משפט: (ברלסקמפ-ליב)

נניח μ מידת הסתברות לוג-קעורה ב-$\mathbb{R}^n$. נניח $\frac{d\mu}{dx}=e^{-\psi}$ עם $\psi:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ פונקציה קמורה, חלקה C^{∞}, עם $\nabla^{2}\psi\left(x\right)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}^{n}$.

אזי לכל פונקציה $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\cap L^{2}\left(\mu\right)$,

$$\mathrm{Var}_{\mu}\left(f\right)\leq\int_{\mathbb{R}^{n}}\left[\left(\nabla^{2}\psi\right)^{-1}\nabla f\cdot\nabla f\right]d\mu$$

ככל שהפונקציה יותר קמורה, כך ההסיאן יותר גדול, והא"ש יותר חזק. למשל נראה מאוחר יותר שעבור $f\left(x\right)=x^{2}$ מקבלים קליפה דקה.

נוכיח היום עד-כדי טענה על מד"ח אליפטיות.

הוכחה:

נשתמש ברעיונות שקשורים לעקמומיות Ricci, ונוסחת Bochner. זו תהיה הוכחה מאוד אנליטית.

נסמן ב-$\mathcal{S}$ את אוסף פונקציות C^∞ עם תומך קומפקטי ב-$\mathbb{R}^n$. יש את אופרטורי הנגזרת החלקית $\partial_i:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$. הצמוד (+נגדי) לזה הוא אופרטור $\partial_i^*:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ שיקיים

$$\forall u,v\in\mathcal{S}\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(\partial_i u)\,v d\mu=-\int_{\mathbb{R}^n}u\left(\partial_i^* v\right)d\mu$$

איך נמצא אותו? מאינטגרציה בחלקים

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_i u)\,ve^{-\psi}=-\int_{\mathbb{R}^n}u\left[\partial_i v\cdot e^{-\psi}-v\cdot\partial_i\psi\cdot e^{-\psi}\right]=-\int_{\mathbb{R}^n}u\left[\partial_i v-(\partial_i\psi)\,v\right]d\mu$$

כלומר סביר להגדיר

$$\partial_i^* u=\partial_i u-(\partial_i\psi)\,u$$

לאופרטור

$$Lu=\sum_{i=1}^n\partial_i^*\left(\partial_i u\right)$$

קוראים אופרטור לפלס על המידה μ ב-$\mathbb{R}^n$.

למה זה אופרטור טוב? לכל $u,v\in\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(Lu)\,v d\mu &= \sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\partial_i^*\left(\partial_i u\right)v d\mu\\ &= -\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\left(\partial_i u\cdot\partial_i v\right)d\mu=-\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla u,\nabla v\rangle\,d\mu\end{aligned}$$

נראה מה יחסי הקומוטציה:

$$\begin{aligned}\partial_i\partial_k^* u &= \partial_i\left(\partial_k u-(\partial_k\psi)\,u\right)\\ &= \partial_k\left(\partial_i u\right)-\left(\partial_{ik}\psi\right)u-(\partial_k\psi)\left(\partial_i u\right)\\ &= \partial_k^*\left(\partial_i u\right)-\left(\partial_{ik}\psi\right)u\end{aligned}$$

ובנוסף

$$\begin{aligned}\partial_i\left(Lu\right) &= \sum_{k=1}^n\partial_i\left(\partial_k^*\partial_k u\right)\\ &= \sum_{k=1}^n\left[\partial_k^*\left(\partial_i\partial_k u\right)-\left(\partial_{ik}\psi\right)\left(\partial_k u\right)\right]\\ &= L\left(\partial_i u\right)-\sum_{k=1}^n\partial_{ik}\psi\cdot\partial_k u\end{aligned}$$

זה מזכיר את נוסחת בוכנר מגיאומטריה רימנית (אחרי אינטגרל). נוכיח במקרה שלנו

$$\forall u\in\mathcal{S}\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(Lu)^2\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)\nabla u\cdot\nabla u d\mu+\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla\partial_i u\right|^2d\mu$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(Lu)^2\,d\mu &= -\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\nabla\left(Lu\right),\nabla u\right\rangle d\mu\\ &= -\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\partial_i\left(Lu\right),\partial_i u\right\rangle d\mu\\ &= -\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}L\left(\partial_i u\right)\partial_i u d\mu+\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,k=1}^n\partial_{ik}\psi\partial_k u\partial_i u d\mu\\ &= \sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla\partial_i u\cdot\nabla\partial_i u\right)d\mu+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)\nabla u\cdot\nabla u d\mu\end{aligned}$$

א"ש שנובע מנוסחת בוכנר:

$$\forall u\in\mathcal{S}\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(Lu)^2\,d\mu\geq\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)\nabla u\cdot\nabla u d\mu$$

מהתורה של מד"ח אליפטיות נובעת

למה: אוסף הפונקציות $\{Lu:u\in\mathcal{S}\}$ צפוף ב-$H=\left\{f\in L^2\left(\mu\right):\int fd\mu=0\right\}$ בנורמת $L^2\left(\mu\right)$.

נוכיח את הלמה הזו בשיעור הבא כנראה.

הוכחת א"ש ברלסקמפ-ליב:

אפשר לחסר קבוע מ-f, ולהניח ש-$\int_{\mathbb{R}^n}fd\mu=0$.

יהי $\varepsilon>0$. מהלמה, קיימת $u\in\mathcal{S}$ עם $\|Lu-f\|_{L^2(\mu)}<\varepsilon$.

רוצים לחסום את $\mathrm{Var}_\mu\left(f\right)=\int f^2d\mu$. נחשב:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}f^2d\mu &= \|Lu-f\|_{L^2(\mu)}^2+2\int_{\mathbb{R}^n}\left(Lu\right)fd\mu-\int_{\mathbb{R}^n}(Lu)^2\,d\mu\\ &< \varepsilon^2-2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla u\cdot\nabla f\right)d\mu-\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)\nabla u\cdot\nabla u d\mu\end{aligned}$$

(עשינו פה אינטגרציה בחלקים עם $f\notin\mathcal{S}$, אבל זה מותר כי $f\in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$)

נשתמש בנוסחא מאלגברה לינארית, שאם $x,y\in\mathbb{R}^n$ ו-$A>0$ אז $-2x\cdot y-Ax\cdot x\leq A y\cdot y$. הוכחה לנוסחא הזו: מאי-שיוויון קושי שוורץ ומהאי-שיוויון האריתמטי-גאומטרי יוצא

$$x\cdot y=A^{1/2}x\cdot A^{-1/2}y\leq\left(Ax\cdot x\right)^{1/2}\left(A^{-1}y\cdot y\right)^{1/2}\leq\frac{1}{2}Ax\cdot x+A^{-1}y\cdot y$$

ולכן

$$-2x\cdot y-Ax\cdot x=2\left(-x\cdot y\right)-A\left(-x\right)\cdot\left(-x\right)\leq A^{-1}y\cdot y$$

נקבל שלכל $\varepsilon>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}f^2d\mu<\varepsilon^2+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)^{-1}\nabla f\cdot\nabla fd\mu$$

מש"ל.

8 המשך ברסקמפ-ליב, אי-שיויוני פואנקרה (23/4/2014)

לפני החופש דיברנו על אי-שיוויון ברסקמפ-ליב: תהי μ מידה על $\mathbb{R}^n$, $\frac{d\mu}{dx}=e^{-\psi}$ כאשר $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ חלקה C^∞, קמורה במובן החזק

$$\forall x.\qquad\nabla^2\psi\left(x\right)>0$$

אז לכל פונקציה $f\in L^2\left(\mu\right)$ שהיא חלקה C^1,

$$\mathrm{Var}_\mu\left(f\right)\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)^{-1}\nabla f\cdot\nabla fd\mu$$

כאשר

$$\mathrm{Var}_\mu\left(f\right)=\int f^2d\mu-\left(\int fd\mu\right)^2$$

לפני פסח הוכחנו את זה עד-כדי למה אחת, בעזרת אנליזה של ה"לפלסיאן" שקשור למידה μ (associated laplacian).

נזכיר: האופרטור מוגדר על $\mathcal{S}=C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ לפי

$$Lu=\sum_{i=1}^n\partial_i^*\partial_iu=\Delta u-\nabla u\cdot\nabla\psi$$

לאופרטור הזה יש תכונה שמאפשרת אינטגרציה בחלקים: אם $u \in \mathcal{S}$ ו-$v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(Lv)\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \cdot \nabla v)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} v(Lu)\, d\mu$$

ובפרט $\int Lud\mu = 0$ לכל $u \in \mathcal{S}$.

הרעיון של ההוכחה היה כלהלן. רושמים את נוסחת בוכנר

$$\forall u \in \mathcal{S}. \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (Lu)^2\, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla^2 \psi\right) \nabla u \cdot \nabla u d\mu$$

ועוברים לדואלי ומקבלים את א"ש ברסקמפ-ליב.

אבל לא כל פונקציה היא לפלסיאן של משהו. לכן השתמשנו בלמה: אם

$$H = \left\{ f \in L^2(\mu) : \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0 \right\}$$

אז $\{Lu : u \in \mathcal{S}\}$ היא צפופה ב-H במטריקה $L^2(\mu)$.

במהלך ההוכחה נשתמש במשפט שלא נוכיח, זו תהיה הפעם היחידה בקורס שנעשה ככה.

נדבר על רגולריות אליפטית.

במרוכבות מוכיחים שאם $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ היא חלקה C^1 ו-

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv 0$$

אז $f \in C^{\infty}$.

יש משפט דומה על פונקציות הרמוניות. אם $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ הוא חלקה C^2 ו-

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv 0$$

אז $f \in C^{\infty}$.

אנחנו נצטרך לדעת את המקביל של "$Lu = 0 \implies u \in C^{\infty}$".

נגדיר אופרטורים אליפטיים, שהם משפחה של אופרטורים שיש להם את התכונה הזו.

הגדרה: נניח ש-$u \in S$ ו-T הוא אופרטור מהצורה

$$Tu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \partial^{ij} u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, \partial^i u(x) + c(x)\, u(x)$$

והמקדמים a_{ij}, b_i, c חלקים C^∞. אומרים ש-T אופרטור אליפטי אם לכל $x \in \mathbb{R}^n$, המטריצה

$$A = \left[a_{ij}\left(x\right)\right]_{i,j=1}^{n}$$

היא סימטרית ומוגדרת חיובית.

למה אם אופרטור אליפטי מתאפס על פונקציה היא בהכרח חלקה?

נסתכל בלפלסיאן. הערך $\Delta u\left(x\right) - u\left(x\right)$ הוא בערך הממוצע של u בכדור קטן סביב x:

$$\frac{1}{\left|B\left(x,\varepsilon\right)\right|}\int_{B\left(x,\varepsilon\right)} u = u\left(x\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u\left(x\right) + \ldots$$

עבור אופרטור אליפטי אחר T, הערך $Tu\left(x\right) + \tilde{c}\left(x\right)u\left(x\right)$ הוא בערך הממוצע של u על אליפסואיד קטן (שהמרכז שלו ליד x אבל לא בדיוק שם)

אם $Tu \equiv 0$ זה אומר ש-u שווה לממוצע שלה. אבל זה הרבה יותר חלק, למשל אפשר ליצור בעזרת קירוב כזה קונבולוציה עם פונקציה C^∞.

דוגמא נגדית למשפט שעוד לא ניסחנו: אם $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז

$$Lu = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

ואם $u\left(x,y\right) = u\left(x\right)$ הוא ב-$C^2 \backslash C^3$ אז $Lu \equiv 0$.

נמצא נוסחה לאופרטור הצמוד, שמקיים

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(Tu\right)v = \int_{\mathbb{R}^n} u\left(T^* v\right)$$

זה פשוט

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(Tu\right)v &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial^i u + cu\right)v \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\partial^i u\partial^j\left(a_{ij}v\right) - \sum_{i=1}^{n} u\partial^i\left(b_i v\right) + cuv\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} u\partial^{ij}\left(a_{ij}v\right) - \sum_{i=1}^{n} b_i u\partial^i v - \operatorname{div}\left(b\right)uv + cuv\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u\partial^{ij}v + \left[1^{st}\, order + 0^{th}\, order\, in\, v\right]\right)
\end{aligned}$$

ולכן האופרטור T^* (שלא רשמנו נוסחא מפורשת לגמרי שלו, אבל אפשר היה) גם הוא אליפטי.

נדבר על פתרונות חלשים (weak solutions)

ברור שאפשר להגדיר את Tu, T^*u על כל פונקציה C^∞, ולא רק כאלה עם תומך קומפקטי.

יתר על כן, לכל $f \in C^\infty$ ו-$u \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)\, u = \int_{\mathbb{R}^n} fT^*u$$

לכן לכל $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$Tf \equiv 0 \implies f \perp \{T^*u : u \in \mathcal{S}\}$$

וגם להיפך: אם $f \perp \{T^*u : u \in \mathcal{S}\}$ אז $\int (Tf)\, u = 0$ לכל $u \in \mathcal{S}$, ולכן $Tf \equiv 0$.

כלומר לכל $f \in C^\infty$,

$$Tf \equiv 0 \iff f \perp \{T^*u : u \in \mathcal{S}\}$$

הגדרה: (פתרון חלש)

תהי $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, כלומר $f \cdot \mathbf{1}_K$ אינטגרבילית לכל קבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{R}^n$. נאמר ש-$Tf \equiv 0$ חלש אם

$$\forall u \in \mathcal{S} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} fT^*u = 0$$

משפט הרגולריות האליפטית: כל פתרון חלש של $Tf \equiv 0$ הוא חלק C^∞.

איך מוכיחים את המשפט הזה? עושים את הנגזרות החלקיות ואינטגרציה בחלקים בעזרת תורת הדיסטריבוציות, מגדירים את גרעין החום ומוצאים פונקציית גרין שלו, ואז מוכיחים ש-f היא הקונבולוציה של עצמה עם פונקצית גרין הזו (בעזרת תכונת הממוצעים), וזה C^∞. זה דומה, למשל, למשפט ליוביל על פונקציות הרמוניות.

לא נוכיח את המשפט הזה פה, ויש עוד כל מיני הוכחות, בעזרת מרחבי סובולב, אופרטורים פסאודו-דיפרנציאליים, ועוד. יש גם עידון, שאם המקדמים a_{ij}, b_i, c הם אנליטיים (C^ω, כלומר מוגדרים בכל המרחב בעזרת טור חזקות), אז גם הפתרונות החלשים הם כאלה.

את כל התאוריה הזו אפשר לנסח מחדש ביחס לכל מידה חלקה, לא רק מידת לבג.

במקרה שלנו,

$$\begin{aligned} Lu &= \Delta u - \nabla\psi \cdot \nabla u \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} &= e^{-\psi(x)} dx \\ L^* &= L \end{aligned}$$

זה אליפטי, כי

$$A(x)=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

מסקנה: נניח $f\in L^{2}(\mu)$ ו-$\int f(Lu)\,d\mu=0$, אז f חלקה C^{∞}.

נחזור ללמה: נסמן $H=\left\{ f\in L^{2}(\mu):\int f=0\right\}$ אז $\{Lu:u\in\mathcal{S}\}$ צפופה ב-H במ-טריקת $L^{2}(\mu)$.

הערה: לאופרטור אליפטי כללי, אפשר להראות שיש גרעין ממימד סופי.

הוכחה: נניח $\{Lu:u\in\mathcal{S}\}\perp f$. צריך להראות ש-$f\notin H$. בעצם נראה ש-$f$ פוקנציה קבועה.

כעת, לכל $u\in\mathcal{S}$ מתקיים

$$\int(Lf)\,ud\mu=\int f(Lu)\,d\mu=0$$

ולכן $Lf=0$. מרגולריות אליפטית, $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$.

עבור f^{2} מקבלים

$$\begin{aligned}L\left(f^{2}\right) & = \Delta\left(f^{2}\right)-\nabla\left(f^{2}\right)\cdot\nabla\psi\\
 & = 2\mathrm{div}\left(f\nabla f\right)-2f\nabla f\cdot\nabla\psi\\
 & = 2\left|\nabla f\right|^{2}+2f\Delta f-2f\nabla f\cdot\nabla\psi\\
 & = 2\left|\nabla f\right|^{2}+2fLf=2\left|\nabla f\right|^{2}\end{aligned}$$

לכל $\theta\in\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n}}\left|\nabla(\theta f)\right|^{2}d\mu & = \int_{\mathbb{R}^{n}}\left|f\nabla\theta+\theta\nabla f\right|^{2}d\mu\\
 & = \int\left(f^{2}\left|\nabla\theta\right|^{2}+2\left(f\theta\right)\nabla f\cdot\nabla\theta+\theta^{2}\left|\nabla f\right|^{2}\right)d\mu\\
 & = \int\left(f^{2}\left|\nabla\theta\right|^{2}+\frac{1}{2}\nabla\left(f^{2}\right)\cdot\nabla\left(\theta\right)^{2}+\theta^{2}\left|\nabla f\right|^{2}\right)d\mu\\
 & = \int\left(f^{2}\left|\nabla\theta\right|^{2}-\frac{1}{2}L\left(f\right)^{2}\theta^{2}+\theta^{2}\left|\nabla f\right|^{2}\right)d\mu\\
 & = \int f^{2}\left|\nabla\theta\right|^{2}d\mu\end{aligned}$$

ולכן לכל $\theta \in \mathcal{S}$,

$$\int \left|\nabla\left(\theta f\right)\right|^{2}d\mu=\int\left|\nabla\theta\right|^{2}f^{2}d\mu$$

ניקח

$$\theta\left(x\right)=\begin{cases}1 & \left|x\right|\le1\\ smooth & 1\le\left|x\right|\le2\\ 0 & \left|x\right|\ge2\end{cases}$$

נסמן

$$C=\sup_{x\in\mathbb{R}^{n}}\left|\nabla\theta\left(x\right)\right|$$

נגדיר

$$\theta_{k}\left(x\right)=\theta\left(x/k\right)$$

אז

$$\left|\nabla\theta_{k}\left(x\right)\right|=\frac{1}{k}\left|\nabla\theta\left(x/k\right)\right|\le\frac{C}{k}$$

אז נחשב

$$\int_{B(0,k)}\left|\nabla f\right|^{2}d\mu\le\int_{\mathbb{R}^{n}}\left|\nabla\left(\theta_{k}f\right)\right|^{2}=\int_{\mathbb{R}^{n}}\left|\nabla\theta_{k}\right|^{2}f^{2}d\mu\le\frac{C^{2}}{k^{2}}\int_{\mathbb{R}^{n}}fd\mu=\frac{C^{2}}{k^{2}}\left\Vert f\right\Vert _{L^{2}(\mu)}^{2}$$

לכל $k_0>0$ ו-$k>k_0$,

$$\int_{B(0,k_{0})}\left|\nabla f\right|^{2}d\mu\le\int_{B(0,k)}\left|\nabla f\right|^{2}\le\frac{C^{2}}{k^{2}}\left\Vert f\right\Vert _{L^{2}(\mu)}^{2}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן $\nabla f\equiv0$ בכל $\mathbb{R}^n$, ו-f קבועה.

הוכחנו שאין פונקציות "L-הרמוניות" ב-$L^2\left(\mu\right)$ פרט לקבועות.

גמרנו עם האנליזה, נעבור לראות יישומים של ברסקמפ-ליב.

תזכורת: זה אומר

$$\mathrm{Var}_{\mu}\left(f\right)\le\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(\nabla^{2}\psi\right)^{-1}\nabla f\cdot\nabla fd\mu$$

עוד תזכורת: לוקטור מקרי איזוטרופי X ב-$\mathbb{R}^n$, אומרים שיש לו "קליפה דקה בגודל ε" אם

$$\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}}-1\right)^2\leq\varepsilon^2$$

היו לנו מעט דוגמאות של X עם תכונת קליפה דקה חזקה:

- רכיבים בלתי-תלויים $X=(X_1,\ldots,X_n)$
- המידה האחידה על $\sqrt{n}S^{n-1}$
- אם ל-X יש צפיפות רדיאלית לוג-קעורה, ו-$\mathbb{E}\left|X\right|^2=n$, אז

  $$\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}}-1\right)^2\leq\frac{C}{n}$$

  כאשר C קבוע חיובי
- קבוצות קמורות במידה אחידה. (לא עשינו ממש)

נעבור ליישום הראשון של ברסקמפ-ליב.

משפט: תהי μ מידת הסתברות על $\mathbb{R}^n$, עם צפיפות $e^{-\psi}$, כאשר ψ חלקה ויש $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$, $\nabla\psi\left(x\right)\geq\delta\mathrm{Id}$. אז לכל $f\in C^1\cap L^2\left(\mu\right)$,

$$\mathrm{Var}_{\mu}\left(f\right)\leq\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla f\right|^2d\mu$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2\psi\right)^{-1} &\leq \frac{1}{\delta}\mathrm{Id},\\ \mathrm{Var}_{\mu(f)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^2\psi\right)^{-1}\nabla f\cdot\nabla fd\mu\leq\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla f\right|^2d\mu\end{aligned}$$

הא"ש שבמשפט נקרא אי-שיוויון פואנקרה. אומרים "קבוע פואנקרה (Poincare constant) של μ הוא לפחות δ".

מסקנה: אם $\delta\gg\frac{1}{n}$ ו-$\int_{\mathbb{R}^n}\left|x\right|^2d\mu\left(x\right)=n$ אז $\int\left(\frac{|x|^2}{\sqrt{n}}-1\right)^2d\mu\left(x\right)\ll1$.

הוכחה: ניקח $f\left(x\right)=\frac{|x|}{n}-1$, אז $\int_{\mathbb{R}^n}fd\mu=0$ ו-$\nabla f=\frac{2x}{n}$, ולכן

$$\int_{\mathbb{R}^n}f^2d\mu=\mathrm{Var}_{\mu}\left(f\right)\leq\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla f\right|^2d\mu=\frac{4}{\delta n^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left|x\right|^2d\mu\left(x\right)=\frac{4}{\delta n}$$

מכאן ש-

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}-1\right)^2 d\mu\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(\frac{|x|^2}{n}-1\right)^2}{\left(\frac{|x|^2}{n}+1\right)^2}d\mu\left(x\right)\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x|^2}{n}-1\right)^2 d\mu\left(x\right)=\int f^2 d\mu\left(x\right)\le\frac{4}{\delta n}$$

כעת, אם $\delta \gg \frac{1}{n}$ אז $\frac{4}{\delta n} \ll 1$.

זה מעניין: צריך מעט מאוד, נגיד $\nabla^2\psi \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$, כדי לקבל חסם טוב על עובי הקליפה הדקה.

נדבר עוד קצת על א"ש פואנקרה.

אם μ מידת הסתברות על $\mathbb{R}^n$ עם קבוע פואנקרה 1, אז לכל פונקציה 1-ליפשיץ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f\left(x\right)-E\ge t|\right\}\right)\le Ce^{-ct}$$

כאשר $c,C>0$ הם קבועים אוניברסליים ו-$E=\int_{\mathbb{R}^n}fd\mu$.

נשווה למקרה של S^{n-1}: עבור μ המידה האחידה על $\sqrt{n-1}S^{n-1}$, קבוע פואנקרה הוא 1.

המשפט נותן "זנב תת-אקספוננציאלי", כלומר e^{-t}.

המצב האמיתי הוא "זנב תת-גאוסי", כלומר e^{-t^2}.

הוכחה: תרגיל מודרך. (פשוט להפעיל את א"ש פואנקרה על f^p, ולעשות אופטימיזציה על p)

נעשה עוד יישום של ברסקמפ ליב.

נסמן את החלק החיובי (orthant) של המרחב

$$\mathbb{R}_+^n=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\forall i.\,x_i\ge0\right\}$$

הגדרה: יהי $p>0$, $K\subset\mathbb{R}_+^n$. אומרים ש-K הוא p-קמור אם

$$\left\{\left(x_1^p,\ldots,x_n^p\right):\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in K\right\}$$

קמור.

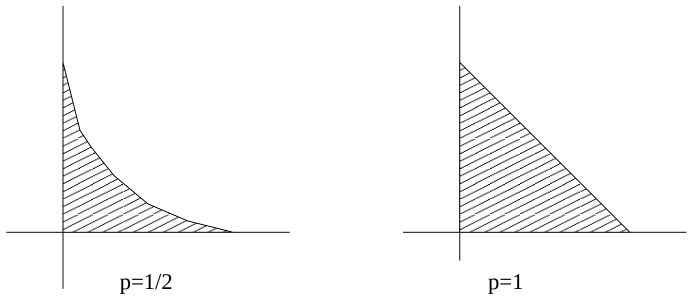
(זה לא המובן היחיד של p-קמירות)

דוגמאות:

נסמן

$$B_p^n=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:\sum x_i^p\le1\right\}$$

זה קמור אם $p \geq 1$.



איור 14: דוגמאות של B_p^2 עבור $p = \frac{1}{2}, 1$

נראה ש-$B_{1/2}$ הוא p-קמור לכל $p \leq \frac{1}{2}$. למה?

$$\left\{(x_1^p, \ldots, x_n^p) : x \in B_{1/2}^n\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum \left(x_i^{1/p}\right)^{1/2} \leq 1\right\} = B_{\frac{1}{2p}}^n$$

וזה קמור כאשר $p \leq \frac{1}{2}$.

תרגיל: נאמר ש-$K \subset \mathbb{R}_+^n$ קבוצה מונוטונית אם $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^n$,

$$x \in K, \forall i.\, y_i \leq x_i \implies y \in K$$

הוכיחו שעבור קבוצות מונוטוניות, p-קמירות גוררת q-קמירות עבור $q \leq p$.

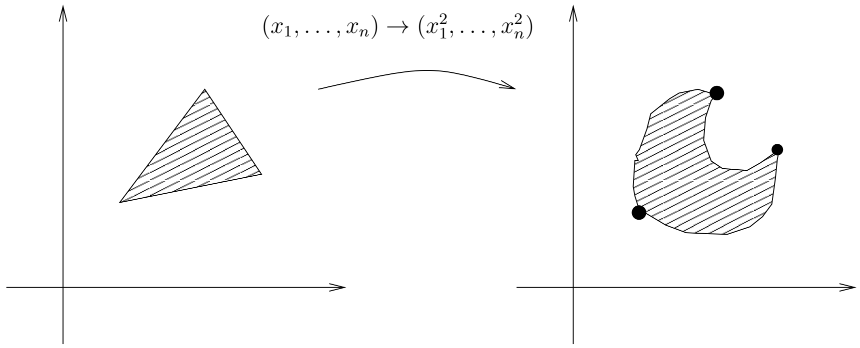
כלומר עבור קבוצות מונוטוניות, חצי-קמירות היא תכונה חלשה יותר מקמירות.

משפט:

נניח ש-$K \subset \mathbb{R}_+^n$ חצי-קמורה. אז לכל פונקציה $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ חלקה C^1,

$$\int_K f = 0 \implies \int_K f^2 \leq 4 \int_K \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\partial_i f(x)\right)^2 dx$$

קבוצה חצי-קמורה "טיפוסית" ב-$\mathbb{R}_+^n$ נראית משהו כמו



הגדרה: נאמר שצפיפות f היא חצי-לוג-קעורה אם $(x_1,\dots,x_n)\mapsto f\left(x_1^2,\dots,x_n^2\right)$ הוא לוג קעורה.

דוגמא: המידה האחידה על קבוצה חצי-קמורה היא חצי-לוג-קעורה.

תרגיל: יהי X וקטור מקרי חצי-לוג-קעור. הוכח שהוקטור $\left(\sqrt{X_1},\dots,\sqrt{X_n}\right)$ הוא לוג-קעור.

אנחנו נוכיח משהו חזק יותר:

תהי f מידת הסתברות חצי-לוג-קעורה על $\mathbb{R}_+^n$. אז לכל $f\in C^1\cap L^2(\mu)$,

$$\mathrm{Var}_\mu(f)\le 4\int_{\mathbb{R}_+^n}\sum_{i=1}^n x_i^2\left(\partial_i f(x)\right)^2 d\mu(x)$$

הערה: (בנוגע לא"ש ברסקמפ-ליב)

יש שיוויון בא"ש ברסקמפ-ליב

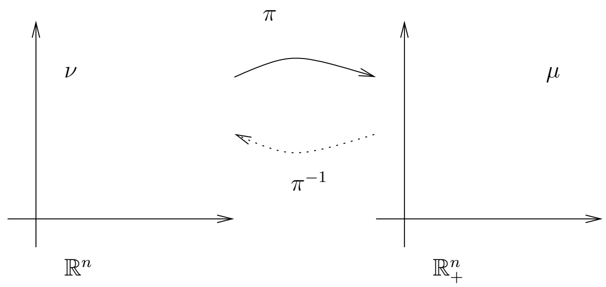
$$\mathrm{Var}_\mu(f)=\int\left(\nabla^2 f\right)^{-1}\nabla f\cdot\nabla f d\mu$$

כאשר $f=\partial^1\psi,\dots,\partial^n\psi$, ורק בצירופים לינאריים שלהם. מזה נובע שהקבוע 4 חד.

הוכחה: נסמן $\frac{d\mu}{dx}=e^{-\psi}$. טיעון על קירוב, שלא נעשה פה, מאפשר להניח ש-ψ היא חלקה C^∞.

נגדיר את ההעתקה $\pi(x_1,\dots,x_n)=\left(x_1^2,\dots,x_n^2\right)$, ו-

$$e^{-\varphi(x)}=e^{-\psi(\pi(x))}\cdot\prod_{i=1}^n(2x_i)$$



איור 15: הקשר בין המרחבים המדוברים

החלק $e^{-\psi(\pi(x))}$ הוא לוג-קעור, לפי הגדרה.

נגדיר $\nu = \pi^* \mu$, כלומר לכל קבוצה בורל $A \subset \mathbb{R}^n_+$, מתקיים $\nu(A) = \mu(\pi(A))$.

נוודא שמתקיים

$$\frac{d\nu}{dx} = e^{-\varphi(x)}$$

בהינתן פונקצית בוחן $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ חלקה C^∞ עם תומך קומפקטי, יש להראות

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\pi(x))\, e^{-\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, e^{-\psi(y)} dy$$

היעקוביאן של π הוא $J_{\pi(x)} = \prod_{i=1}^n (2x_i)$, ולכן אם מחליפים משתנה $y = \pi(x)$, זו בדיוק הנוסחא שמקבלים.

אנחנו יודעים ש-$\varphi(x) = \psi(\pi(x)) - \sum_i \log(2x_i)$, ולכן

$$\nabla^2 \varphi(x) \geq 0 + \nabla^2 \left(-\sum_{i=1}^n \log(2x_i) \right) = \begin{pmatrix} x_i^{-2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^{-2} \end{pmatrix}$$

מעבר למטריצה ההופכית הופך סדר, ולכן

$$\left(\nabla^2 \varphi(x)\right)^{-1} \leq \begin{pmatrix} x_i^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^2 \end{pmatrix}$$

מברסקמפ-ליב, אם נסמן $g(x)=f(\pi(x))$ נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\nu}(g) &\le \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\nabla^2\varphi\right)^{-1}\nabla g\cdot\nabla g d\nu\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n_+}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\partial^i g(x)\right)^2 d\nu(x)\end{aligned}$$

מהתכונה של pull back נובע $\mathrm{Var}_{\nu}(g)=\mathrm{Var}_{\mu}(f)$.

לגבי צד ימין, נקל לבדוק $4y_i^2\left(\partial^i f(y)\right)^2=x_i^2\left(\partial^i f(x)\right)^2$, להוסיף אחר כך] ולכן

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\partial^i g(x)\right)^2\right)d\nu(x)=[y=\pi(x)]=\int_{\mathbb{R}^n_+}4\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\left(\partial^i f(y)\right)^2\right)d\mu(x)$$

הגדרה:

אומרים ש-$K\subset\mathbb{R}^n$ הוא unconditional אם לכל $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$(x_1,\ldots,x_n)\in K\iff(|x_1|,\ldots,|x_n|)\in K$$

כלומר זה פשוט שיקוף של קבוצה שמוגדרת ב-orthant החיובי.

עובדה:

אם $K\subset\mathbb{R}^n$ היא unconditional וקמורה, אז $K\cap\mathbb{R}^n_+$ היא קמורה ומונוטונית, ובפרט חצי-קמורה.

מסקנה 1: תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה unconditional וקמורה, ותהי $f\in C^1\cap L^2(K)$ גם כן unconditional, כלומר

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\qquad f(x_1,\ldots,x_n)=f(|x_1|,\ldots,|x_n|)$$

אז

$$\int_K f=0\implies\int_K f^2\le4\int_K\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\partial^i f(x)\right)^2dx$$

מסקנה 2: תהי μ מידת הסתברות לוג-קעורה, איזוטרופית ו-unconditional על $\mathbb{R}^n$ (כלומר הצפיפות שלה היא פונקציה unconditional). אז

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}-1\right)^2d\mu(x)\le\frac{C}{n}$$

הוכחה:

כמו שהראינו קודם, מספיק להראות את החסם

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x|^2}{n}-1\right)^2 d\mu\left(x\right)\leq\frac{C}{n}$$

ניקח $f\left(x\right)=\frac{|x|^2}{n}-1$, אז $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu=0$. ממסקנה 1,

$$\int\left(\frac{|x|^2}{n}-1\right)^2 d\mu\left(x\right)\leq 4\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n x_i^2\left(\partial^i f\left(x\right)\right)^2 d\mu=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n} x_i^4 d\mu\left(x\right)$$

יהי $X=\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ וקטור מקרי שמתפלג לפי μ. אז

$$\mathbb{E}\left(\frac{|X|^2}{n}-1\right)^2\leq\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}X_i^4$$

אנחנו יודעים ש-$\left(|X_1|,\ldots,|X_n|\right)$ הוא וקטור מקרי חצי-לוג-קעור, אז לפי התרגיל קודם, $\left(\sqrt{|X_1|},\ldots,\sqrt{|X_n|}\right)$ וקטור מקרי לוג-קעור. מלוג-קעירות של המומנטים,

$$\frac{\mathbb{E}\left(\sqrt{X_i}\right)^4}{4!}\geq\sqrt{\frac{\mathbb{E}\left(\sqrt{X_i}\right)^8}{8!}\cdot\frac{\mathbb{E}\left(\sqrt{X_i}\right)^0}{0!}}$$

מאיזוטרופיות, צד שמאל הוא $\frac{1}{4!}$, ולכן $\mathbb{E}X_i^4\leq C$ לכל i, ומתקיים

$$\int\left(\frac{|x|^2}{n}-1\right)^2 d\mu\left(x\right)\leq\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}X_i^4\leq\frac{\overline{C}}{n}$$

נזכיר מה קליפה דקה נותנת.

מקבלים משפט CLT:

אם X וקטור מקרי לוג-קעור, איזוטרופי ו-unconditional ב-$\mathbb{R}^n$, אז לכל $\theta\in\mathbb{R}^n$,

$$\forall t\qquad\left|\mathbb{P}\left[\langle\theta,X\rangle\leq t\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}s^2}ds\right|\leq C\sum\theta_i^4$$

זה הסוף של החלק הזה של הקורס, בשיעור הבא נעבור לנושאים אחרים לגמרי.

9 הקבוע האיזוטרופי (30/4/2014)

היו לנו שני חלקים בקורס עד עכשיו:

1. חלק א' - משפטי גבול מרכזי (משתנים מקריים בלתי-תלויים), אי-שיוויון איזופר-ימטרי על הספירה, קליפה דקה.

   זה היה רק על מימד גבוה.

2. האי-שיוויונים הבסיסיים של קמירות: ברון-מינקובסקי, סנטלו, פרקופה-לינדלר.

   אחר כך אי-שיוויון ברסקמפ-ליב (א"ש מטיפוס פואנקרה, חוסם את השונות של פונקציה) (זו בעצם גרסא אינפינטסימלית של פרקופה-לינדלר)

   ראינו ש"קמירות גוררת ריכוז מידה", ולא צריך סימטריה כמו בספירה. ראינו קליפה דקה לגופים קמורים ו-unconditional, ומשפט גבול מרכזי.

עכשיו נעבור לחלק השלישי: הקבוע האיזוטרופי ובורגיין-מילמן.

יהיה הבדל בגישה לעומת החלקים הקודמים, החלק הזה יהיה גם כן מאוד קשור לקמירות, אבל הפעם כשנחקור מידה או משתנה מקרי, נתייחס ל-$\mathbb{R}^n$ כאילו אין לו מבנה אוקלידי. זה לא מדויק לגמרי, המכפלה הסקלרית והנורמה יופיעו לפעמים, אבל באופן עקרוני התוצאות יתייחסו למרחב וקטורי סוף-ממדי כללי מעל $\mathbb{R}^n$.

נתחיל מתכונות קשיחות (או צפידות, rigidity) של מידות לוג-קעורות.

טענה:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ לוג-קעורה, מידת הסתברות, עם מרכז כובד ב-$x_0\in\mathbb{R}^n$. אז

1. $e^{-n}\cdot\sup f\le f\left(x_0\right)\le\sup f$

2. $-\log f\left(x_0\right)\le-\int f\log f\le-\log f\left(x_0\right)+n$

הגדרה: אם X וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^n$, עם צפיפות f, אז האנטרופיה שלו מוגדרת להיות

$$\mathrm{Ent}\left(X\right):=-\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot\log f$$

כדאי לחשוב על אנטרופיה בתור "לוג הנפח ש-X תופס".

כלומר באיזשהו מובן של קירוב, משתנה מקרי לוג-קעור מתפלג בערך אחיד על קבוצה שהנפח שלה הוא בערך $\frac{1}{\sup f}$.

הערה: מתי האי-שיוויונים האלה הדוקים? במימד $n=1$, הסעיף הראשון הדוק אם ורק אם $f\left(x\right)=e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(x\right)$. במימד כללי הצפיפות $f\left(x\right)=\prod_i e^{-x_i}\mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(x_i\right)$ הדוקה, ובסעיף השני היא נותנת את הגבול העליון ההדוק $-\log\sup f+n$.

הוכחת הטענה:

נניח ש-f חלקה. (אחרת נעשה קונבולוציה עם גאוסיאן זעיר, זה לא ישנה אף אחד מהפרמטרים בהרבה, וזו פעולה ששומרת על לוג-קעירות; אחרת אפשר לגזור אבל יותר בעדינות)

נסמן $f=e^{-\psi}$ כאשר $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ חלקה וקמורה. נוכיח שלכל $a\in\mathbb{R}^n$, אם x_0 מרכז הכובד,

$$\psi\left(x_0\right)\le\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\psi e^{-\psi}}_{\mathrm{Ent}(X)}\le\psi\left(a\right)+n$$

למה זה גורר את הטענות? מקבלים ישירות $\inf\psi\le\psi\left(x_0\right)\le\left(\inf\psi\right)+n$, שזה סעיף 1. עבור סעיף 2, נציב $a=x_0$ ונקבל את הדרוש.

גם מזיזים את f, גם מרכז הכובד זז, ולכן הוקטור $f\left(\mathrm{bar}\left(f\right)\right)$ והמספרים $\sup f$ ו-$\mathrm{Ent}\left(f\right)$ לא משתנים.

לכן מספיק להוכיח עבור $a=0$. אחרי כל ההזזות, נקבל לכל נקודה.

נשתמש בא"ש ינצן: אם X וקטור מקרי ו-f פונקציה קמורה, $\mathbb{E}f\left(X\right)\ge f\left(\mathbb{E}X\right)$.

- הוכחה של זה: נסמן $a=\mathbb{E}X$, יש ל-f על-מישור תומך ב-a, כלומר $f\left(x\right)\ge f\left(a\right)+\ell\left(x-a\right)$ לכל x, ולכן

$$\mathbb{E}f\left(X\right)\ge f\left(a\right)+\mathbb{E}\ell\left(x-a\right)=f\left(a\right)+\ell\left(\mathbb{E}x-a\right)=f\left(a\right)=f\left(\mathbb{E}X\right)$$

עתה, יהי X וקטור מקרי עם צפיפות $e^{-\psi}$, אזי

$$\psi\left(x_0\right)=\psi\left(\mathbb{E}X\right)\le\mathbb{E}\psi\left(X\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(x\right)e^{-\psi(x)}dx$$

א"ש שני: פונקציה קמורה היא מעל המשיקים שלה, כלומר לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\psi\left(y\right)\ge\psi\left(x\right)+\nabla\psi\left(x\right)\cdot\left(y-x\right)$$

נציב $y=0$ ונקבל

$$\psi\left(0\right)+\nabla\psi\left(x\right)\cdot x\ge\psi\left(x\right)$$

מזה נובע ישירות

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\psi e^{-\psi} &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left[\psi\left(0\right)+\nabla\psi\left(x\right)\cdot x\right]e^{-\psi(x)}dx\\ &= \psi\left(0\right)+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\partial_i\psi\left(x\right)\right)e^{-\psi(x)}dx\\ &= \psi\left(0\right)-\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}x_i\partial_i\left(e^{-\psi(x)}\right)dx\end{aligned}$$

נקבע i, על ישר ℓ בכיוון e_i עם $y \perp e_i$ מתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_i \left(e^{-\psi(y+te_i)}\right) tdt = -\int_{\mathbb{R}} e^{-\psi(y+te_i)}dt + e^{-\psi(y+te_i)}e_i\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

והגורם האחרון מתאפס כי הביטוי בפנים דועך אקספוננציאלית ל-0 באינסוף.

אם נסכום שוב, נקבל מפוביני

$$\psi(0) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} x_i \partial_i \left(e^{-\psi(x)}\right) dx = \psi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\psi(x)} dx = \psi(0) + n \int e^{-\psi} = \psi(0) + n$$

מש"ל.

נסמן, עבור $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ לוג-קעורה שהיא צפיפות הסתברות

$$K(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \frac{1}{10^n} \cdot \sup f \right\}$$

אזי:

1. הקבוצה $K(f)$ קמורה (קו גובה של פונקציה לוג-קעורה)
2. הפונקציה f לא משתנה יותר מדי על $K(f)$:

$$\sup_{K(f)} f \leq 10^n \cdot \inf_{K(f)} f$$

טענה: אם X וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^n$ עם צפיפות f, אז $\mathbb{P}(X \in K(f)) \geq 1 - e^{-cn}$ עבור c קבוע אוניברסלי כלשהו. למעשה, לכל $\alpha \geq 2$, $\mathbb{P}(f(x) \geq e^{-\alpha n} \cdot \sup f) \leq e^{-c\alpha n}$.

דוגמאות:

1. נניח X גאוסי סטנדרטי ב-$\mathbb{R}^n$, אז

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \\ K(f) &= B\left(0, c\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

והגאוסיאן חי בתוך כדור ברדיוס $O(\sqrt{n})$ סביב הראשית.

(את זה רואים גם בתיאוריה של סטיות גדולות, large deviations)

2. יהי $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור, $K=-K$. יש את הנורמה

$$\|x\|_K=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda K\}$$

עבור $f(x)=e^{-\|x\|_K}$, $K(f)=cnK$.

עבור $f(x)=e^{-\|x\|_K^2}$, $K(f)=c\sqrt{n}K$.

הגוף K מייצג את f נאמנה, בסקאלה גסה.

נוכיח את הטענה, שאם ל-X יש צפיפות $e^{-\psi}$ אז לכל $\alpha\geq 2$ מתקיים $\mathbb{P}(\psi(X)\geq\inf\psi+\alpha n)\leq e^{-c\alpha n}$.

הוכחה:

נזיז את הוקטור המקורי כך ש-$\psi(0)\leq\inf\psi+\frac{1}{10}$, ונסמן $A=\psi(0)$. נוכיח שלכל $\alpha\geq 1.9$ מתקיים

$$\mathbb{P}(\psi(X)\geq A+\alpha n)\leq e^{-c\alpha n}$$

נשתמש באי-שיוויון ברנשטיין, אז מספיק להוכיח

$$\mathbb{E}e^{\frac{\psi(x)-A}{2}}\leq 2^n$$

שהרי מזה נובע

$$\mathbb{P}(\psi(X)\leq A+\alpha n)=\mathbb{P}\left(e^{\frac{\psi(x)-A}{2}}\geq e^{\frac{\alpha n}{2}}\right)\leq\frac{\mathbb{E}e^{-\frac{\psi(x)-A}{2}}}{e^{\alpha n/2}}\leq 2^ne^{-\frac{\alpha n}{2}}\leq e^{-c\alpha n}$$

אם $\alpha\geq 1.9$, מקבלים $c=0.2$.

מקמירות של ψ מקבלים

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\qquad \psi\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{\psi(x)}{2}+\frac{\psi(0)}{2}=\frac{\psi(x)+A}{2}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\frac{\psi(x)-A}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{\psi(x)-A}{2}}e^{-\psi(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{\psi(x)+A}{2}}dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\psi(x/2)}dx\\ [x=2y] &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{-\psi(y)}2^ndy=2^n\end{aligned}$$

לסיכום, אם f לוג-קעורה,

$$f^{1/n}(barycenter)\sim(\sup f)^{1/n}\sim e^{-\mathrm{Ent}(f)/n}$$

כאן $A\sim B$ אם $0<c_1\le\liminf\frac{A}{B}\le\limsup\frac{A}{B}\le c_2<\infty$.

באלה הקבועים c_1,c_2 הם $e^{\pm1}$.

הגורמים האלה שקולים גם לאלה:

$$(\sup f)^{1/n}\sim\int_{\mathbb{R}^n}f^{1/n}\cdot f\sim\int_{K(f)}f^{1/n}\cdot f\sim\frac{1}{\mathrm{Vol}_n\left(K\left(f\right)\right)^{1/n}}$$

את זה לא נוכיח אבל זה קל לראות.

העובדה הבאה מוכרת: מבין כל הוקטורים המקריים עם מטריצת Cov נתונה, או אפילו דטרמיננטה נתונה של מטריצת Cov, לגאוסיאן יש אנטרופיה מקסימלית. (זה שקול בעצם לא"ש ינצן)

- סקיצת הוכחה: אם f,g צפיפויות הסתברות, $0=\int f\left(\frac{g}{f}-1\right)\ge\int f\log\frac{g}{f}$. אם נציב ב-$g$ את הצפיפות הגאוסית נקבל

$$-\int f\log f\le\int f\log\frac{1}{g}=c+\mathrm{Var}\left(f\right)$$

מצפים שיהיה איזשהו קשר בין אנטרופיה לבין שונות, לפחות בסיטואציה רגולרית.

כאשר X וקטור מקרי עם צפיפות f לוג-קעורה, האנטרופיה של X היא בערך $\log\mathrm{Vol}\left(K\left(f\right)\right)$. האנטרופיה של גאוסיאן עם אותו Cov היא $\frac{1}{2}\log\det\mathrm{Cov}\left(X\right)$.

נראה אם אותו הדבר קורה לגופים קמורים.

הגדרה: (הקבוע האיזוטרופי)

אם X וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^n$ עם צפיפות לוג-קעורה, מסמנים

$$L_X=\left(\det\mathrm{Cov}\left(X\right)\right)^{1/2n}\cdot f^{1/n}\left(\mathbb{E}X\right)$$

הקבוע האיזוטרופי של X.

הערה: יש לנו המון דרכים לבטא אנטרופיה, אז

$$\begin{aligned}L_X&\sim\left(\det\mathrm{Cov}\left(X\right)\right)^{1/2n}\cdot\frac{1}{\mathrm{Vol}\left(K\left(f\right)\right)^{1/n}}\\&\sim\det\mathrm{Cov}\left(X\right)^{1/2n}\cdot\left(\sup f\right)^{1/n}\\n\cdot\log L_x&\sim\frac{1}{2}\log\det\mathrm{Cov}\left(X\right)-\mathrm{Ent}\left(X\right)\end{aligned}$$

אפשר לזכור שזה ההבדל בין ה-Cov והאנטרופיה.

נרצה להבין את הקבוע האיזוטרופי, עד-כדי קבוע אוניברסלי.

טענה:

1. לכל העתקה אפינית הפיכה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $L_{T(X)}=L_X$.
2. לכל X לוג-קעור, $L_X>const>0$.

הוכחה:

1. הזה לא משנה את הקווריאנס ולא את $f(\mathbb{E}X)$, אז מספיק להוכיח עבור העתקות לינאריות. אם נסמן ב-f_T את הצפיפות של $T(X)$, אז $f_T(x)=|\det T|^{-1}\cdot f\left(T^{-1}x\right)$ ו-

$$\det\mathrm{Cov}\left(TX\right)=\left|\det T\right|^{2}\cdot\det\mathrm{Cov}\left(X\right)$$

ולכן

$$L_{TX}=\det\mathrm{Cov}\left(TX\right)^{1/2n}\cdot f_T\left(\mathbb{E}TX\right)^{1/n}=\left|\det T\right|^{2/2n}\left|\det T\right|^{-1/n}L_X$$

2. נפעיל העתקה אפינית על X כך ש-$\mathbb{E}X=0$, ו-$\mathrm{Cov}\left(X\right)=\lambda\cdot\mathrm{Id}$, ו-$f(0)=1$. מתקיים

$$\left(\det\mathrm{Cov}\left(X\right)\right)^{1/n}=\lambda=\frac{\mathrm{TrCov}\left(X\right)}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Var}\left(X_i\right)}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(X_i^2\right)}{n}=\frac{\mathbb{E}\left|X\right|^2}{n}$$

יודעים ש-$f(0)=1$ ולכן $\sup f\le e^n$. מכאן ש-

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X|\le\frac{\sqrt{n}}{100}\right) &= \int_{B\left(\sqrt{n}/100\right)}f\le\mathrm{Vol}_n\left(B\left(0,\frac{\sqrt{n}}{100}\right)\right)\cdot e^n\\ &= \kappa_n\left(\sqrt{n}\right)^n\cdot\left(\frac{e}{100}\right)^n\le\left(\frac{\sqrt{2\pi e}}{\sqrt{n}}\right)^n\cdot\left(\sqrt{n}\right)^n\cdot\left(\frac{e}{100}\right)^n\le\frac{1}{2}\end{aligned}$$

לכן

$$\mathbb{E}\left|X\right|^2\ge\mathbb{E}\left[\left|X\right|^2\cdot\mathbf{1}_{|X|\ge\frac{\sqrt{n}}{100}}\right]\ge\frac{n}{100^2}\cdot\mathbb{P}\left(|X|\ge\frac{\sqrt{n}}{100}\right)\ge Cn\left(1-\mathbb{P}\left(|X|\le\frac{\sqrt{n}}{100}\right)\right)\ge c\cdot n$$

ולכן

$$L_X=\det\mathrm{Cov}\left(X\right)^{1/2n}\cdot f^{1/n}\left(0\right)=\sqrt{\frac{\mathbb{E}\left|X\right|^2}{n}}\ge const$$

הערה: בהצגה

$$\frac{1}{n}\log L_X \sim 2\log \mathrm{Cov}\left(X\right) - \mathrm{Ent}\left(X\right)$$

המינימום מתקבל עבור גאוסיאן, והוא מסדר גודל של קבוע אוניברסלי.

הא"ש $L_X > const$ משמעו ש"הקווריאנס גדול לפחות כמו האנטרופיה".

השערה: קיים קבוע אוניברסלי שעבורו

$$\forall n \forall X \qquad L_X < const$$

אפשר לחשוב שהאנטרופיה היא משהו מסובך ומעניין, שלא יקיים את הקשר הזה.

אבל תכף נראה טענה שקולה, שנראה מביך שאין לה הוכחה:

השערה: לכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ מנפח 1, קיים על-מישור $H \subset \mathbb{R}^n$ (תת-מרחב מקו-מימד 1) כל ש-

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K \cap H\right) > const$$

זו השערה מרכזית, שנקראת השערת העל-מישור (hyperplane conjecture) או השערת החתך (slicing conjecture).

תרגיל (קצת מודרך): ה-slicing problem עם $\frac{c}{\sqrt{n}}$ במקום עם קבוע.

טענה: נניח $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור, $X \sim \mathrm{Unif}\left(K\right)$, ונניח ש-$\mathbb{E}X = 0$ ו-$\mathrm{Cov}\left(X\right)$ סקלארית. אזי לכל $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ תתי-מרחבים מקו-ממד 1,

$$\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(H_1 \cap K\right)}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(H_2 \cap K\right)} \leq C$$

עבור קבוע אוניברסלי $C > 0$. (האופטימלי הוא $\sqrt{6}$ או משהו)

למה: לכל $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור, $X \sim \mathrm{Unif}\left(K\right)$ עם $\mathbb{E}X = 0$. אזי ישנם שני קבועים אוניברסליים $c_1, c_2 > 0$ כל שלכל $\theta \in S^{n-1}$,

$$c_1\left|K\right| \leq \mathrm{Vol}_{n-1}\left(K \cap \theta^{\perp}\right) \cdot \sqrt{\mathbb{E}\left(X \cdot \theta\right)^2} \leq c_2\left|K\right|$$

הוכחה: נקבע $\theta \in S^{n-1}$, ונסמן ב-f את הצפיפות של $\langle X, \theta \rangle$. אז

$$f\left(t\right) = \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\left\{x \in K : x \cdot \theta = t\right\}\right)}{\mathrm{Vol}_n\left(K\right)}$$

מפרקופה-לינדלר, זו פונקציה לוג-קעורה. מתקיים $\mathbb{E}\left(X \cdot \theta\right) = 0$ ולכן $\int_{-\infty}^{\infty} tf\left(t\right)dt = 0$. ומתקיים גם $\mathbb{E}\left(X \cdot \theta\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f\left(t\right)dt$.

לכן הא"ש המבוקש שקול ל-

$$c_1 \leq f(0) \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt} \leq c_2$$

(זה די ברור כי עד-כדי נרמול של תוחלת ושונות, המידות הלוג-קעורות החד-ממדיות הן קומפקט; נוכיח במפורש)

כיוון אחד: כזכור, $M_f(p) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} t^p f(t)\, dt$ לוג-קעורה, ו-$M_f(-1) = f(0)$. נציב $-1, 0, 2$:

$$\begin{aligned} M_f(0) &\geq M_f(-1)^{2/3} M_f(2)^{1/3} \\ \int_0^{\infty} \geq \left(\int_0^{\infty} f\right)^3 &\geq f(0)^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^2 f(t)\, dt \end{aligned}$$

מסימטריה, גם

$$\int_{-\infty}^{0} f \geq \frac{1}{2} \cdot f(0)^2 \cdot \int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\, dt$$

נחבר את שני השיוויונים ונקבל $1 \geq \frac{1}{2} \cdot f(0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt$.

כיוון שני: יודעים ש-$\sup f \leq e \cdot f(0)$. נניח בה"כ $\int_0^{\infty} f \geq \int_{-\infty}^{0} f$ ולכן $\int_0^{\infty} f \geq \frac{1}{2}$. אז

$$\mathbb{P}\left(0 \leq X \cdot \theta \leq \frac{1}{10 f(0)}\right) \leq \frac{1}{10 f(0)} \cdot \sup f \leq \frac{e}{10}$$

ולכן

$$\mathbb{P}\left(X \cdot \theta \geq \frac{1}{10 f(0)}\right) = \mathbb{P}(X \cdot \theta \geq 0) - \mathbb{P}\left(0 \leq X \cdot \theta \leq \frac{1}{10 f(0)}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{e}{10} > \frac{1}{5}$$

ומכאן

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt &= \mathbb{E}(X \cdot \theta)^2 \geq \mathbb{E}\left[(X \cdot \theta)^2 \cdot \mathbf{1}_{\left\{X \cdot \theta \geq \frac{1}{10 f(0)}\right\}}\right] \\ &\geq \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{f^2(0)} \cdot \mathbb{P}\left(X \cdot \theta \geq \frac{1}{10 f(0)}\right) \geq \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{f^2(0)} \end{aligned}$$

הוכחת הטענה: (שיש יחס חסום בין הנפח של slice-ים)

נסמן $\mathrm{Cov}(X) = \lambda^2 \mathrm{Id}$. יהי $\theta \in S^{n-1}$. מהלמה,

$$c_1 \leq \frac{\left|K \cap \theta^{\perp}\right|}{|K|} \sqrt{\mathbb{E}(X \cdot \theta)^2} \leq c_2$$

ולכן

$$\forall\theta\in S^{n-1}\qquad \frac{c_1}{\lambda}\le\frac{\left|K\cap\theta^{\perp}\right|}{|K|}\le\frac{c_2}{\lambda}$$

אם נסמן $H_1=\theta_1^{\perp}$ ו-$H_2=\theta_2^{\perp}$, נקבל

$$\frac{|K\cap H_1|}{|K\cap H_2|}\le\frac{c_2/\lambda\cdot|K|}{c_1/\lambda\cdot|K|}=\frac{c_2}{c_1}$$

שהוא קבוע אוניברסלי.

מסקנה: נניח $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור, עם נפח 1, מרכז כובד בראשית ומטריצת Cov סקלארית. אז לכל על-מישור $H\subset\mathbb{R}^n$ שעובר דרך הראשית,

$$\frac{c_1}{L_K}\le\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K\cap H\right)\le\frac{c_2}{L_K}$$

כאשר $L_K:=L_X$ עבור $X\sim\mathrm{Unif}\left(K\right)$.

הערה: אם העל-מישור אינו דרך הראשית, יודעים רק

$$|K\cap H_{affine}|\le e\cdot|K\cap H_{linear}|\le\frac{c_3}{L_K}$$

(מסתכלים על ה-marginal בכיוון המאונך ל-H, זה לוג קעור ויש יחס של e לכל היותר בין המקסימום למרכז הכובד)

הוכחת המסקנה: מהלמה מקבלים

$$\frac{\left|K\cap\theta^{\perp}\right|}{|K|}\sim\frac{1}{\sqrt{\int_K\left(X\cdot\theta\right)^2dx}}$$

אבל הצפיפות של X היא 1 בתוך K, ולכן זה בדיוק $\frac{1}{L_K}$.

תרגיל: נניח $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור, $|K|=1$. אזי קיים על-מישור $H\subset\mathbb{R}^n$ עם

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K\cap H\right)\ge\frac{c}{L_K}$$

(קחו כיוון עם השונות הקטנה ביותר)

נעשה את הגרירה בכיוון ההפוך בשיעור הבא.

דוגמא:

- ניקח $K=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n\subset\mathbb{R}^n$. יש לו מרכז כובד ב-0, אם $X\sim\mathrm{Unif}\left(K\right)$ אז $\mathrm{Cov}\left(X\right)=\frac{1}{12}\cdot\mathrm{Id}$.

  מסקנה: לכל $\theta\in S^{n-1}$,

$$1\le\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n\cap\theta^{\perp}\right)\le\sqrt{2}$$

לא נראה את זה, אבל המינימום מתקבל כאשר $\theta=(1,0,\ldots,0)$ (סביר) וה-מקסימום מתקבל כאשר $\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,\ldots,0)$ (מפתיע).

זה מפתיע כי עבור היטל,

$$\left|\mathrm{Proj}_{\theta^{\perp}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^{n}\right)\right|=\sum|\theta_i|$$

וזה מקסימלי כאשר $\theta=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\ldots,1)$.

- אם $K\subset\mathbb{R}^n$ הוא כדור בנפח 1, אז

$$\left|K\cap\theta^{\perp}\right|\approx\frac{1}{\sqrt{e}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

זה נותן דוגמא נגדית בממד גבוה ל-

משפט (בוזמן-פטי): אם $n\leq 4$ ו-$K,T\subset\mathbb{R}^n$ גופים קמורים וסימטריים כך שלכל $\theta\in S^{n-1}$ מתקיים $\left|K\cap\theta^{\perp}\right|\leq\left|T\cap\theta^{\perp}\right|$ אז $|K|\leq|T|$.

10 נפחים של חתכים מקו-מימד גבוה, משפט קשין (7/5/2014)

בשיעור שעבר הגדרנו עבור וקטור מקרי X ב-$\mathbb{R}^n$ עם צפיפות לוג-קעורה f את הקבוע האיזוטרופי

$$L_X=L_f=\det{}^{\frac{1}{2n}}\mathrm{Cov}\left(X\right)\cdot f\left(\mathbb{E}X\right)^{\frac{1}{n}}$$

זה חסר יחידות, כלומר אינווריאנטי להעתקות לינאריות: אם T לינארית והפיכה, אז $L_{T(X)}=L_X$.

הראינו שהקבוע האיזוטרופי חסום מלמטה $L_X>const>0$.

הקבוע האיזוטרופי מבטא בערך את היחס בין שונות לאנטרופיה, ליתר דיוק

$$n\cdot\log L_X\sim\frac{1}{2}\log\det\mathrm{Cov}\left(X\right)-\mathrm{Ent}\left(X\right)$$

ראינו קשר לנפחים של חתכים מקו-מימד 1: אם $X\sim\mathrm{Unif}\left(K\right)$ עבור $K\subset\mathbb{R}^n$ קמור, ונניח $\mathbb{E}X=0$, אז לכל $\theta\in S^{n-1}$,

$$C_1<\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K\cap\theta^{\perp}\right)}{\mathrm{Vol}_n\left(K\right)}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\left(X\cdot\theta\right)^2}<C_2$$

עם זוג קבועים אוניברסליים $C_1,C_2>0$.

עשינו רדוקציה למשתנה מקרי לוג-קעור חד-ממדי $X\cdot\theta$, ואז הערך ב-0 צריך להיות קרוב למקסימום, כלומר הקירוב של גרף ההתפלגות בעזרת מלבן הוא לא רע. (ליתר דיוק, הגובה ב-0 כפול סטיית התקן חסום בין שני קבועים חיוביים)

מסקנה: אם בנוסף, מטריצת ה-Cov סקלארית, אז לכל $\theta\in S^{n-1}$,

$$\sqrt{\mathbb{E}\left(X\cdot\theta\right)^{2}}=\det\mathrm{Cov}\left(X\right)^{\frac{1}{2n}}=\frac{L_{X}}{\mathrm{Vol}_{n}\left(K\right)^{-1/n}}$$

לסיכום, כאשר $\mathrm{Cov}\left(X\right)$ סקלארית, לכל על-מישור H דרך הראשית,

$$c_{1}\frac{\mathrm{Vol}_{n}\left(K\right)^{-1/n}}{L_{K}}\leq\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K\cap H\right)}{\mathrm{Vol}_{n}\left(K\right)}\leq c_{2}\frac{\mathrm{Vol}_{n}\left(K\right)^{-1/n}}{L_{K}}$$

או בקיצור

$$\frac{c_{2}}{L_{K}}\leq\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K\cap H\right)}{\mathrm{Vol}_{n}\left(K\right)^{\frac{n-1}{n}}}\leq\frac{c_{1}}{L_{K}}$$

להמון גופים יש מטריצת Cov סקלארית (למשל סימפלקס רגולרי, או כדורי יחידה של $B\left(\ell_{p}^{n}\right)$), וכך מקבלים הערכות על נפחים של חתכים דרך מרכז הכובד.

הנושא הבא: חתכים מקו-מימד גבוה.

(הלמה הראשונה היא המשך של הנושא הקודם)

כאן הקבוע האיזוטרופי שולט פחות ופחות בנפחים. נתחיל בחסם יחסית שימושי.

למה 1: נניח x וקטור מקרי לוג-קעור, בעל צפיפות f, עם $\mathbb{E}X=0$ ו-$\mathrm{Cov}\left(X\right)$ סקלאר-ית. ניקח תת-מרחב $E\subset\mathbb{R}^{n}$ ממימד k. אזי

$$\left(\int_{E}f\right)^{\frac{1}{n-k}}\geq c\frac{f\left(0\right)^{1/n}}{L_{X}}$$

(כאשר c קבוע אוניברסלי)

הוכחה: נסמן $\mathrm{Proj}_{E}:\mathbb{R}^{n}\to E$ את ההיטל האורתוגונלי, ו-$Y=\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}\left(X\right)$. זה לוג-קעור (מפרקופה-לינדלר), $\mathbb{E}Y=0$, ו-

$$\mathrm{Var}\left(Y\cdot\theta\right)=\mathbb{E}\left(Y\cdot\theta\right)^{2}=\mathbb{E}\left(\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}X\cdot\theta\right)^{2}=\mathbb{E}\left(X\cdot\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}\theta\right)^{2}=\mathrm{Var}\left(X\cdot\,\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}\theta\right)$$

המטריצה $\mathrm{Cov}\left(X\right)=\frac{L_{X}^{2}}{f(0)^{2/n}}\mathrm{Id}$ ולכן $\mathrm{Cov}\left(Y\right)=\frac{L_{X}^{2}}{f(0)^{2/n}}\mathrm{Id}_{E^{\perp}}$ כוקטור מקרי ב-$E^{\perp}$.

מצד שני,

$$const<L_{Y}=\det\mathrm{Cov}\left(Y\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\cdot\left(\int_{E}f\right)^{\frac{1}{n-k}}$$

(כי $\int_E f$ הוא הערך ב-0 של הצפיפות)

מעבירים אגפים ומקבלים את התוצאה.

הערה: אם k קבוע, החסם הזה הדוק, כלומר גם אי-השיוויון ההפוך מתקיים, כי יש חסם מלמעלה על הקבוע האיזוטרופי. תחת השערת העל-מישור, הכיוון ההפוך נכון באופן כללי.

ננסה גישה אחרת לנפחים של חתכים מקו-מימד גבוה: מנות נפח (volume ratio).

נחקור כרגע חתכים <u>טיפוסיים</u>. (החסם הקודם תקף לכל חתך)

נסמן ב-$G_{n,k}$ את האוסף כל תת-המרחבים ה-k-מימדיים של $\mathbb{R}^n$. (הגרסמניאן)

יש מטריקה טבעית, שמוגדרת בעזרת חתכים על הספירה בעזרת מטריקת האוסדורף:

$$d\left(E_1,E_2\right)=d_H\left(E_1\cap S^{n-1},E_2\cap S^{n-1}\right)$$

(עוד מטריקות: משהו עם זוויות ספיריות, או להסתכל על המטריצות של ההטלות האורתוגונליות על איברי הגרסמניאן, ומרחק בין המטריצות נותן את אותו מבנה טופ-ולוגי)

זו אפילו יריעה חלקה, עם טופולוגיה קומפקטית, ויש עוד כל מיני תכונות יפות. מתקיים גם $G_{n,1}\cong G_{n,n-1}\cong\mathbb{R}P^{n-1}$.

שאלה: מהו תת-מרחב אקראי? מהי מידת ההסתברות האחידה על הגרסמניאן?

אפשר להשתמש במשפט Haar: אם יש על מרחב טופולוגי קומפקטי פעולה טרנזיטי-בית, יש מידת הסתברות יחידה אינווריאנטית ביחס אליה. (אצלנו זו חבורת הסיבובים $O\left(n\right)$)

תשובה יותר ישירה היא להגריל k וקטורים מקריים ב"ת (הסתברותית) שנבחרים באופן אחיד מתוך S^{n-1}, נסמן אותם $X_1,\ldots,X_k$. נסמן $E=\operatorname{span}\left\{X_1,\ldots,X_k\right\}$, וזה יהיה תת-המרחב האקראי.

תרגיל 0: $\operatorname{Prov}\left(\dim\operatorname{span}\left\{X_1,\ldots,X_k\right\}=k\right)=1$ (רמז: אינדוקציה על k)

תרגיל 1: ההתפלגות של E ב-$G_{n,k}$ אינווריאנטית תחת $SO\left(n\right)$. כלומר לכל $U\in O\left(n\right)$, יש שיוויון בהתפלגות

$$G_{n,k}\ni\underbrace{\operatorname{span}\left\{X_1,\ldots,X_k\right\}}_{E}\overset{d.}{=}\underbrace{\operatorname{span}\left\{UX_1,\ldots,UX_k\right\}}_{U(E)}\in G_{n,k}$$

אומרים שתת-מרחב E כנ"ל מפולג אחיד בגרסמניאן. מסמנים ב-$\mu_{n,k}$ את מידת ההסתברות המושרה

$$\mu_{n,k}\left(A\right)=\operatorname{Prob}\left(E\in A\right)$$

לכל $A\subset G_{n,k}$ קבוצת בורל.

תרגיל 2: יהי $E\in G_{n,k}$ תת-מרחב אקראי מפולג אחיד. נבחר באקראי וקטור יחידה בספירת היחידה S_E, ביחס למידה האחידה על הספירה ה-$k-1$ מימדית $S_E=$

$S^{n-1}\cap E$. הוכיחו שזה מפולג אחיד ב-S^{n-1}. רמז: להשתמש ביחידות של מידת ההסתברות האחידה על S^{n-1} ביחס לאינווריאנטיות לסיבובים.

מכיוון ש-$\mathrm{Vol}_n\left(B_2^n\right)\neq 1$, נוח להגדיר את רדיוס הנפח (volume radius) עבור גוף K ממימד ℓ,

$$\text{v.rad.}\left(K\right)=\left(\frac{\mathrm{Vol}_\ell\left(K\right)}{\mathrm{Vol}_\ell\left(B_2^\ell\right)}\right)^{1/\ell}$$

כלומר $\text{v.rad.}\left(K\right)$ הוא הרדיוס של הכדור שנפחו שווה לזה של K.

תמיד נחשב את רדיוס הנפח ביחס למימד שנובע מההקשר. כלומר אם $K\subset\mathbb{R}^n$ עם פנים לא ריק, אז

$$\text{v.rad.}\left(K\right)=\left(\frac{\mathrm{Vol}_n\left(K\right)}{\mathrm{Vol}_n\left(B_2^n\right)}\right)^{1/n}\sim\sqrt{n}\cdot\mathrm{Vol}\left(K\right)^{1/n}$$

ואם מתעסקים בגופים בתת-מרחב $E\subset\mathbb{R}^n$ ממימד ℓ, אז בו משתמשים.

משפט: נניח $K\subset\mathbb{R}^n$ קמור, $1\leq\ell\leq n$, ויהי $E\in G_{n,\ell}$ תת-מרחב אקראי. אזי בהסתברות לפחות $1-c_2e^{-c_2n}$ מתקיים

$$\text{v.rad.}\left(K\cap E\right)^\lambda\,\mathrm{diam}\left(K\cap E\right)^{1-\lambda}\leq C\cdot\text{v.rad.}\left(K\right)$$

כאשר $\lambda=\ell/n$ ו-$\mathrm{diam}\left(A\right)=\sup_{x,y\in A}\left|x-y\right|$.

כמה תוצאות פשוטות על volume radius: אם $B\subset\mathbb{R}^n$ כדור, לא משנה באיזה רדיוס (עם מרכז ב-0), אז

$$\text{v.rad.}\left(B\right)=\text{v.rad.}\left(B\cap E\right)$$

לכל תת-מרחב $E\subset\mathbb{R}^n$.

בנוגע לקוביה, $\text{v.rad.}\left(\left[-1,1\right]^n\right)\sim\sqrt{n}$. יש גם $\text{v.rad.}\left(B^n\right)\sim\sqrt{n}$, כלומר "נפח הקוביה הוא בערך נפח הכדור החוסם". (לא החסום!)

ניקח את $B_1^n=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\sum\left|x_i\right|=1\right\}$ (ה-cross polytope). נשים לב ב-$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n\subset B_1^n$. למה? נניח $x\in\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n$, אז

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\left|x\right|=\sqrt{\sum x_i^2}\underset{\text{C-S}}{\geq}\frac{\sum_{i=1}^n\left|x_i\cdot1\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n1^2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\left|x_i\right|$$

ולכן $\sum\left|x_i\right|\leq1$ ו-$x\in B_1^n$. הנפח של B_1^n הוא בערך הנפח של הכדור החסום. נראה את זה.

למה: $\mathrm{Vol}_n\left(B_1^n\right)=2^n/n!$.

הוכחה: נסמן $B_1^{n,+}=\mathbb{R}_+^n\cap B_1^n$. מסימטריה $\mathrm{Vol}_n\left(B_1^n\right)=2^n\cdot\mathrm{Vol}_n\left(B_1^{n,+}\right)$. כדי לחשב את הנפח של חתיכה אחת נשים לב ש-$B_1^{n,+}=\mathrm{conv}\left(\left\{e_n\right\}\cup B_1^{n-1,+}\right)$. נראה את זה. אם $\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in B_1^{n,+}$ אפשר לרשום

$$\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_n\cdot\left(0,\ldots,0,1\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)\cdot\left(\frac{x_1}{\Sigma},\ldots,\frac{x_{n-1}}{\Sigma},0\right)$$

מהנוסחא לנפח חרוט, מקבלים

$$\mathrm{Vol}_n\left(B_1^{n,+}\right) = \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}\left(B_1^{n-1,+}\right)$$

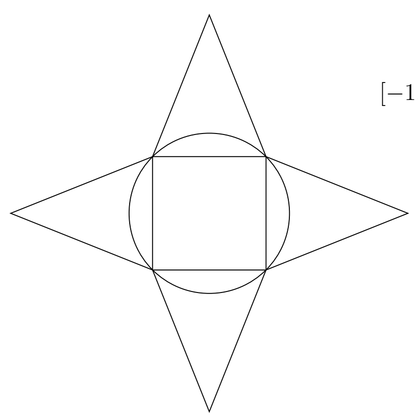
והרקורסיה הזו נותנת $\mathrm{Vol}_n\left(B_1^{n,+}\right) = \frac{1}{n!}$.

לכן

$$\mathrm{v.rad.}\left(B_1^n\right) = \left(\frac{\mathrm{Vol}_n\left(B_1^n\right)}{\mathrm{Vol}_n\left(B_2^n\right)}\right)^{1/n} = \frac{2 \cdot (n!)^{-n}}{\left(\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)^{1/n}} \sim \frac{1/n}{1/\sqrt{n}}$$

כלומר יש קבועים אוניברסליים $c_1, c_2 > 0$ כך ש-

$$\frac{c_1}{\sqrt{n}} \leq \mathrm{v.rad}\left(B_1^n\right) \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}$$



$$[-1,1]^n \subset \sqrt{n} B_2^n \subset n \cdot B_1^n$$

איור 16: שלושה גופים עם אותו volume radius בערך

נראה את המשפט מקודם: אם $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור ו-E תת-מרחב אקראי ממימד λn, בהסתברות גבוהה

$$\mathrm{diam}\left(K \cap E\right)^{1-\lambda} \cdot \mathrm{v.rad.}\left(K \cap E\right)^{\lambda} \leq C \cdot \mathrm{v.rad.}\left(K\right)$$

נתחיל מלמה: יהי $K \subset \mathbb{R}^\ell$ גוף קמור, ו-$n \geq \ell$. אזי

$$\mathrm{Vol}_\ell\left(K\right) \cdot \mathrm{diam}\left(K\right)^{n-\ell} \leq c^n \int_K |x|^{n-\ell}\, dx$$

הוכחה: נבחר נקודה $x_0 \in K$ עם

$$|x_0| \geq \frac{1}{2} \cdot \sup_{x \in K} |x|$$

נשים לב שחייב להיות $K \subset B(0, 2|x_0|)$, ולכן $\mathrm{diam}(K) \leq 4|x_0|$.

נביט ב-$K_0 = \frac{1}{4}K + \frac{3}{4}x_0$. אזי $\mathrm{Vol}_\ell(K_0) = \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \mathrm{Vol}_\ell(K)$. מקמירות, $K_0 \subset K$. וכמו כן $K_0 \subset B\left(x_0, \frac{1}{2}|x_0|\right)$, ולכן $|x| \geq \frac{1}{2}|x_0| \geq \frac{1}{8}\mathrm{diam}(K)$ לכל $x \in K_0$.
לכן,

$$\begin{aligned}
\int_K |x|^{n-\ell} dx &\geq \int_{K_0} |x|^{n-\ell} dx \geq \mathrm{Vol}_\ell(K_0) \cdot \inf_{y \in K_0} |y|^{n-\ell} \geq \\
&\geq \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \mathrm{Vol}_\ell(K) \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-\ell} \mathrm{diam}(K)^{n-\ell} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^n \mathrm{Vol}_\ell(K)\,\mathrm{diam}(K)^{n-\ell}
\end{aligned}$$

הוכחת המשפט:

נעשה אינטגרציה בקורדינאטות פולאריות. נסמן ב-σ_n את מידת ההסתברות על הספירה, אז

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_n(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K = \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty \mathbf{1}_K(r\theta)\, r^{n-1} dr\right) d\theta \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \int_0^\infty \left(\int_{G_{n,\ell}} \left(\int_{S^{n-1}\cap E} \mathbf{1}_K(r\theta)\, r^{n-1} d\sigma_E(\theta)\right) d\mu_{n,\ell}(E)\right) dr \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \int_{G_{n,\ell}} \left(\int_{S^{n-1}\cap E} \int_0^\infty \mathbf{1}_K(r\theta)\, |r\theta|^{n-\ell} r^{\ell-1} dr d\sigma_E(\theta)\right) d\mu_{n,\ell}(E) \\
&= \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(S^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}_{\ell-1}\left(S^{\ell-1}\right)} \int_{G_{n,\ell}} \left(\int_E \mathbf{1}_K(x)\, |x|^{n-\ell} dx\right) d\mu_{n,\ell}(E) \\
&= \frac{n\mathrm{Vol}_n(B^n)}{\ell\mathrm{Vol}_\ell(B^\ell)} \int_{G_{n,\ell}} \left(\int_{K\cap E} |x|^{n-\ell} dx\right) d\mu_{n,\ell}(E) \\
(lemma) &\geq c^n \cdot \frac{n}{\ell} \cdot \frac{\mathrm{Vol}_n(B^n)}{\mathrm{Vol}_\ell(B^\ell)} \int_{G_{n,\ell}} |K\cap E| \cdot \mathrm{diam}(K\cap E)^{n-\ell} d\mu_{n,\ell}(E)
\end{aligned}$$

נעלה בחזקת $1/n$ ונקבל

$$\frac{\mathrm{Vol}_n(K)^{1/n}}{\mathrm{Vol}_n(B^n)^{1/n}} \geq c \cdot \left(\int_{G_{n,\ell}} \frac{\mathrm{Vol}_\ell(K\cap E)}{\mathrm{Vol}_\ell(B^\ell)} \mathrm{diam}(K\cap E)^{n-\ell}\right)^{1/n}$$

כלומר

$$\int_{G_{n,\ell}} \left(\mathrm{v.rad.}(K\cap E)^\lambda\, \mathrm{diam}(K\cap E)^{1-\lambda}\right)^n \leq \left[C \cdot \mathrm{v.rad.}(K)\right]^n$$

ומא"ש מרקוב,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}_E\left[\mathrm{v.rad.}\,(K\cap E)^{\lambda}\,\mathrm{diam}\,(K\cap E)^{1-\lambda}\geq 2C\mathrm{v.rad.}\,(K)\right]\\&\leq\frac{\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{v.rad.}\,(K\cap E)^{\lambda}\,\mathrm{diam}\,(K\cap E)^{1-\lambda}\right)^{n}\right]}{[2C\cdot\mathrm{v.rad.}\,(K)]^{n}}\leq\frac{[C\cdot\mathrm{v.rad.}\,(K)]^{n}}{[2C\cdot\mathrm{v.rad.}\,(K)]^{n}}\leq\frac{1}{2^{n}}\end{aligned}$$

נראה יישומים של המשפט שהוכחנו.

מסקנה: נניח $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור, $B_2^n\subset K$, עם $\mathrm{v.rad.}\,(K)\leq R$. יהי $E\in G_{n,\frac{n}{2}}$ תת-מרחב אקראי. אזי בסיכוי לפחות $1-e^{-n}$,

$$B_2^n\cap E\subset K\cap E\subset cR^2\cdot\left(B_2^n\cap E\right)$$

כלומר K "כמעט לגמרי" תחום בין B_2^n ל-$cR^2\cdot B_2^n$.

הערה: במקום $\frac{n}{2}$ אפשר לקחת λn, וצריך להחליף את cR^2 באיזושהי פונקציה של λ ו-R.

הוכחה: ראינו שבסיכוי לפחות $1-e^{-n}$,

$$\mathrm{v.rad.}\,(K\cap E)^{1/2}\cdot\mathrm{diam}\,(K\cap E)^{1/2}\leq C\cdot\mathrm{v.rad.}\,(K)$$

מכיוון ש-$B_2^n\subset K$, יודעים ש-$B_2^n\cap E\subset K\cap E$, ולכן $\mathrm{v.rad.}\,(K\cap E)\geq 1$ ו-

$$\mathrm{diam}\,(K\cap E)^{1/2}\leq C\cdot R$$

במילים אחרות, $K\cap E\subset 2\left(CR^2\right)B_2^n$.

דוגמא: ניקח $K=\sqrt{n}\cdot B_1^n$.

אזי: $B_2^n\subset K$ ו-$\mathrm{v.rad.}\,(K)\leq const$. ולכן עבור תת-מרחב אקראי E, $\frac{n}{2}$ מימדי,

$$B_2^n\cap E\subset\sqrt{n}B_1^n\cap E\subset C\cdot(B\cap E)$$

ניזכר שנורמות מתאימות לגופים קמורים וסימטריים:

$$\|x\|_K=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda K\}$$

אם $K_1\subset K_2$, אז $\|\cdot\|_{K_1}\geq\|\cdot\|_{K_2}$.

כלומר הנורמה המושרית בתת-מרחב אקראי ממימד $\frac{n}{2}$ ב-ℓ_1^n היא בפקטור קבוע מה-נורמה האוקלידית:

$$\forall x \in E \qquad c\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

מזה נובע משפט Kashin: עבור n זוגי, קיימים שני תתי-מרחבים מאונכים, $E, E^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$ ממימד $\frac{n}{2}$ כך שמתקיים

$$\forall x \in E \cup E^{\perp} \qquad \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

הוכחה: הסיכוי ש-E לא יקיים זאת הוא e^{-n}, וכנ"ל הסיכוי ש-$E^{\perp}$ לא יקיים את התנאי. לכן בסיכוי גבוה שניהם יקיימו אותו, והקורלציה לא הורסת את האפשרות אלא רק משפרת אותה (union bound)

זה משפט מאוד מפתיע, כי ℓ_1 ו-ℓ_2 הם מרחבים מאוד שונים.

אפשר לנסח גם בצורות אחרות: לכל תת-מרחב n-מימדי $E \subset L^1([0,1])$ יש פירוק Kashin: קיים $F \subset E$ כך ש-

$$\forall f \in F \cup F^{\perp} \qquad c\|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

לגופים כמו B_1^n שהרדיוס-נפח שלהם הוא "בערך" כמו הרדיוס-נפח של הכדור החסום (או אליפסואיד חסום), קוראים גופים עם finite volume ratio (מנת נפח חסומה).

מנת נפח של גוף מוגדרת להיות

$$\inf_{\mathcal{E} \subset K} \left(\frac{\mathrm{Vol}_n(K)}{\mathrm{Vol}_n(\mathcal{E})} \right)^{1/n}$$

כאשר ה-inf הוא על כל האליפסואידים $\mathcal{E}$ כך ש-$\mathcal{E} \subset K$.

מסקנה: אם $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי עם מנת נפח לכל היותר R, אז קיים תת-מרחב $E \in G_{n,n/2}$ שהחתך הוא בערך אליפסואיד

$$\mathcal{E} \subset K \cap E \subset cR^2 \cdot \mathcal{E}$$

כאשר $\mathcal{E}$ הוא אליפסואיד סימטרי ביחס לראשית.

הוכחה: נפעיל העתקה לינארית שמעבירה את האליפסואיד המקסימלי להיות כדור היחידה, ואז יחס הנפח הוא רדיוס הנפח. מהטענה הקודמת, יש בפוזיציה הזו חתכים שהם בערך כדור, ולכן ל-K יש חתכים שהם בערך אליפסואיד. (יש פה רק קיום, לא הסתברות גבוהה)

יש עוד דוגמאות לגופים עם מנת נפח חסומה, למשל $B\left(\ell_p^n\right)$ לכל $1<p<2$.

בכל מה שעשינו לעיל השתמשנו בא"ש

$$\operatorname{diam}\left(K\cap E\right)^{1-\lambda}\cdot\text{v.rad.}\left(K\cap E\right)^{\lambda}\leq C\cdot\text{v.rad.}\left(K\right)$$

כדי לקבל חסם מלעיל ל-$\operatorname{diam}\left(K\cap E\right)$.

מנת נפח חסומה היא דרך אחת לקבל כזה חסם, אם לא חייבים חסם דטרמיניסטי, ולא חייבים להכיל כדור.

יש המון שיטות להראות שהקוטר של חתכים הוא קטן, למשל low M^{*} estimate.

11 משפט בורגיין-מילמן (14/5/2014)

בשיעור שעבר עשינו כמה דברים:

- מנות נפח - בהסתברות גדולה ($1-e^{-n}$) מתקיים לתת-מרחב $E\subset\mathbb{R}^n$ ממימד $\dim E=\lambda n$

$$\operatorname{diam}\left(K\cap E\right)^{1-\lambda}\cdot\text{v.rad.}\left(K\cap E\right)^{\lambda}\leq C\cdot\text{v.rad.}\left(K\right)$$

- הלמה הראשונה בהוכחת משפט מילמן: אם X וקטור מקרי לוג-קעור ב-$\mathbb{R}^n$, עם צפיפות f, שמקיים $\mathbb{E}X=0$ ו-$\operatorname{Cov}\left(X\right)$ מטריצה סקלארית, אז <u>לכל</u> תת-מרחב $E\subset\mathbb{R}^n$ ממימד $\dim E=k$ מתקיים

$$\left(\int_E f\right)^{1/(n-k)}\geq c\cdot\frac{f\left(0\right)^{1/n}}{L_X}$$

  - כזכור, L_X הוא הקבוע האיזוטרופי, יודעים ש-$L_X>const$, השערת העל-מישור (השערת החתך) היא $L_X<const$.

עכשיו נדבר על תורת בורגיין-מילמן.

זו מכילה את א"ש בורגיין-מילמן, ברון מינקובסקי הפוך, משפט היטל החתך, אל-יפסואיד מילמן, וגרסאות "רכות" של השערת העל-מישור (שיודעים להוכיח).

בהינתן $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי $K=-K$, הגוף הפולרי (הדואלי) הוא

$$K^{0}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\forall y\in K.\ \left\langle x,y\right\rangle\leq1\right\}$$

תכונות:

1. $K^{00}=\overline{K}$.
2. יחס הפולאריות הופך את כיוון ההכלה.

(א) $K\subset RB^n \iff K^0\supset \frac{1}{R}B^n$.

3. אם $E\subset\mathbb{R}^n$ תת-מרחב לינארי, ו-Proj_E ההיטל האורתוגונלי, אז

$$\left(\mathrm{Proj}_E K\right)^0=K^0\cap E$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Proj}_E K\right)^0 &= \left\{x\in E:\sup_{y\in\mathrm{Proj}_E K}\langle x,y\rangle\le 1\right\}\\ &= \left\{x\in E:\sup_{y\in K}\langle x,y\rangle\le 1\right\}\\ &= K^0\cap E\end{aligned}$$

(כקבוצות ב-$\mathbb{R}^n$ ולא ב-E, מתקיים $\left(\mathrm{Proj}_E K\right)^0=\left(K^0\cap E\right)+E^{\perp}$)

4. א"ש סנטלו: אם $K=-K\subset\mathbb{R}^n$ אז

$$\mathrm{Vol}_n\left(K\right)\cdot\mathrm{Vol}_n\left(K^0\right)\le\mathrm{Vol}_n\left(B^n\right)^2$$

זה נכון גם בלי הנחות קמירות, לכל קבוצה מדידה, חסומה וסימטרית עם מידה חיובית ב-$\mathbb{R}^n$.

באופן שקול,

$$\mathrm{v.rad.}\left(K\right)\cdot\mathrm{v.rad.}\left(K^0\right)\le 1$$

מקרה השיוויון כאשר K קמור קומפקטי הוא באליפסואידים.

נסמן $S\left(K\right)=\mathrm{v.rad.}\left(K\right)\cdot\mathrm{v.rad.}\left(K^0\right)$. זה נקרא בדרך כלל מכפלת מאלר (Mahler product)

טענה: לכל $K\subset\mathbb{R}^n$ סימטרי ($K=-K$) והעתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ הפיכה, מתקיים $S\left(K\right)=S\left(T\left(K\right)\right)$.

הסבר:

$$\begin{aligned}S\left(T\left(K\right)\right) &= \mathrm{v.rad.}\left(T\left(K\right)\right)\cdot\mathrm{v.rad.}\left(\left(T\left(K\right)\right)^0\right)\\ &= \left|\det T\right|^{1/n}\mathrm{v.rad.}\left(K\right)\cdot\mathrm{v.rad.}\left(\left(T^*\right)^{-1}K^0\right)\\ &= \left|\det T\right|^{1/n}\mathrm{v.rad.}\left(K\right)\cdot\left|\det\left(T^{-1}\right)\right|^{1/n}\mathrm{v.rad.}\left(K^0\right)=S\left(K\right)\end{aligned}$$

עוד עובדה, שלא הזכרנו בעבר: מרחב הגופים הקמורים מודולו העתקות לינאריות הוא קומפקט. נוכיח בהמשך משהו יותר קונקרטי שיגרור את התכונה הזו. מזה ברור של-$S(K)$ צריך להיות מינימום ולא רק מקסימום.

למה: לכל $K \subset \mathbb{R}^n$ קמור וסימטרי, $S(K) \geq c/n$.

הוכחה: נפעיל העתקה לינארית, ונניח ש-$X \sim \mathrm{Unif}(K)$ הוא איזוטרופי, כלומר $\mathbb{E}X = 0$ ו-$\mathrm{Cov}(X) = \mathrm{Id}$.

נוכיח ש-$B^n \subset K \subset CnB^n$.

כדי לראות את ההכלה הראשונה, ניקח $\theta \in S^{n-1}$. אז $\mathbb{E}(X \cdot \theta)^2 = 1$. לכן $\|X \cdot \theta\|_\infty \geq 1$. כלומר

$$\forall \theta \in S^{n-1} \qquad \sup_{x \in K} |\langle x, \theta \rangle| \geq 1$$

וזה אומר ש-$K^0 \subset B^n$, ולכן $B^n \subset K$.

בכיוון ההפוך, נקבע שוב $\theta \in S^{n-1}$. אז כמו שראינו בעבר,

$$c_1 \leq \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(K \cap \theta^\perp\right) \sqrt{\mathbb{E}(X \cdot \theta)^2}}{\mathrm{Vol}_n(K)} \leq c_2$$

לכן

$$\forall \theta \in S^{n-1} \qquad \mathrm{Vol}_{n-1}\left(K \cap \theta^\perp\right) \geq c_1 \mathrm{Vol}_n(K)$$

לכל $x \in K$, החרוט $\mathrm{conv}\left(x, K \cap \theta^\perp\right)$ מוכל ב-K מקמירות, והנפח שלו הוא

$$\mathrm{Vol}_n\left(\mathrm{conv}\left(x, K \cap \theta^\perp\right)\right) = \frac{1}{n} |x \cdot \theta| \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}\left(K \cap \theta^\perp\right)$$

כלומר

$$\forall \theta \in S^{n-1}, x \in K \qquad |x \cdot \theta| \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}\left(K \cap \theta^\perp\right) \leq n \mathrm{Vol}_n(K)$$

ואם נחלק את שני האי-שיוויונים האלה נקבל

$$\forall \theta \in S^{n-1}, x \in K \qquad |x \cdot \theta| \leq cn$$

כלומר $\frac{1}{cn}\theta \in K^0$, ולכן $\frac{1}{cn}B^n \subset K^0$ ו-$K \subset cnB^n$.

מההכלות $B^n \subset K \subset CnB^n$ נקבל $\frac{1}{Cn}B^n \subset K^0 \subset B^n$ ולכן

$$S(K) = \mathrm{v.rad.}(K) \cdot \mathrm{v.rad.}\left(K^0\right) \geq 1 \cdot \frac{1}{Cn}$$

נשים לב שבעצם הוכחנו פה שלכל גוף קמור וסימטרי ב-$\mathbb{R}^n$ יש אליפסואיד $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים

$$\mathcal{E} \subset K \subset cn\mathcal{E}$$

(אם K איזוטרופי, $\mathcal{E}$ יכול להיות הכדור B^n, ואחרת משתמשים בהעתקה הלינארית שמעבירה לפוזיציה איזוטרופית)

נרצה לקבל הערכה יותר טובה ל-$S(K)$.

הערה: לגבי אליפסואידים יש הכלה עם $\sqrt{n}$, זה נקרא אליפסואיד ג'ון. זה האופטימום בפרמטר הזה.

א"ש בורגיין-מילמן: לכל גוף $K \subset \mathbb{R}^n$ קמור וסימטרי, $S(K) > const$.

הרעיון יהיה "לעקוף" את השערת העל-מישור, למשל ע"י שינוי משמעותי בצפיפות.

למה 2: יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור, $K = -K$. נניח ש-$f : K \to [0, \infty)$ צפיפות הסתברות לוג-קעורה שחסומה

$$\forall x \in K \qquad e^{-2n} \leq f(x) \leq e^{2n}$$

עם $\mathrm{Cov}(f)$ סקלארית. יהי $1 \leq \ell \leq n$, ונסמן $\lambda = n/\ell$. אז עבור תת-מרחב $E \in G_{n,\ell}$ שנבחר לפי מידת Haar, בסיכוי לפחות $1 - e^{-n}$ מתקיים:

1. $\mathrm{v.rad.}(K \cap E) \geq c_\lambda \sqrt{n} L_f^{1-\frac{1}{\lambda}}$ (בהסתברות 1)
2. $\mathrm{diam}(K \cap E) \leq c_\lambda \sqrt{n} L_f$
3. $S(K \cap E)^\lambda \geq \frac{c_\lambda}{L_f}$

הערה: מכך ש-f צפיפות הסתברות, ו-$\max |\log f| < 2n$ נובע ש-$\mathrm{v.rad.}(K) \sim \sqrt{n}$.

הוכחה: יהי X וקטור מקרי שצפיפותו f. נסמן $x_0 = \mathbb{E}X$.

1. יהי $E \in G_{n,\ell}$. מלמה 1,

$$\left(\int_{E+x_0} f \right)^{\frac{1}{n-\ell}} \geq c \cdot \frac{f(x_0)^{1/n}}{L_f}$$

לכן

$$\mathrm{Vol}_\ell (K \cap (E + x_0)) \geq e^{-2n} \int_{E+x_0} f \geq e^{-2n} \left(c \frac{e^{-2}}{L_f} \right)^{n-\ell} \geq \tilde{c}_\lambda^n \cdot \frac{1}{L_f^{n(1-\lambda)}}$$

איך נעבור לא"ש לגבי חתך דרך הראשית? נשתמש בא"ש ברון-מינקובסקי. מהסימטריה $K=-K$ מקבלים

$$-\left(K\cap\left(E+x_0\right)\right)=K\cap\left(E-x_0\right)$$

ולכן $\left|K\cap\left(E+x_0\right)\right|=\left|K\cap\left(E-x_0\right)\right|$ ומב"מ

$$\left|\frac{\left(K\cap\left(E+x_0\right)\right)+\left(K\cap\left(E-x_0\right)\right)}{2}\right|\geq\frac{1}{2}\left|K\cap\left(E+x_0\right)\right|+\frac{1}{2}\left|K\cap\left(E-x_0\right)\right|=\left|K\cap\left(E+x_0\right)\right|$$

אבל מקמירות מתקיים

$$\frac{\left(K\cap\left(E+x_0\right)\right)+\left(K\cap\left(E-x_0\right)\right)}{2}\subset K\cap E$$

ולכן

$$\left|K\cap E\right|\geq\left|K\cap\left(E+x_0\right)\right|$$

כלומר המינימום מתקבל בחתך שעובר דרך x_0. רדיוס הנפח הוא

$$\begin{aligned}\text{v.rad.}\left(K\cap\left(E+x_0\right)\right) &= \left(\frac{\text{Vol}_\ell\left(K\cap E\right)}{\text{Vol}_\ell\left(B^\ell\right)}\right)^{1/\ell}\\ &\geq \tilde{c}_\lambda^{1/\lambda}\cdot\frac{1}{L_f^{\frac{1}{\lambda}(1-\lambda)}}\cdot\underbrace{c\sqrt{\ell}}_{\text{v.rad.}(B^\ell)}\\ &= \tilde{c}_\lambda^{1/\lambda}\cdot c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{n}\cdot L_f^{\frac{1}{\lambda}(\lambda-1)}=c_\lambda\sqrt{n}L_f^{1-\frac{1}{\lambda}}\end{aligned}$$

2. בסיכוי $1-e^{-n}$,

$$\text{diam}\left(K\cap E\right)^{1-\lambda}\cdot\text{v.rad}\left(K\cap E\right)^{\lambda}\leq C\cdot\text{v.rad}\left(K\right)$$

ואז מתקיים

$$\begin{aligned}\text{diam}\left(K\cap E\right)^{1-\lambda} &\leq \frac{c\sqrt{n}}{\text{v.rad.}\left(K\cap E\right)^{\lambda}}\\ &\leq \overline{c}_\lambda\sqrt{n}\left(\sqrt{n}L_f^{1-\frac{1}{\lambda}}\right)^{-\lambda}\\ &= \overline{c}_\lambda\left(\sqrt{n}\right)^{1-\lambda}L_f^{1-\lambda}\end{aligned}$$

כלומר

$$\text{diam}\left(K\cap E\right)\leq\tilde{c}_\lambda\sqrt{n}L_f$$

3. סעיף 1 אומר

$$\text{v.rad.}\left(K\cap E\right)\geq c_{\lambda}\sqrt{n}L_{f}^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

מסעיף 2 נובע ש-$K\cap E\subset\tilde{c}_{\lambda}\sqrt{n}L_{f}B^{E}$, ולכן

$$\left(K\cap E\right)^{0}\supset\frac{1}{\tilde{c}_{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{n}L_{f}}\cdot B^{E}$$

ולכן

$$\text{v.rad.}\left(\left(K\cap E\right)^{0}\right)\geq\hat{c}_{\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}L_{f}}$$

ולסיכום

$$\begin{aligned}S\left(K\cap E\right) & = \text{v.rad.}\left(K\cap E\right)\cdot\text{v.rad.}\left(\left(K\cap E\right)^{0}\right)\\ & \geq c_{\lambda}\cdot\sqrt{n}L_{f}^{1-\frac{1}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}L_{f}}=\frac{c_{\lambda}}{L_{f}^{1/\lambda}}\end{aligned}$$

מסקנה: יהי $K\subset\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור, $K=-K$. נניח שקיימת צפיפות הסתברות f לוג-קעורה $f:K\to\mathbb{R}$ עם

$$\frac{\sup f}{\inf f}\leq e^{4n}$$

אז לכל $1\leq\ell\leq n$ קיים $E\in G_{n,\ell}$ עם $S\left(K\cap E\right)^{\lambda}\geq c_{\lambda}/L_{f}$, כאשר $\lambda=\frac{\ell}{n}$ ו-c_{λ} קבוע שתלוי רק ב-λ ולא ב-n.

הוכחה: נובע מהלמה האחרונה. מפעילים העתקה לינארית שמתקנת כך ש-$\sup f=$ e^{2n} וש-$\text{Cov}\left(f\right)$ סקלארית. מאבדים את ההסתברות הגבוהה אבל עדיין קיים תת-מרחב מתאים, וכיוון ש-S אינווריאנטי להתעקות לינאריות, הסעיף הזה עדיין מתקיים.

מטרתנו היא למצוא f עם $\frac{\sup f}{\inf f}\leq e^{4n}$ כך ש-L_{f} חסום. אחר כך נעבור בקלות יחסית מחסם תחתון על $S\left(K\cap E\right)$ לחסם תחתון על $S\left(K\right)$.

שלב ב' של ההוכחה: טרנספורם לפלאס (Laplace).

הגדרה: בהינתן וקטור מקרי X ב-$\mathbb{R}^{n}$, נסמן לכל $y\in\mathbb{R}^{n}$

$$\Lambda_{X}\left(y\right)=\log\mathbb{E}\left(e^{\left\langle X,y\right\rangle }\right)=\log\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{y\cdot x}f\left(x\right)dx\in\left[-\infty,\infty\right]$$

כאשר f הצפיפות של X, אם קיימת.

ל-$e^{\Lambda_{x}}$ קוראים טרנספורם לפלאס.

טענה: יהי X וקטור מקרי לוג-קעור ב-$\mathbb{R}^{n}$. אז

2. בקבוצה $\{\Lambda_X < +\infty\}$ מותר לגזור מתחת לסימן האינטגרל, כלומר אם $\Lambda_x(y) < +\infty$,

$$\forall\alpha \qquad \partial^\alpha\left(e^{\Lambda_X(y)}\right) = \mathbb{E}\left[X^\alpha e^{y\cdot X}\right]$$

כאשר α מולטי-אינדקס $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\alpha_n}$, $y^\alpha = y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}$.

תזכורת: אם $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ לוג-קעורה ואינטגרבילית, אז קיימים $A,B>0$ כך ש-

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \qquad f(x)\le Ae^{-B|x|}$$

הוכחת הטענה:

נניח $\Lambda_X(y_0)<\infty$, כלומר

$$\int \underbrace{f(x)\,e^{y_0\cdot x}}_{f_{y_0}(x)}dx<\infty$$

אזי $f_{y_0}(x) = f(x)\,e^{y_0\cdot x}$ אינטגרבילית ולוג-קעורה, ולכן $f_{y_0}(x)$ דועכת אקספוננציאית באינסוף, כלומר קיים $\delta>0$ כך ש-

$$\forall\,|z|<\delta \qquad \int e^{z\cdot x}f_{y_0}(x)\,dx<\infty$$

אבל זה $\exp(\Lambda_X(y_0+z))$, ולכן Λ_X סופי ב-$B(y_0,\delta)$.

למה מותר לגזור? נניח ב-0 וביחס ל-y_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_1}\left(e^{\Lambda_x(y)}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\int_{\mathbb{R}^n}e^{y\cdot x}f(x)\,dx\right]\Bigg|_{y=0}\\
&= \lim_{y_1\to0}\frac{1}{y_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{y_1x_1}f(x)\,dx-1\right)\\
&= \lim_{y_1\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{e^{y_1x_1}-1}{y_1}\right]f(x)\,fx
\end{aligned}$$

רוצים להכניס את הגבול פנימה, בשביל להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת צריך מזו'רנטה אינטרבילית. נשתמש בכך ש-$\left|\frac{e^s-1}{s}\right|\le e^s$, ולכן

$$\left|\frac{e^{y_1x_1}-1}{y_1}\right|f(x)\le|x_1|\,e^{y_1x_1}f(x)$$

ואם y_1 קטן מספיק אז זה אינטגרבילי. נחליף את הגבול והאינטגרל, ונקבל

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(e^{\Lambda_X(y)}\right)(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{y_1\to 0}\frac{e^{y_1x_1}-1}{y_1}f(x)\,fx=\int_{\mathbb{R}^n}x_1f(x)\,dx$$

שאר ההוכחה היא תרגיל, אין רעיונות חדשים, רק סימונים.

סימון: עבור X וקטור מקרי לוג-קעור ב-$\mathbb{R}^n$ ו-$\Lambda_X(y)<+\infty$ נגדיר את X_y להיות משתנה מקרי שצפיפותו בנקודה x היא $e^{-\Lambda(y)}f(x)\,e^{y\cdot x}$.

טענה: יהי X ו"מ לוג-קעור, $y\in\mathbb{R}^n$ כך ש-$\Lambda_X(y)<+\infty$ אזי

$$\begin{aligned}\nabla\Lambda_X(y)&=\mathbb{E}X_y\\ \nabla^2\Lambda_X(y)&=\mathrm{Cov}(X_y)\end{aligned}$$

(בהסתברות אומרים שטרנספורם לפלאס הלוגריתמי נותן פונקציה יוצרת קומולנטים (המומנטים שמתחברים כשמשתנים הם ב"ת))

הוכחה:

מותר לגזור מתחת לסימן האינטגרל, ולכן

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Lambda(y)}{\partial y_i}&=\frac{\int_{\mathbb{R}^n}x_ie^{y\cdot x}f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}e^{y\cdot x}f(x)\,dx}=\mathbb{E}(X_y\cdot e_i)\\ \frac{\partial^2\Lambda(y)}{\partial y_i\partial y_j}&=\frac{\int_{\mathbb{R}^n}x_ix_je^{y\cdot x}f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}e^{y\cdot x}f(x)\,dx}-\frac{\int_{\mathbb{R}^n}x_ie^{y\cdot x}f(x)\,dx\cdot\int_{\mathbb{R}^n}x_je^{y\cdot x}f(x)\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{y\cdot x}f(x)\,dx\right)^2}\\ &=\mathbb{E}\left[(X_y\cdot e_i)(X_y\cdot e_j)\right]-\mathbb{E}(X_y\cdot e_i)\,\mathbb{E}(X_y\cdot e_j)=\mathrm{Cov}(X_y)\,e_i\cdot e_j\end{aligned}$$

בפרט, $\nabla^2\Lambda_X$ היא מטריצה מוגדרת חיובית לכל $y\in\{\Lambda_X<+\infty\}$. נובע מזה ש-$\Lambda_X$ פונקציה קמורה, אבל את זה קל לראות יותר בפשטות, מקושי-שוורץ:

$$\Lambda_X\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\log\mathbb{E}\sqrt{e^{y_1\cdot X}e^{y_2\cdot X}}\le\log\sqrt{\mathbb{E}e^{y_1\cdot X}\cdot\mathbb{E}e^{y_2\cdot X}}=\frac{\Lambda_X(y_1)+\Lambda_X(y_2)}{2}$$

ולמעשה, אם X לא נתמך בעל-מישור, הפונקציה $\Lambda_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ היא קמורה ממש, כלומר $\nabla^2\Lambda_X(y)=\mathrm{Cov}(X_y)>0$.

שתי הערות על הגרדיאנט של פונקציה קמורה ממש:

1. אם X נתמך בקבוצה קמורה K, גם X_y נתמך ב-K, ולכן $\mathbb{E}X_y\in K$.
2. אם $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קמורה ממש וחלקה, אז $x\mapsto\nabla F(x)$ היא העתקה חד-חד ערכית.

הוכחה: אם $x\neq y\in\mathbb{R}^n$, נביט ב-$[x,y]\subset\mathbb{R}^n$ ונגדיר $f(t)=F((1-t)x+ty)$. זו פונקציה קמורה ממש וחלקה, ולכן $f'(0)<f'(1)$. אך

$$\begin{aligned}f'(0)&=\nabla F(x)\cdot(y-x)\\ f'(1)&=\nabla F(y)\cdot(y-x)\end{aligned}$$

מכיוון ש-$f'(0)\neq f'(1)$, גם $\nabla F(x)\neq\nabla F(y)$.

טענה: נניח $K\subset\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור, ונניח $X\sim\text{Unif}\left(K\right)$. אז

$$\int_{\mathbb{R}^{n}}\det\text{Cov}\left(X_{y}\right)dy\leq\text{Vol}_{n}\left(K\right)$$

הוכחה:

ההעתקה $y\mapsto\nabla\Lambda\left(y\right)$ חלקה וחח"ע, אז מותר לבצע החלפת משתנים

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n}}\det\text{Cov}\left(X_{y}\right)dy & = & \int_{\mathbb{R}^{n}}\det\nabla^{2}\Lambda\left(y\right)dy\\
\left[z=\nabla\Lambda\left(y\right)\right] & = & \int_{\nabla\Lambda\left(\mathbb{R}^{n}\right)}1\cdot dz=\text{Vol}_{n}\left(\nabla\Lambda\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)\leq\text{Vol}_{n}\left(K\right)\end{aligned}$$

כי $\nabla\Lambda\left(y\right)=\mathbb{E}X_{y}\in K$ לכל y.

מסקנה: יהי $K\subset\mathbb{R}^{n}$, ויהי $\varepsilon>0$. אז קיים $y\in\varepsilon nK^{0}$ כך ש-$L_{X_{y}}\leq c/\sqrt{\varepsilon S\left(K\right)}$, כאשר $X\sim\text{Unif}\left(K\right)$.

נוכיח את זה בשבוע הבא.

12 המשך בורגיין-מילמן, אליפסואיד מילמן (21/5/2014)

השיעור נסיים את הוכחת א"ש בורגיין-מילמן.

כזכור,

$$S\left(K\right)=\text{v.rad}\left(K\right)\cdot\text{v.rad.}\left(K^{0}\right)$$

מטרתנו היא להוכיח, עבור גוף קמור $K\subset\mathbb{R}^{n}$ המקיים $K=-K$ שמתקיים $S\left(K\right)>const$.

זו "גרסא חלשה של השערת העל-מישור", ובהוכחה אנחנו משתדלים לעקוף את הצורך להשתמש בה.

בשיעור שעבר הוכחנו למה: אם $K\subset\mathbb{R}^{n}$ עם $K=-K$, ו-$f:K\to[0,\infty)$ צפיפות לוג-קעורה עם $\frac{\sup f}{\inf f}\leq e^{4n}$ אז לכל $1\leq\ell\leq n$ קיים $E\in G_{n,\ell}$ כך שעבור $\lambda=\ell/n$,

$$S\left(K\cap E\right)^{\lambda}\geq\frac{c_{\lambda}}{L_{f}}$$

כזכור, השערת העל-מישור אומרת שהצפיפות הקבועה תיתן חסם כמו שאנחנו רוצים.

כיצד בונים f עם L_{f} קטן?

הפתרון שלנו: עבור $K\subset\mathbb{R}^{n}$ עם $K=-K$, ו-$y\in\mathbb{R}^{n}$, הגדרנו וקטור מקרי X_{y} שצפיפותו פרופורציונית ל-$x\mapsto e^{x\cdot y}\mathbf{1}_{K}\left(x\right)$. ליתר דיוק, הצפיפות שווה

$$\frac{1}{z_{y}}\cdot e^{x\cdot y}\mathbf{1}_{K}\left(x\right)$$

כאשר

$$\begin{aligned} z_y &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{x\cdot y}\mathbf{1}_K(x) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} (1+x\cdot y)\,\mathbf{1}_K(x)\,dx = \mathrm{Vol}_n(K) \end{aligned}$$

(כי מרכז הכובד ב-0)

חישוב שהתבסס על החלפת משתנים מראה

$$\int_{\mathbb{R}^n} \det \mathrm{Cov}(X_y)\,dy \leq \mathrm{Vol}_n(K)$$

ליתר דיוק,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \det \mathrm{Cov}(X_y)\,dy = \int \det \nabla^2 \Lambda dy = \mathrm{Vol}_n(\nabla\Lambda(\mathbb{R}^n))$$

טענה: לכל $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי, ולכל $0 < \varepsilon < 1$, קיים $y \in \varepsilon n K^0$ כך שמתקיים

$$L_{X_y} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon s(K)}}$$

הוכחה:

ברור שמתקיים

$$\int_{\varepsilon n K^0} \det \mathrm{Cov}(X_y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \ldots \leq \mathrm{Vol}_n(K)$$

ולכן הממוצע

$$\frac{1}{|\varepsilon n K^0|}\int_{\varepsilon n K^0} \det \mathrm{Cov}(X_y)\,dy \leq \frac{|K|}{|\varepsilon n K^0|}$$

מכאן שקיים $y \in \varepsilon n K^0$ שעבורו $\det \mathrm{Cov}(X_y) \leq \frac{|K|}{|\varepsilon n K^0|}$. נראה שזה y המבוקש.

$$\begin{aligned} L_{X_y} &\leq (\det \mathrm{Cov}(X_y))^{1/2n} \cdot \Big(\sup \underbrace{f_{X_y}}_{density}\Big)^{1/n} \leq \left(\frac{|K|}{|\varepsilon n K^0|}\right)^{1/2n} \cdot \sup_{x\in K}\left(\frac{e^{x\cdot y}\mathbf{1}_K(x)}{z_y}\right)^{1/n} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{|K|}{|nK^0|}\right)^{1/n} \cdot \left(\frac{e^{\varepsilon n}}{|K|}\right)^{1/n} \leq \frac{e^{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{1}{|nK^0|\cdot|K|}\right)^{1/2n} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{|B^n|^{2/n} s(K)}} \end{aligned}$$

מכיוון ש-$|B^n|^{2/n} \sim \frac{1}{n}$, קיבלנו

$$L_{X_y} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s(K)}}$$

כיוון ש-X_y וקטור מקרי לוג-קעור על K, עם

$$\frac{\sup_K f_{X_y}}{\inf_K f_{X_y}} = \frac{\sup_{x\in K} e^{x\cdot y}}{\inf_{x\in K} e^{x\cdot y}} \leq e^{2\varepsilon n}$$

אפשר להשתמש בלמה ולקבל

מסקנה: יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור, $K = -K$. אזי לכל $1 \leq \ell < n$ קיים $E = G_{n,\ell}$ שעבורו

$$s(K\cap E)^{\lambda} \geq \frac{c_\lambda}{L_f} \geq c_\lambda \sqrt{s(K)}$$

כאשר $\lambda = \ell/n$ ו-$c_\lambda > 0$ קבוע שתלוי רק ב-λ.

הוכחת המסקנה: נפעיל את הטענה עם $\varepsilon = 1/2$.

הערה לגבי c_λ: זה קבוע שתלוי רק ב-λ, אבל הוא כנראה שואף ל-0 כאשר $\lambda \to 0^+$ או $\lambda \to 1^-$. לכן חייבים לעבור דרך מימד ביניים.

משפט: (א"ש רוג'רס-שפרד)

יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור ו-$E \subset \mathbb{R}^n$ תת-מרחב. אזי

$$|K\cap E| \cdot |\mathrm{Proj}_{E^\perp} K| \leq 4^n |K|$$

תרגיל: לשפר את 4^n ל-$\binom{n}{\ell}$ כאשר $\ell = \dim E$.

הוכחה: יהי $y \in \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Proj}_{E^\perp} K$. אז קיים $x \in K\cap(2y+E)$, ולכן $\mathrm{conv}(\{x\}\cup(K\cap E)) \subset K$, כלומר $K\cap(y+E)$ מכיל הזזה של $\frac{1}{2}(K\cap E)$.

לפיכך,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_n(K) &= \int_{\mathrm{Proj}_{E^\perp}(K)} |K\cap(y+E)|\,dy \\
&\geq \int_{\frac{1}{2}\mathrm{Proj}_{E^\perp}(K)} |K\cap(y+E)|\,dy \\
&\geq \left|\frac{K\cap E}{2}\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{Proj}_{E^\perp}(K)}{2}\right| = \frac{1}{4^n}|K\cap E|\cdot|\mathrm{Proj}_{E^\perp}(K)|
\end{aligned}$$

הערה: כאשר K גוף סימטרי ו-E תת-מרחב שעובר דרך הראשית, יש גם א"ש בכיוון ההפוך.

תרגיל: להוכיח $|K| \geq |K\cap E|\cdot|\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}K|$ תחת ההנחה $\mathrm{barycenter}\left(K\right)=0$.

מסקנה מרוג'רס-שפרד: לכל $K\subset\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור וסימטרי $K=-K$ ולכל $E\in G_{n,\ell}$ עם $1\leq\ell<n$,

$$s\left(K\right)\geq c_{\lambda}s\left(K\cap E\right)^{\lambda}\cdot s\left(\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}K\right)^{1-\lambda}$$

כאשר $\lambda=\ell/n$ ו-c_{λ} תלוי רק ב-λ.

הוכחה:

$$\begin{array}{rcl}
|K| & \geq & 4^{-n}\left|K\cap E\right|\cdot\left|\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}K\right|\\
|K|^{0} & \geq & 4^{-n}\left|K^{0}\cap E^{\perp}\right|\cdot\left|\mathrm{Proj}_{E}K^{0}\right|
\end{array}$$

נזכור ש-$\left(K\cap E\right)^{0}=\mathrm{Proj}_{E}\left(K^{0}\right)$, ונקבל

$$s\left(K\right)^{n}=\frac{|K|\cdot\left|K^{0}\right|}{\left|B^{n}\right|^{2}}\geq\frac{16^{-n}}{\left|B^{n}\right|^{2}}\cdot\left|B^{\ell}\right|^{2}s\left(K\cap E\right)^{\ell}\cdot\left|B^{n-\ell}\right|^{2}s\left(\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}K\right)^{n-\ell}$$

כאשר $\ell=\dim E$. לכן

$$s\left(K\right)\geq\left(\frac{\left|B^{\ell}\right|^{2}\cdot\left|B^{n-\ell}\right|^{2}}{16^{n}\left|B^{n}\right|^{2}}\right)^{1/n}\cdot s\left(K\cap E\right)^{\lambda}\cdot s\left(\mathrm{Proj}_{E^{\perp}}K\right)^{1-\lambda}$$

נותר רק לוודא ש-

$$\left(\frac{\left|B^{\ell}\right|\cdot\left|B^{n-\ell}\right|}{4^{n}\left|B^{n}\right|}\right)^{2/n}\geq c_{\lambda}$$

כזכור, $\left|B^{\ell}\right|^{1/\ell}\sim\frac{1}{\sqrt{\ell}}$ עד-כדי קבועים אוניברסליים. לכן

$$\begin{array}{rcl}
\left(\frac{\left|B^{\ell}\right|\cdot\left|B^{n-\ell}\right|}{\left|B^{n}\right|}\right)^{2/n} & \geq & \left(\frac{\left(\frac{c_{1}}{\sqrt{\ell}}\right)^{\ell}\cdot\left(\frac{c_{1}}{\sqrt{n-\ell}}\right)^{n-\ell}}{\left(\frac{c_{2}}{\sqrt{n}}\right)^{n}}\right)^{2/n}=\tilde{c}\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}}\right)^{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{n-\ell}}\right)^{2-2\lambda}n\\
 & = & \tilde{c}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{1-\lambda}>const
\end{array}$$

הוכחת א"ש בורגיין-מילמן:

נסמן

$$s_{N}=\inf\left\{ s\left(K\right):1\leq n\leq N,\,K\subset\mathbb{R}^{n}\,convex,\,K=-K\right\}$$

מטרתנו: $s_N > const$. בשיעור שעבר הוכחנו $s_N > \frac{c}{N}$.

יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ עם $1 \le n \le N$ גוף קמור וסימטרי. ראינו שלכל $1 \le \ell < n$ קיים $E \in G_{n,\ell}$ עם

$$s\left(K \cap E\right)^{\lambda} \ge c_{\lambda}\sqrt{s\left(K\right)}$$

עבור $\lambda = \ell/n$.

מצד שני,

$$s\left(K\right) \ge c_{\lambda} s\left(K \cap E\right)^{\lambda} s\left(\mathrm{Proj}_{E^{\perp}} K\right)^{1-\lambda} \ge \tilde{c}_{\lambda} \cdot \sqrt{s\left(K\right)} \cdot s_N$$

נניח ש-$n \ge 10$, וניקח $\frac{2}{3}n \le \ell \le \frac{3}{4}n$, ונקבל

$$\sqrt{s\left(K\right)} \ge C \cdot s_N^{1-\lambda}$$

ניקח את האינפימום על כך הגופים הקמורים הסימטריים $K \subset \mathbb{R}^n$ עם $n \le N$, ונקבל

$$\sqrt{s_N} \ge C \cdot s_N^{1-\lambda} \implies s_N \ge C^{1/\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)}$$

(מותר לחלק ב-s_N כי עבור על N קבוע זה מספר חיובי)

מסקנה: לכל $K \subset \mathbb{R}^n$ קמור ו-$K = -K$ קיימת צפיפות לוג-קעורה $f : K \to [0, \infty)$ עם $L_f < const$ ו-$\frac{\sup f}{\inf f} \le 10^n$. בבנייה קיבלנו $L_f < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon s(K)}}$ ו-$\frac{\sup f}{\inf f} \le e^{2\varepsilon n}$. מציבים ε כלשהו, ו-$s\left(K\right)$ הוא בעצם חסום.

מסקנה: בחישובים גסים של נפח, אפשר להניח שהקבוע האיזוטרופי חסום, או אם תרצו, שכל גוף קמור מתנהג כמו אליפסואיד האינרציה שלו.

זה מביא אותנו לנושא הבא של הקורס: אליפסואיד M.

הגדרה: יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי. אליפסואיד $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ עם מרכז בראשית נקרא "אליפסואיד מילמן עם קבוע $\alpha > 0$" אם $|K| = |\mathcal{E}|$ ואם $|K \cap \mathcal{E}| \ge \alpha^n |K|$.

משפט: קיים קבוע אוניברסלי $c > 0$ כך שלכל $K \subset \mathbb{R}^n$ קמור וסימטרי, יש אליפסואיד מילמן עם קבוע c.

הוכחה: ההגדרה אינווריאנטית להעתקות לינאריות. ננרמל כך ש-$|K| = 1$.

קיים וקטור מקרי לוג-קעור X על K כך ש-$L_X < const$ ו-$c_1^n \le f_X \le c_2^n$ על K.

נפעיל העתקה אפינית הפיכה $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$T\left(X\right)$ איזוטרופי, כלומר $\mathbb{E}T\left(X\right) = 0$ ו-$\mathrm{Var}\left(T\left(X\right)\right) = \mathrm{Id}$.

טענה: $\det\left(T\right)^{1/n} \sim 1$.

הסבר: מכיוון ש-$L_X = \det \mathrm{Cov}\left(X\right)^{1/2n} \cdot \left(\sup f_X\right)^{1/n}$ ו-$L_X \sim 1$, נובע ש-$\det \mathrm{Cov}\left(X\right)^{1/n} \sim$

1. מכיוון ש-$T\left(X\right)$ איזוטרופי, $\det \mathrm{Cov}\left(T\left(X\right)\right) = 1$. היחס ביניהם הוא $\left(\det T\right)^{2/n}$, ולכן $\det T \sim 1$.

מא"ש מקרוב,

$$\mathbb{P}\left(\left|T\left(X\right)\right| \geq 2\sqrt{n}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left|T\left(X\right)\right|^2}{4n} = \frac{1}{4}$$

ולכן

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \leq \mathbb{P}\left(T\left(X\right) \in 2\sqrt{n}B^n\right)$$

נגדיר $\mathcal{E}_1 = T^{-1}\left(2\sqrt{n}B^n\right)$. אזי

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{E}_1\right) = \mathbb{P}\left(T\left(X\right) \in T\left(\mathcal{E}_1\right)\right) = \mathbb{P}\left(T\left(x\right) \in 2\sqrt{n}B^n\right) \geq \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\frac{1}{2} \leq \int_{\mathcal{E}_1} f_X\left(z\right) dz = \int_{\mathcal{E}_1 \cap K} f_X \leq \left|\mathcal{E}_1 \cap K\right| \cdot c^n$$

ראינו ש-$\left|\mathcal{E}_1 \cap K\right| \geq c^n$. כזכור, $|K| = 1$. מה הנפח של $\mathcal{E}_1$?

$$\left|\mathcal{E}_1\right| = \left|T^{-1}\left(2\sqrt{n}B^n\right)\right| = \frac{1}{\det T} \cdot \left|2\sqrt{n}B^n\right|$$

ולכן $\left|\mathcal{E}_1\right|^{1/n} \sim 1$.

רצינו לקבל אליפסואיד סימטרי, עם נפח 1 בדיוק.

יהי $\mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^n$ אליפסואיד סימטרי כך ש-$\mathcal{E}_1 = x_0 + \mathcal{E}_2$ עם איזשהו $x_0 \in \mathbb{R}^n$. אז $\left|\mathcal{E}_1\right| = \left|\mathcal{E}_2\right|$, ו-

$$\frac{\left(\mathcal{E}_1 \cap K\right) + \left(\left(-\mathcal{E}_1\right) \cap K\right)}{2} \subset \mathcal{E}_2 \cap K$$

מסימטריה של K ומברון-מינקובסקי נקבל

$$\begin{aligned} \left|K \cap \mathcal{E}_2\right| &\geq \left|\frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \mathcal{E}_2\right) \cap K\right] + \frac{1}{2}\left[\left(-x_0 + \mathcal{E}_2\right) \cap K\right]\right| \\ &\geq \sqrt{\left|\left(x_0 + \mathcal{E}_2\right) \cap K\right| \cdot \left|\left(-x_0 + \mathcal{E}_2\right) \cap K\right|} = \left|\left(x_0 + \mathcal{E}_2\right) \cap K\right| = \left|\mathcal{E}_1 \cap K\right| \end{aligned}$$

כלומר $\mathcal{E}_2$ אליפסואיד סביב הראשית עם $\left|\mathcal{E}_2 \cap K\right| \geq c^n$ ו-$\left|\mathcal{E}_2\right|^{1/n} = \left|\mathcal{E}_1\right|^{1/n} \sim 1$.

נגדיר כעת $\mathcal{E}=\left|\mathcal{E}_2\right|^{1/n}\mathcal{E}_2$. זה עם הנפח הנכון, ו-$c\mathcal{E}_2\supset\mathcal{E}$ ולכן והחיתוך הוא

$$|K\cap\mathcal{E}|\geq|K\cap(c\mathcal{E}_2)|\geq|cK\cap c\mathcal{E}_2|=c^n\left|K\cap\mathcal{E}_2\right|\geq\tilde{c}^n$$

הראינו קיום של אליפסואיד מילמן. נראה שיש לו עוד תכונות יפות.

נרצה לעבור מחסם תחתון ל-$K\cap\mathcal{E}$ לחסם עליון ל-$K+\mathcal{E}$.

למה: (רוג'רס-שפרד 2)

יהיו $K,T\subset\mathbb{R}^n$ קמורים וסימטריים. אזי

$$|K+T|\cdot|K\cap T|\leq 8^n\left|K\right|\cdot|T|$$

הוכחה: נביט ב-$K\times T\subset\mathbb{R}^{2n}$, וניקח את תת-המרחב $E=\{(x,x):x\in\mathbb{R}^n\}$. מהלמה הקודמת של רוג'רס-שפרד נקבל

$$|(K\times T)\cap E|\cdot\left|\mathrm{Proj}_{E^\perp}(K\cap T)\right|\leq 16^n\left|K\times T\right|$$

מהו $|(K\times T)\cap E|$?

$$(K\times T)\cap E=\{(x,y):x\in K,y\in T,x=y\}=F(K\cap T)$$

כאשר $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2n}$ העתקת האלכסון $F(x)=(x,x)$. היעקוביאן שלה הוא $2^{n/2}$, ולכן

$$|K\cap T|=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot|(K\times T)\cap E|$$

לגבי ההיטל, $E^\perp=\{(x,-x):x\in\mathbb{R}^n\}$, ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}_{E^\perp}(x,y)&=\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)\\ \mathrm{Proj}_{E^\perp}(K\times T)&=\left\{\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right):x\in K,y\in T\right\}=\left\{\left(\frac{z}{2},-\frac{z}{2}\right):z\in K-T\right\}\end{aligned}$$

היעקוביאן הוא $2^{-n/2}$, ולכן הנפח הוא

$$|K+T|=|K-T|=\sqrt{2}^n\left|\mathrm{Proj}_{E^\perp}(K\times T)\right|$$

נשתמש במשפט פוביני $|K\times T|=|K|\cdot|T|$ וסיימנו.

מסקנה: נניח ש-$K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי, $\mathcal{E}\subset\mathbb{R}^n$ אליפסואיד מילמן (עם קבוע c). אזי $|K+\mathcal{E}|^{1/n}\leq\tilde{c}\cdot|K|^{1/n}$ כאשר $\tilde{c}$ תלוי רק ב-c.

הוכחה: יודעים ש-$|\mathcal{E} \cap K| \le c^n |K| = c^n |\mathcal{E}|$, ולכן

$$|K + \mathcal{E}| \le \frac{16^n |K| \cdot |\mathcal{E}|}{|K \cap \mathcal{E}|} \le \left(\frac{16}{c}\right)^n \cdot |K|$$

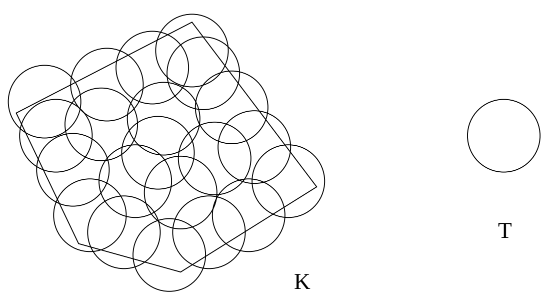
הערה: לפעמים מגדירים אליפסואיד-M ע"י הדרישה ש-$|\mathcal{E}| = |K|$ ו-$|K + \mathcal{E}| \le c^n |K|$. כמו שהסברנו עכשיו, זה שקול עד-כדי הקבוע.

בשבוע הבא נראה גם: אם $\mathcal{E}$ הוא אליפסואיד מילמן של K אז $\mathcal{E}^0$ הוא אליפסואיד מילמן של K^0.

דרך נוספת להגדיר אלפיסואיד-M היא ע"י מספרי כיסוי.

הגדרה: עבור גופים קמורים $K, T \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר

$$N(K,T) = \min \left\{ N \ge 1 : \exists x_1, \ldots, x_N . \, K \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + T) \right\}$$



איור 17: כיסוי של מחומש עם עיגולים

טענה: עבור $K, T \subset \mathbb{R}^n$ גופים קמורים וסימטריים,

$$N(K,T) \le \frac{|K + T/2|}{|T/2|}$$

הוכחה: נגדיר את $\mathcal{F}$ להיות אוסף מקסימלי של נקודות ב-K כך ש-

$$\forall x, y \in \mathcal{F} \qquad \left(x + \frac{T}{2}\right) \cap \left(y + \frac{T}{2}\right) = \emptyset$$

הגופים $\left\{x + \frac{T}{2}\right\}_{x \in \mathcal{F}}$ זרים, וכולם מוכלים ב-$K + \frac{T}{2}$, לכן

$$\# \mathcal{F} \cdot \left|\frac{T}{2}\right| \le \left|K + \frac{T}{2}\right|$$

אבל מהמקסימליות, לכל $y \in K$ קיים $x \in \mathcal{F}$ כך ש-$y \in x + T$. מכאן ש-$N(K,T) \le \#\mathcal{F}$.

מסקנה: נניח $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי, $\mathcal{E}$ אליפסואיד מילמן שלו (עם קבוע כלשהו), אז $N(K,\mathcal{E}) \le c^n$ ו-$N(K,\mathcal{E}) \le c'^n$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} N(K,\mathcal{E}) &\le \frac{|K+\mathcal{E}/2|}{|\mathcal{E}/2|} \le c^n \\ N(\mathcal{E},K) &\le \frac{|K/2+\mathcal{E}|}{|K/2|} \le c'^n \end{aligned}$$

טענה: נניח $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי, $\mathcal{E}$ אליפסואיד מילמן שלו (עם קבוע $c > 0$), אז לכל $T \subset \mathbb{R}^n$ קמור וסימטרי,

$$|T+K|^{1/n} \sim |T+\mathcal{E}|^{1/n}$$

כלומר, האליפסואיד $\mathcal{E}$ "מייצג נאמנה" את K לצורך סכום מינקובסקי.

הוכחה: אנחנו יודעים ש-$K \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+\mathcal{E})$ עבור $N \le e^{cn}$, ולכן

$$T+K \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+T+\mathcal{E})$$

מכאן ש-

$$|T+K| \le N \cdot |T+\mathcal{E}| \le e^{cn}|T+\mathcal{E}|$$

בכיוון השני, $\mathcal{E} \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+K)$, ולכן

$$|T+\mathcal{E}| \le \left|\bigcup_{i=1}^{N}(x_i+T+K)\right| \le e^{c'n}|T+K|$$

תרגיל: הייצוג של K ע"י אליפסואיד גם גורר $|T\cap K|^{1/n} \sim |T\cap\mathcal{E}|^{1/n}$.

הגדרה: אומרים שגוף $K \subset \mathbb{R}^n$ נמצא במצב מילמן (M-position) עם קבוע α אם B^n הוא אליפסואיד מילמן עם קבוע α של K.

הערה: לכל גוף קמור וסימטרי $K \subset \mathbb{R}^n$ קיימת העתקה לינארית הפיכה $T_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$T_K(K)$ גוף בפוזיציית מילמן עם קבוע אוניברסלי.

משפט: "אי-שיוויון ברון-מינקובסקי ההפוך"

יהיו $K,T\subset\mathbb{R}^n$ גופים קמורים וסימטריים, אז קיימות העתקות לינאריות L_K,L_T (ההעתקה L_K נקבעת ע"י K וההעתקה L_T נקבעת ע"י T), כך שאם נסמן $\tilde{K}=L_K(K)$ ו-$\tilde{T}=L_T(T)$,

$$\left|\tilde{K}+\tilde{T}\right|^{1/n}\le c\left(\left|\tilde{K}\right|^{1/n}+\left|\tilde{T}\right|^{1/n}\right)$$

הוכחה: נשתמש במצב מילמן. אפשר להניח ש-$\tilde{K}$ ו-$\tilde{T}$ במצב מילמן, ואז

$$\left|\tilde{K}+\tilde{T}\right|^{1/n}\sim\left|B^n+\tilde{T}\right|^{1/n}\sim\left|B^n+B^n\right|^{1/n}\sim\left|B^n\right|^{1/n}=\left|\tilde{K}\right|^{1/n}=\left|\tilde{T}\right|^{1/n}$$

תרגיל: אפשר להניח ש-$\det(L_K)=\det(L_T)=1$.

הערה: אפשר להגדיר מצב מילמן ע"י שדורשים שקיים כדור ברדיוס כלשהו שהוא אליפסואיד.

13 משפט מנת התת-מרחב, א"ש איזופרימטרי הפוך (28/5/2014)

הנושא: אליפסואיד מילמן.

כזכור, עבור $K\subset\mathbb{R}^n$ קמור עם $K=-K$, קיים אליפסואיד (סימטרי) $\mathcal{E}\subset\mathbb{R}^n$ עם $|K|=|\mathcal{E}|$ כך שמתקיים

1. $|K\cap\mathcal{E}|^{1/n}\ge c|K|^{1/n}$
2. $|K+\mathcal{E}|^{1/n}\le c|K|^{1/n}$
3. $N(K,\mathcal{E})\le c^n, N(\mathcal{E},K)\le c^n$
4. (תרגיל) לכל ת"מ $E\subset\mathbb{R}^n$ עם $\dim(E)=\ell=\lambda n$ עבור $0<\lambda<1$, יש $|K\cap E|^{1/\ell}=c_\lambda|\mathcal{E}\cap E|^{1/\ell}$ (זה כמעט היה שלב בהוכחה)

   בדומה, יש את אותו יחס גם עבור הטלות, זה נובע מדואליות.

תרגיל משבוע שעבר: אם $|\mathcal{E}|=|K|$ ו-$|K+\mathcal{E}|^{1/n}\le c|K|^{1/n}$, או $N(K,\mathcal{E})\le c^n$, אז $\mathcal{E}$ הוא אליפסואיד מילמן של K, עם קבוע שתלוי ב-c.

אליפסואיד מילמן $\mathcal{E}$ מייצג היטב את K בחישובי נפח בסקאלה גסה. כמו שראינו, אם $\mathcal{E}$ אליפסואיד מילמן של K, אז לכל גוף קמור וסימטרי $T\subset\mathbb{R}^n$,

$$|K+T|^{1/n}\sim|\mathcal{E}+T|^{1/n}$$

הגדרה: אומרים ש-$K\subset\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור וסימטרי הוא בפוזיציית מילמן (מנח מילמן?) אם קיים קבוע $r>0$ כך ש-rB^{n} הוא אליפסואיד מילמן של K.

לכל גוף קמור K, קיימת העתקה לינארית $T_{K}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ עם $\det\left(T_{K}\right)=1$ כך ש-$T_{K}\left(K\right)$ במנח מילמן.

כתוצאה, קיבלנו את א"ש ברון-מינקובסקי ההפוך: נניח $K,T\subset\mathbb{R}^{n}$ גופים קמורים וסימטריים הנמצאים במנח מילמן. אזי

$$|K|^{1/n}+|T|^{1/n}\underset{B-M}{\leq}|K+T|^{1/n}\leq C\left[|K|^{1/n}+|T|^{1/n}\right]$$

נסכם במטא-טענה: גוף קמור במנח מילמן מתנהג כמו כדור אוקלידי (לצורך חישובים גסים)

הערה לגבי סימטריה: בהערכות שלנו השתמשנו בסימטריה, אבל היא לא הכרחית. תצא הוכחה מעט יותר ארוכה אבל עם אותם רעיונות. במאמר המקורי מילמן טיפל במצב הסימטרי בלבד.

נדבר על דואליות ואליפסואיד מילמן.

טענה: אם $\mathcal{E}$ אליפסואיד מילמן של K אז $r\mathcal{E}^{0}$ אליפסואיד מילמן של K^{0} עם $|\log r|\leq c$.

הערה: הקבוע מתדרדר במעבר הזה.

הוכחת הטענה:

מסנטלו ובורגיין-מילמן,

$$\text{v.rad.}\left(K^{0}\right)\sim\frac{1}{\text{v.rad.}\left(K\right)}$$

אנחנו רוצים להבין את $\mathcal{E}^{0}\cap K^{0}$.

כיוון שדואליות הופכת את כיוון ההכלה, והיא משמרת קמירות וסימטריה,

$$\mathcal{E}^{0}\cap K^{0}=\left[\text{conv}\left(K\cup\mathcal{E}\right)\right]^{0}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\text{v.rad.}\left(\mathcal{E}^{0}\cap K^{0}\right) &= \text{v.rad.}\left(\text{conv}\left(K\cap\mathcal{E}\right)^{0}\right)\\ &\sim \frac{1}{\text{v.rad.}\left(\text{conv}\left(K\cup\mathcal{E}\right)\right)}\\ &\geq \frac{1}{\text{v.rad.}\left(K+\mathcal{E}\right)}\\ &\gtrsim \frac{1}{\text{v.rad.}\left(K\right)}\sim\text{v.rad.}\left(K^{0}\right)\end{aligned}$$

לסיכום, $\text{v.rad.}\left(\mathcal{E}^0 \cap K^0\right) \geq c \cdot \text{v.rad.}\left(K^0\right)$ עם

$$\text{v.rad.}\left(\mathcal{E}^0\right) \sim \frac{1}{\text{v.rad.}\left(\mathcal{E}\right)} \sim \frac{1}{\text{v.rad.}\left(K\right)} \sim \text{v.rad.}\left(K^0\right)$$

אם נסמן

$$r = \frac{\text{v.rad.}\left(K^0\right)}{\text{v.rad.}\left(\mathcal{E}^0\right)}$$

מתקיים $|\log r| \leq c$ ו-

$$\begin{aligned} \text{v.rad.}\left(r\mathcal{E}^0\right) &= \text{v.rad.}\left(K^0\right) \\ \text{v.rad.}\left(r\mathcal{E}^0 \cap K^0\right) &\geq \min\{r, 1\} \\ \text{v.rad.}\left(\mathcal{E}^0 \cap K^0\right) &\geq c \cdot \text{v.rad.}\left(K^0\right) \end{aligned}$$

המלצה: לשנות מעט את ההגדרה של אליפסואיד מילמן.

הגדרה אלטרנטיבית: $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ הוא אליפסואיד מילמן של K עם קבוע $\alpha > 0$ אם:

$$\text{v.rad.}\left(K \cap \mathcal{E}\right) \geq \alpha \cdot \text{v.rad.}\left(K\right)$$

$$\alpha \cdot \text{v.rad.}\left(K\right) \leq \text{v.rad.}\left(\mathcal{E}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \text{v.rad.}\left(K\right)$$

תרגיל: אם $K, T \subset \mathbb{R}^n$ במנח מילמן, $|K| = |T|$, אז $|K \cap T|^{1/n} \geq c|K|^{1/n}$ ו-$N\left(K, T\right) \leq C^n$.

הדבר האחרון שנעשה בחלק זה של הקורס יהיה מנת תת-מרחב.

תזכורת: אם $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור שמכיל את הראשית, ו-$E \subset \mathbb{R}^n$ תת-מרחב אקראי ממימד ℓ, עבור $1 \leq \ell \leq n$ ו-$\lambda = \ell/n$, אז בסיכוי לפחות $1 - e^{-n}$,

$$\text{diam}\left(K \cap E\right)^{1-\lambda} \cdot \text{v.rad.}\left(K \cap E\right)^{\lambda} \leq C \cdot \text{v.rad.}\left(K\right)$$

טענה: נניח ש-$K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי במנח מילמן, עם $\text{v.rad.}\left(K\right) = 1$, אז בסיכוי לפחות $1 - e^{-n}$ על-פני תתי-מרחבים $E \in G_{n,\ell}$ (כרגיל $\ell = \lambda n$ ו-$0 < \lambda < 1$),

1. $\text{diam}\left(K \cap E\right) \leq c_\lambda$
2. $\text{Proj}_E\left(K\right) \supset c_\lambda\left(B^n \cap E\right)$
3. גם $K \cap E$ ו-$\text{Proj}_E\left(K\right)$ במנח מילמן (עם קבוע c_λ)

הוכחה:

1. ראינו שלכל חתך $E \in G_{n,\ell}$,

$$\text{v.rad.}\left(K \cap E\right) \geq c \cdot \text{v.rad.}\left(E \cap B^n\right)$$

ומאי-השיוויון לגבי חתכים אקראיים, בסיכוי לפחות $1 - e^{-n}$,

$$\text{diam}\left(K \cap E\right)^{1-\lambda} \cdot \text{v.rad.}\left(K \cap E\right)^{\lambda} \leq C$$

ולכן

$$\text{diam}\left(K \cap E\right) \leq C_\lambda$$

2. נשתמש בדואליות. נשים לב ש-

$$\text{Proj}_E K \supset c_\lambda \left(B^n \cap E\right) \iff K^0 \cap E \subset \frac{1}{c_\lambda}\left(B^n \cap E\right)$$

לכן מספיק להראות שבסיכוי גדול, $K^0 \cap E \leq \tilde{c}_\lambda$. זה נובע מ-1 ומכך שגם K^0 במנח מילמן ובערך עם אותו רדיוס נפח.

3. יודעים ש-$N\left(K, B^n\right) \leq c^n$, כלומר $K \subset \bigcup_{i=1}^{\lfloor c^n \rfloor} \left(x_i + B^n\right)$, ומכך נובע

$$\text{Proj}_E K \subset \bigcup_{i=1}^{\lfloor c^n \rfloor} \left(\text{Proj}_E x_i + \left(B^n \cap E\right)\right)$$

כלומר

$$N\left(\text{Proj}_E K, B^n \cap E\right) \leq c^n = \left(c^{1/\lambda}\right)^{\dim E}$$

מצד שני,

$$\text{v.rad.}\left(\text{Proj}_E K\right) \geq \text{v.rad.}\left(K \cap E\right) \geq c \cdot \text{v.rad.}\left(B^n \cap E\right) \geq c_\lambda$$

מהתרגיל נובע משני אלה ש-$K \cap E$ ו-$\text{Proj}_E K$ במנח מילמן.

משפט מנת התת-מרחב: יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור, $K = -K$. ננרמל כך ש-$\text{v.rad.}\left(K\right) = 1$, ונניח ש-$K$ בפוזיציית מילמן. נבחר $E \in G_{n,\frac{n}{2}}$ אקראי, ובתוכו נבחר תת-מרחב אקראי $F \subset E$ ממימד $\frac{n}{4}$. אז בסיכוי $1 - 2e^{-cn}$,

$$\begin{aligned} c_1 B^F &\subset \text{Proj}_F\left(K \cap E\right) \subset c_2 B^F \\ c_1 B^F &\subset F \cap \text{Proj}_E\left(K\right) \subset c_2 B^F \end{aligned}$$

כאשר $B^F = B^n \cap F$ ו-$c_1, c_2 > 0$ קבועים אוניברסליים.

הערה: למספרים $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ אין שום חשיבות, הם משפיעים רק על הקבועים.

הוכחה:

ראינו שבסיכוי לפחות $1 - e^{-n}$, $K \cap E \subset c \cdot B^n$ ו-$K \cap E$ במנח מילמן (עם קבוע אוניברסלי).

מ-2 בטענה הקודמת, בסיכוי גדול מ-$1 - e^{-n/2}$, $cB^n \subset \mathrm{Proj}_F(K \cap E)$. אבל

$$cB^F = c \cdot \mathrm{Proj}_F\left(B^E\right) \supset \mathrm{Proj}_F(K \cap E)$$

לכן קיבלנו את שרשרת ההכלות הראשונה בסיכוי גדול מ-$1 - e^{-n} - e^{-n/2}$. ההוכחה של השרשרת השניה זהה.

מסקנה: לכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ עם $K = -K$ קיימים תתי-מרחבים $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$ עם $\dim(E) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ו-$\dim(F) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ ואליפסואיד $\mathcal{E} \subset F$ כך ש-

$$c_1 \mathcal{E} \subset F \cap \mathrm{Proj}_E K \subset c_2 \mathcal{E}$$

הוכחה: אחרי העתקה לינארית, זה נכון אפילו לתת-מרחב אקראי.

ניסוח למרחבי בנך (סוף-מימדיים): אם X מרחב נורמי n-מימדי, אז קיימים $F \subset E \subset X$ תתי-מרחבים שלו עם מימדים $\dim(E) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ו-$\dim(F) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ כך ש-E/F איזומורפי למרחב הילברט, עד-כדי קבוע אוניברסלי.

הערה: אם $F \subset E$, אז $\mathrm{Proj}_F(K \cap E) = F' \cap (\mathrm{Proj}_{E'} K)$ כאשר $F' \subset E'$ תתי-מרחבים מאותם מימדים.

נתחיל את חלק 4 של הקורס.

בחלק זה יהיו (צל של) טרנספורטציה של מידות, א"ש ברסקמפ-ליב (אחר ממה שראינו), וא"ש איזופרימטרי הפוך.

נלמד את החלק הזה בסדר הפוך: ההוכחה תהיה "מלמעלה למטה", ונשלים בהמשך למות שנצטרך.

נתחיל מהאי-שיוויון האיזופרימטרי ההפוך.

הא"ש האיזופרימטרי: מברון-מינקובסקי, אם $|B| = |A|$, אז

$$\frac{|A + \varepsilon B| - |A|}{\varepsilon} \geq \frac{|B + \varepsilon B| - |B|}{\varepsilon}$$

ולכן

$$\frac{|\partial A|}{|A|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{|\partial B|}{|B|^{\frac{n-1}{n}}} \sim \sqrt{n}$$

כאשר B כדור אוקלידי ב-$\mathbb{R}^n$.

אפשר למצוא גופים קמורים בהם היחס האיזופרימטרי גדול כרצוננו. למשל אפשר לקחת גוף בצורת "פנקייק", אפשר להגדיל את שטח הפנים כרצוננו כשהנפח נשאר קבוע.

מסתבר שיש פוזיציה עם שטח פנים לא גדול מדי.

עבור $K \subset \mathbb{R}^n$, ראינו כבר את המנח האיזוטרופיו מנח מילמן. יש גם מנח ג'ון, שנפוץ בתורה של קמירות.

עם פוזיציה אפשר להסתבר כהפעלת העתקה לינארית הפיכה, או לחליפין כבחירת בסיס ומבנה אוקלידי (אליפסואיד) במרחב נורמי.

משפט: (א"ש איזופרימטרי הפוך)

יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור עם $K = -K$. אזי קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שומרת נפח כך ש-$K_1 = T(K)$ מקיים

$$\frac{|\partial K_1|}{|K_1|^{\frac{n-1}{n}}} \le 2n = \frac{|\partial Q|}{|Q|^{\frac{n-1}{n}}}$$

עבור הקוביה $Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$, יש $2n$ פאות שלכל אחת יש שטח 1, והנפח גם הוא 1, ולכן זה היחס. נראה שזה באמת המקרה הקיצוני.

טענה: לכל $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ הפיכה,

$$\frac{|\partial T(Q)|}{|T(Q)|^{\frac{n-1}{n}}} \ge 2n$$

הוכחה: אפשר להצטמצם ל-$\det T = 1$ כי הכפלה בקבוע לא משנה את היחס.

כלומר $|TQ| = 1$. מה הנפח של הפאה הנפרשת ע"י $Te_2, \ldots, Te_n$?

מאלגברה לינארית, אנחנו יודעים ש-

$$\operatorname{Adj}(T) e_1 = (Te_2) \times \ldots (Te_n)$$

הוא וקטור שמאונך ל-$Te_2, \ldots, Te_n$, ואורכו שווה לנפח המקבילון $\sum_{i=2}^n [0, Te_i]$, שהוא נפח הפאה.

(במקרה שלנו, כיוון ש-$\det T = 1$, אז $\operatorname{Adj}(T) = T^{-1}$)

לכן

$$\begin{aligned} |\partial T(Q^n)| &= 2\sum_{i=1}^n |\operatorname{Adj}(T) e_i| = 2n \frac{\sum_{i=1}^n |T^{-1} e_i|}{n} \\ &\ge 2n \left(\prod_{i=1}^n |T^{-1} e_i|\right)^{1/n} \ge 2n \cdot \left(\det\left(T^{-1}\right)\right)^{/n} = 2n \end{aligned}$$

השתמשנו פה בא"ש Hadamard:

$$\det\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \le \prod_{i=1}^{n} |v_i|$$

לסיכום, מתוך כל הגופים הסימטריים, לקוביה יש את "שטח הפנים אחרי inf על העתקות לינאריות" - הגדול ביותר בלי סימטריה. בלי סימטריה, זה סימפלקס במקום קוביה.

היום ובשבוע הבא נוכיח את הא"ש האיזופרימטרי ההפוך.

יהיו שני מרכיבים להוכחה:

1. א"ש ברסקמפ-ליב
2. מנח ג'ון

תזכורת: מה זה מידה איזוטרופית.

תהי μ מידת הסתברות זוגית ב-$\mathbb{R}^n$. אם $\mathrm{Cov}\left(\mu\right)$ מטריצה סקלארית, היא נקראת איזוטרופית. מזוגיות, לכל $\theta \in S^{n-1}$

$$\mathrm{Cov}\left(\mu\right)\theta\cdot\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \left(x\cdot\theta\right)^2 d\mu\left(x\right)$$

תכונה 1: נניח $\mathcal{F} \subset S^{n-1}$ כך שקיימת מידת הסתברות איזוטרופית הנתמכת על $\mathcal{F}$. אזי בהכרח "$\mathcal{F}$ גדולה בכל הכיוונים". באופן מדויק, לכל $\theta \in S^{n-1}$, לא ייתכן

$$\mathcal{F} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x\cdot\theta| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

כי

$$\int_{\mathcal{F}} \left(x\cdot\theta\right)^2 d\mu\left(x\right) = \int_{\mathcal{F}} x_1^2 d\mu\left(x\right) = \frac{1}{n}\int_{\mathcal{F}} |x|^2 d\mu\left(x\right) = \frac{1}{n}$$

ובפרט

$$\max_{x\in\mathcal{F}} |x\cdot\theta|^2 \ge \frac{1}{n}$$

הערה: התומך לא חייב להיות קבוצה גדולה מבחינת כמות הנקודות, שהרי המידה $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\pm e_i}$ איזוטרופית. אבל אז הן חייבות להיות "מפוזרות היטב".

תכונה 2: מידות איזוטרופיות לפעמים מתקבלות ע"י היטל של בסיס אורתונורמלי במימד גבוה יותר. למשל, אם $e_1,\ldots,e_N \in \mathbb{R}^N$ בסיס אורתונורמלי, ו-$E \subset \mathbb{R}^N$ ת"מ n-מימדי. נסמן עבור $i = 1,\ldots,N$

$$p_i = \frac{1}{2n}\left|\mathrm{Proj}_E e_i\right|^2, \quad v_i = \frac{\mathrm{Proj}_E e_i}{\left|\mathrm{Proj}_E e_i\right|}$$

ונגדיר לפי אלה מידה

$$\mu=\sum_{i=1}^{N}p_i\delta_{\pm v_i}$$

נראה ש-μ מידה איזוטרופית ב-E:

$$\forall\theta\in E\qquad\int_E(x\cdot\theta)^2\,d\mu(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left|(\mathrm{Proj}_Ee_i)\cdot\theta\right|^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left|\mathrm{Proj}_E\theta\right|^2=\frac{1}{n}|\theta|^2$$

למה זו מידת הסתברות? ניקח בסיס אורתונורמלי $\theta_1,\dots,\theta_n\in E$, אז

$$1=n\cdot\frac{1}{n}=\int_E\sum_{i=1}^{n}(x\cdot\theta_i)^2\,d\mu(x)=\int_E|x|^2\,d\mu(x)=1$$

כי μ נתמכת על S^{n-1}.

תרגיל:

1. כל מידה איזוטרופית עם תומך סופי על S^{n-1} היא מהצורה שתיארנו.
2. המידה $\mu=\sum p_i\delta_{v_i}$ מקיימת

$$\sum_{i=1}^{N}p_i\cdot v_i\otimes v_i=\mathrm{Cov}(\mu)$$

כאשר $vv^t=v\otimes v=\{v_iv_j\}_{i,j=1\dots n}$, כלומר μ איזוטרופית אם $\sum p_i\cdot v_i\otimes v_i$ סקלארית.

א"ש ברסקמפ-ליב: נניח ש-$\theta_1,\dots,\theta_N\in S^{n-1}$ ו-$c_1,\dots,c_N>0$ והם מקיימים

$$\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\theta_i\otimes\theta_i=\mathrm{Id}$$

אז לכל פונקציות מדידות $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{N}f_i^{c_i}(x\cdot\theta_i)\,dx\le\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_i|\right)^{c_i}$$

הערות:

1. זה מזכיר את א"ש הולדר.

2. אם $N = n$ ו-$\theta_1, \ldots, \theta_n$ בסיס אורתונורמלי ו-$c_1 = \ldots = c_n = 1$, מקבלים פוביני, ואם $f_i \geq 0$ יש שיוויון.

משפט: (ג'ון, 1948)

נניח $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור עם $K = -K$. אזי קיימת $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית והפיכה כך ש-$K_1 = T(K)$ מקיים $B^n \subset K_1$, וקיימת מידת הסתברות איזוטרופית זוגית שנתמכת על תת-קבוצה סופית של נקודות המגע $S^{n-1} \cap \partial K$.

הערות צד לא קשורות: המנח הזה יחיד עד-כדי העתקה אורתוגונלית, ובאותו מנח, B^n הוא האליפסואיד עם הנפח הגדול ביותר שמוכל ב-K, ו-$K \subset \sqrt{n} B^n$.

בהינתן שני המרכיבים האלה, נוכיח את הא"ש האיזופרימטרי ההפוך:

רוצים להראות שלכל $K \subset \mathbb{R}^n$ סימטרי $K = -K$ קיימת $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית והפיכה כך ש-$K_1 = T(K)$ מקיים

$$\frac{|\partial K_1|}{|K_1|^{\frac{n-1}{n}}} \leq 2n$$

נשתמש ב-T ממשפט ג'ון. נחליף את K ב-K_1, ונניח מעתה ש-$B^n \subset K$, וש-$\theta_1, \ldots, \theta_N \in S^{n-1} \cap \partial K$ ושהמידה $\mu = \sum p_i \delta_{\pm\theta_i}$ איזוטרופית. נראה ש-$|\partial K| \leq 2n \cdot |K|^{\frac{n-1}{n}}$.

שלב 1: לכל $i = 1, \ldots, N$,

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x \cdot \theta_i| \leq 1\}$$

כדי לראות זאת, ניקח על-מישור H שתומך ב-K בנקודה θ_i. אז H מכיל את θ_i ו-B^n נמצא בצד אחד שלו, ולכן θ_i נורמל, כלומר $H = \theta_i + \theta_i^\perp$. מסימטריה, K נמצא בין H ל-$-H$.

שלב 2: $|K| \leq 2^n$.

כדי לראות זאת, נסמן $f(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$. קיימים $c_1, \ldots, c_N > 0$, שהם כפל בקבוע של ה-p_i, שמקיימים

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \theta_i \otimes \theta_i = \mathrm{Id}$$

מא"ש ברסקמפ-ליב ומשלב 1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_n(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{N} f^{c_i}(\langle x, \theta_i \rangle)\, dx \\
&\leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^{c_i} = 2^{\sum_{i=1}^{N} c_i}
\end{aligned}$$

למה $\sum c_i = n$? נפעיל Trace על השיוויון $\sum c_i \cdot \theta_i \otimes \theta_i = \mathrm{Id}$ ונשתמש בעובדה $\mathrm{Trace}\left(\theta_i \otimes \theta_i\right) = \left|\theta_i\right|^2 = 1$.

שלב 3:

$$\frac{|\partial K|}{|K|} \leq n$$

זה מכיוון ש-$B^n \subset K$:

$$\begin{aligned} |\partial K| &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|K+\varepsilon B^n| - |K|}{\varepsilon} \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|K+\varepsilon K| - |K|}{\varepsilon} = |K| \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} = n\,|K| \end{aligned}$$

שלב 4:

$$|\partial K| \leq 2n \cdot |K|^{\frac{n-1}{n}}$$

הסבר:

$$|\partial K| \leq n \cdot |K| = n \cdot |K|^{\frac{n-1}{n}} \cdot |K|^{1/n} \leq 2n\,|K|^{\frac{n-1}{n}}$$

הוכחנו שלכל $K \subset \mathbb{R}^n$ קמור וסימטרי,

$$\sqrt{n} \sim \frac{|\partial B^n|}{|B^n|^{\frac{n-1}{n}}} \leq \inf_{T\in SL_n(\mathbb{R})} \frac{|\partial\left(TK\right)|}{|TK|^{\frac{n-1}{n}}} \leq 2n$$

14 המשך א"ש איזופרימטרי הפוך, ומשפט ג'ון (11/6/2014)

מועד ההגשה של שיעורי הבית הוא 9/7/2014.

בשיעור שעבר הוכחנו את הא"ש האיזופרימטרי ההפוך: עבור $K \in \mathbb{R}^n$ גוף קמור סימטרי, נאמר שהוא במנח "שטח פנים מינימלי" אם

$$|\partial K| = \inf_{T\in SL_n(K)} |\partial\left(TK\right)|$$

למשל, ראינו שהכדור והקוביה הן במנח שטח פנים מינימלי.

כמובן, לכל גוף קמור עם $K=-K$ (או גם אם לא), קיימת העתקה לינארית שומרת נפח, $T\in SL_n$, כך ש-$T\left(K\right)$ הוא במנח שטח פנים מינימלי.

משפט שהוכחנו: אם $K\subset\mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי במנח שטח פנים מינימלי, אז

$$\sqrt{n}\approx\frac{\left|\partial B^n\right|}{\left|B^n\right|^{\frac{n-1}{n}}}\underset{\text{isoper.}}{\leq}\frac{\left|\partial K\right|}{\left|K\right|^{\frac{n-1}{n}}}\underset{\text{inverse}}{\leq}\frac{\left|\partial Q^n\right|}{\left|Q^n\right|^{\frac{n-1}{n}}}=2n$$

כאשר $Q^n=\left[-1,1\right]^n$.

הערה: בהוכחה השתמשנו במנח ג'ון, וגם בא"ש ברסקמפ-ליב, שאת שניהם עוד לא הוכחנו.

(המנח של שטח פנים מינימלי קרוב למנח ג'ון: את הא"ש האיזופרימטרי ההפוך הוכחנו על מנח ג'ון, וזה היה מספיק טוב)

משפט John (1948): לכל גוף קמור $K\subset\mathbb{R}^n$ סימטרי קיים מנח $L\subset\mathbb{R}^n$ (תמונה של K תחת העתקה לינארית הפיכה) כך ש-$B^n\subset L$, וכך שקיימת מידה איזוטרופית שנתמכת על תת-קבוצה סופית של $S^{n-1}\cap\partial L$.

לצורך ההוכחה, נדבר עכשיו על מקסום של פונקציות על גופים קמורים.

עקרון Fermat: אם $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה, עבור $U\subset\mathbb{R}^n$, מקבלת מקסימום בנקודה פנימית $x_0\in U$, אז $\nabla f\left(x_0\right)=0$.

מה קורה אם המקסימום מתקבל ב-$x_0\in\partial U$? אם ∂U חלקה ב-x_0, העקרון של כופלי לגרנז' אומר ש-$\nabla f\left(x_0\right)$ הוא כפולה חיובית של הנורמל החיצוני.

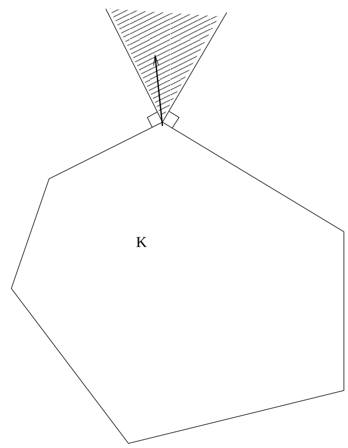
נניח עתה ש-$K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, ו-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ חלקה. נניח

$$f\left(x_0\right)=\sup_{x\in\bar{K}}f\left(x\right)$$

עבור $x_0\in\partial K$.

נגדיר את החרוט הנורמלי:

$$N_K\left(x_0\right)=\left\{v\in\mathbb{R}^n:\forall x\in K,\,v\cdot x\leq v\cdot x_0\right\}$$



איור 18: החרוט הנורמלי בנקודה פינתית

איחוד כל החרוטים הנורמליים הוא בדיוק כל $\mathbb{R}^n$.

תרגיל: איך מוצאים את החרוט הנורמלי? יהי $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathcal{F},\, x \cdot v \leq 1\}$. אם $\mathcal{F}$ סופית - K פוליטופ. כל גוף קמור נוצר כך, $K = \mathcal{F}^0$. אזי לכל $x_0 \in \partial K$,

$$N(x_0) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i : \begin{array}{c} v_1, \ldots, v_N \in \mathcal{F} \\ \forall i\, v_i \cdot x_0 = \sup_{x \in K} v_i \cdot x \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \end{array} \right\}$$

טענה: (תנאי Kuhn-Tucker)

אם המקסימום של f מתקבל בנקודה $x_0 \in \bar{K}$, אז $\nabla f(x_0) \in N_K(x_0)$.

הוכחה: אחרת, יש איזה $x \in K$ שמתקיים $\nabla f(x_0) \cdot x > \nabla f(x_0) \cdot x_0$. נגדיר מסילה $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx \subset K$,

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) > 0$$

ולכן f עולה מ-x_0 לאורך γ, ואין לה מקסימום ב-x_0.

דוגמא לשימוש:

- נסמן ב-V את אוסף המטריצות הסימטריות, $n \times n$.
  זה מרחב לינארי. נגדיר מכפלה סקלארית $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ עבור $A, B \in V$.
  יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי נתון. נסמן

$$\begin{aligned} U &= \{T \in V : \forall x \in \partial K,\, Tx \cdot x \geq 1\} \\ &= \{T \in V : \forall x \in \partial K,\, \langle T, x \otimes x \rangle \geq 1\} \end{aligned}$$

כי

$$\mathrm{Tr}\,(T\,x\otimes x)=\sum_{i,j}T_{ij}x_ix_j$$

אז U היא קבוצה קמורה וסגורה, כי היא מוצגת ע"י אי-שיוויונים לינאריים וסגורים.

אם $T\in U$, אז היא בפרט מוגדרת חיובית, כי K מכיל כדור סביב 0, והאל-יפסואיד

$$\mathcal{E}=\{x\in\mathbb{R}^n:Tx\cdot x\leq 1\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:T^{1/2}x\in B^n\right\}=T^{-1/2}\left(B^n\right)$$

מוכל ב-K. למעשה, U היא קבוצת המטריצות שמגדירות אליפסואידים שמוכ-לים ב-K.

בפרט, $\mathrm{Vol}_n\left(\mathcal{E}\right)\leq\mathrm{Vol}_n\left(K\right)$ לכל $T\in U$, ולכן

$$\mathrm{Vol}\left(B^n\right)\cdot\sqrt{\det T^{-1}}=\mathrm{Vol}_n\left(\mathcal{E}\right)\leq\mathrm{Vol}_k\left(K\right)$$

כלומר $\det T>c_K>0$ לכל $T\in U$.

מהו החרוט הנורמלי של U בנק' $T\in\partial U$?

$$N_U\left(T\right)=\left\{\sum_{i=1}^N\lambda x_i\otimes x_i:\begin{array}{c}\lambda_1,\ldots,\lambda_N>0\\x_1,\ldots,x_N\in\partial K\\\left\langle T,x_i\otimes x_i\right\rangle=1\end{array}\right\}$$

מסקנה: אם $f:V\to\mathbb{R}$ חלקה כך ש-$f\left(\mathrm{Id}\right)=\max_{T\in U}f\left(T\right)$ ו-$\mathrm{Id}\in\partial U$, אזי קיים $N\geq 0$ ונק' $x_1,\ldots,x_N\in\partial K$ כך שמתקיים

1. יש $\lambda_1,\ldots,\lambda_N>0$ כך ש-$\nabla f\left(\mathrm{Id}\right)=\sum\lambda_ix_i\otimes x_i$.
2. $\left\langle\mathrm{Id},x_i\otimes x_i\right\rangle=1$, ולכן $|x_i|=1$.

בפרט, $B^n\subset K$ ו-$x_1,\ldots,x_N\in S^{n-1}\cap\partial K$.

לסיכום, כדי להוכיח את משפט ג'ון, צריך למצוא $f:U\to\mathbb{R}$, שבמנח מתאים המקסימום שלה מתקבל ב-Id, וגם $\nabla f\left(\mathrm{Id}\right)=\mathrm{Id}$, כדי שהמידה $\sum\lambda_i\delta_{x_i}$ תהיה איזוטרופית.

ניקח $f\left(T\right)=\det T$, אזי $\nabla f\left(\mathrm{Id}\right)=\mathrm{Id}$. למה? כי $\det\left(\mathrm{Id}+te_i\otimes e_j\right)=\delta_{ij}$.

נמזער את $\det T\mapsto T$ על U. כיוון שזה חסום מלמטה, הקבוצה U לא קומ-פקטית, אבל

$$\overline{\left\{T^{-1}:T\in U\right\}}$$

קומפקטית, והמינימום של $\det T$ מתקבל.

נניח שהמינימום מתקבל ב-$T_0\in U$. אזי האליפסואיד

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n:T_0x\cdot x\leq 1\right\}$$

הוא בעל נפח מקסימלי מבין כל האליפסואידים שמוכלים ב-K.

במנח מתאים, האליפסואיד הוא B^n, והמטריצה החיובית T_0 היא בהכרח הזהות.

סיכום שלבי ההוכחה:

1. קיים אליפסואיד סימטרי בעל נפח מקסימלי המוכל ב-K. זה נקרא אליפסואיד Loewner.
2. מפעילים העתקה לינארית, כך שהאליפסואיד הוא הכדור B^n.
3. מתנאי Kuhn-Tucker, קיימים $\lambda_1, \ldots, \lambda_N > 0$ ו-$v_1, \ldots, v_N \in S^{n-1} \cap \partial K$ כך שמתקיים

$$(*) \qquad \mathrm{Id} = \sum \lambda_i v_i \otimes v_i$$

4. תנאי $(*)$ שקול לקיום מידה איזוטרופית הנתמכת על $\{v_1, \ldots, v_N\}$.

נוכיח את א"ש ברסקמפ-ליב. באותו מחיר נקבל גם עוד אי-שיוויון.

נניח ש-$\mathrm{Id} = \sum c_i v_i \otimes v_i$, כאשר $v_1, \ldots, v_N \in S^{n-1}$, ויהיו $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ מדידות. אז

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{N} f_i^{c_1} (x \cdot v_i) \, dx}_{\text{(I)}} \underset{\text{B-L}}{\leq} \underbrace{\prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i \right)^{c_i}}_{\text{(II)}} \underset{\text{Barthe}}{\leq} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x = \sum c_i \theta_i v_i \\ \theta_i \in \mathbb{R}}} \prod_{i=1}^{N} f_i^{c_i} (\theta_i) \, dx}_{\text{(III)}}$$

השוואה לא"ש הולדר ופרקופה-לינדלר:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{fg} \underset{\text{Holder}}{\leq} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g} \underset{\text{P-L}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x = \frac{y+z}{2}} \sqrt{f(y) g(z)} dx$$

- ברסקמפ-ליב הוא "הכללה של Holder" עם הרבה פרמטרים.
- א"ש Barthe הוא "הכללה של פרקופה-לינדלר" החד-ממדי.

להוכחה שני שלבים:

1. להוכיח את הא"ש עבור גאוסיאנים, כלומר במקרה שבו $f_i(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda_i t^2}$.
2. להשתמש בטרנספורטציה של מידות, ולהוכיח את המקרה הכללי.

נתחיל בהוכחה.

במקרה שבו $f_i(t)=e^{-\frac{1}{2}\lambda_i t^2}$, נחשב את (I), (II) ו-(III).

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum c_i\lambda_i\langle x,v_i\rangle}dx=\int e^{-\frac{1}{2}Ax\cdot x}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}=\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det\left(\sum c_i\lambda_i v_i\otimes v_i\right)}}\\
(\mathrm{II}) &= \sqrt{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right)^{c_i}}
\end{aligned}$$

למה החזקות של 2π מתאימות? כי

$$n=\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Id}\right)=\mathrm{Tr}\left(\sum c_i v_i\otimes v_i\right)=\sum c_i\left|v_i\right|^2=\sum c_i$$

לא נראה את החישוב המפורט של (III). אפשר לחשב אותו בעזרת טרנספורם לז'נדר, ויוצא

$$(\mathrm{III})=\sqrt{(2\pi)^n\det\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i}{\lambda_i}v_i\otimes v_i\right)}$$

איך מוכיחים את האי-שיוויונים במקרה הגאוסי? נסמן

$$D=\inf_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}\frac{(\mathrm{II})_{gauss}}{(\mathrm{I})_{gauss}}$$

אז

$$D^2=\inf_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}\frac{\det\left(\sum_{i=1}^{N}c_i\lambda_i v_i\otimes v_i\right)}{\prod_{i=1}^{N}\lambda_i^{c_i}}=\inf_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}\frac{\det\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i}{\lambda_i}v_i\otimes v_i\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{c_i}}=\left(\inf_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}\frac{(\mathrm{III})_{gauss}}{(\mathrm{II})_{gauss}}\right)^2$$

טענה: עבור גאוסיאנים, $D=1$.

הטענה והחישוב של (III) הם אלגברה לינארית.

נעבור לשלב ב': טרנספורטציה.

נוכיח למעשה שלכל פונקציות $f_1,\ldots,f_N:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ו-$g_1,\ldots,g_N:\mathbb{R}\to[0,\infty)$,

$$(*)\qquad\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{N}f_i^{c_i}\left(x\cdot v_i\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}}f_i\right)^{c_i}}\leq\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i}\prod_{i=1}^{N}g_i^{c_i}\left(\theta_i\right)dx}{\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}}g_i\right)^{c_i}}$$

גם ברסקמפ-ליב וגם ברטה נובעים מ-$(*)$. מהחישוב עם גאוסיאנים, האינפימום של אגף ימין הוא ≥ 1. הסופרמום של אגף שמאל הוא ≤ 1 מאותה הסיבה. לכן מ-$(*)$ מקבלים את ברסקמפ-ליב, ברטה, וחלק ממקרה השיוויון.

(קצת פירוט גבי מקרה השיוויון: אם ה-v_i בסיס אורתונורמלי אז יש שיוויון לכל פונקציות. אם כל ה-c_i קטנים ממש מ-1, אז השיוויון הוא רק בגאוסיאנים. אם חלק מה-c_i הם 1, אז יש מקרה ביניים)

הוכחת $(*)$:

לשם פשטות, נניח ש-f_i ו-g_i רציפות וחיוביות ממש על $\mathbb{R}$, ונניח גם $\int f_i < \infty, \int g_i < \infty$. אפשר לנרמל (כי הפונקציות אינטגרביליות) ולהניח

$$\forall i \qquad \int_{\mathbb{R}} f_i = \int_{\mathbb{R}} g_i = 1$$

מה זה טרנספורטציה? זו העתקה $T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת כך שיתקיים, כלומר

$$\int_{-\infty}^{x} f_i\left(t\right) dt = \int_{-\infty}^{T_i(x)} g_i\left(t\right) dt$$

זו פונקציה רציפה, והיא נקראת <u>טרנספורטציית מידה</u> בין $\mu = f_i\left(x\right) dx$ ו-$\nu = g_i\left(y\right) dy$, זוג מידות הסתברות.

התנאי שהגדיר את T_i:

$$\forall x \qquad \mu\left(\left(-\infty, x\right]\right) = \nu\left(\left(-\infty, T_i\left(x\right)\right]\right)$$

נכון לכל קטע (הפרש של שתי קרניים), ולכן לכל קבוצת בורל,

$$\mu\left(T_i^{-1}\left(A\right)\right) = \nu\left(A\right)$$

כלומר $\left(T_i\right)_* \mu = \nu$, במילים T_i דוחפת את μ ל-ν.

יש המון העתקות T שמקיימות $T_* \mu = \nu$, אבל T_i היא ההעקתה היחידה שהיא מונוטונית עולה.

עובדה מעניינת: (Brenier)

עבור μ, ν מידות הסתברות ב-$\mathbb{R}^n$, יש מין טרנספורטציה "קנונית" בין μ ל-ν: קיימת $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ יחידה מהצורה $T = \nabla \psi$ עם $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ קמורה שמקיימת $T_* \mu = \nu$.

לא נשתמש במשפט החזק הזה.

המטרה שלנו עכשיו: יש פונקציות רציפות ונחמדות שמקיימות $\int_{\mathbb{R}} f_i = \int_{\mathbb{R}} g_i = 1$, ויש $c_1, \ldots, c_N$ ו-$v_1, \ldots, v_N$ עם

$$c_i \sum v_i \otimes v_i = \mathrm{Id}$$

ויודעים

$$1 \leq D^2 = \inf\left\{\frac{\det\left(\sum c_i \lambda_i v_i \otimes v_i\right)}{\prod \lambda_i^{c_i}} : \lambda_1, \ldots, \lambda_N > 0\right\}$$

נשאר להוכיח:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{N}f_i^{c_i}\left(x\cdot v_i\right)dx\le\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{x=\sum c_i\theta_iv_i}\prod_{i=1}^{N}g_i^{c_i}\left(\theta_i\right)dx \qquad (*)$$

(מזה נובע אוטומטית ש-$D=1$ וש-$(\mathrm{I})\le(\mathrm{II})\le(\mathrm{III})$)

בנינו טרנספורטציות $T_i\nearrow$ שמקיימות

$$\int_{-\infty}^{x}f_i\left(t\right)dt=\int_{-\infty}^{T_i(x)}g_i\left(t\right)dt$$

נגזור ונקבל $f_i\left(x\right)=g_i\left(T_i\left(x\right)\right)T_i'\left(x\right)$.

הוכחת $(*)$: נגדיר, עבור $y\in\mathbb{R}^n$,

$$T\left(y\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iT_i\left(y\cdot v_i\right)v_i$$

נגזור את T הזו:

$$T'\left(x\right)=\begin{pmatrix}| & & |\\ \frac{\partial T}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T}{\partial x_n}\\ | & & |\end{pmatrix}$$

זו מקיימת

$$T'\left(y\right)=\sum_{i=1}^{N}c_iT_i'\left(y\cdot v_i\right)v_i\otimes v_i$$

זו מטריצה מוגדרת חיובית, כי T_i עולה וכי $c_i>0$ לכל i. לכן T חח"ע: אם $T\left(x\right)=T\left(x+\theta\right)$, אז הנגזרת של $s\mapsto T\left(x+s\theta\right)$ לא תמיד חיובית, אבל מצד שני היא $T'\left(x+s\theta\right)\theta\cdot\theta>0$.

כעת נחשב

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{y=\sum c_i\theta_i v_i}\prod_{i=1}^{N}g_i^{c_i}(\theta_i)\,dx &\geq \int_{T(\mathbb{R}^n)}\sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i}\prod_{i=1}^{N}g_i^{c_i}(\theta_i)\,dx\\
[x=T(y)] &= \int_{\mathbb{R}^n}\sup_{Ty=\sum c_i\theta_i v_i}\prod_{i=1}^{N}g_i^{c_i}(\theta_i)\det T'(y)\,dy\\
[\theta_i=T_i(y\cdot v_i)] &\geq \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{N}g_i^{c_i}(T_i(y\cdot v_i))\det\left(\sum c_iT_i'(y\cdot v_i)\,v_i\otimes v_i\right)dy\\
[D\geq 1] &\geq \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{N}\left[g_i(T_i(y\cdot v_i))\,T_i'(y\cdot v_i)\right]^{c_i}dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{N}f_i^{c_i}(y\cdot v_i)\,dy
\end{aligned}$$

נותר להוכיח דברים באלגברה לינארית. נוותר על הנוסחא ל-(III) במקרה הגאוסי, אבל נוכיח למה $D=1$:

$$D^2=\inf\left\{\frac{\det\left(\sum c_i\lambda_i v_i\otimes v_i\right)}{\prod\lambda_i^{c_i}}:\lambda_1,\ldots,\lambda_N>0\right\}$$

אם $\lambda_1=\ldots=\lambda_N=1$ מקבלים 1, לכן $D\leq 1$. צ"ל

$$\det\left(\sum c_i\lambda_i v_i\otimes v_i\right)\geq\prod\lambda_i^{c_i}$$

כאשר $\sum c_iv_i\otimes v_i=\mathrm{Id}$. למשעה יספיק במקום זה $\det\left(\sum c_iv_i\otimes v_i\right)=1$.

הוכחה:

$$\mathrm{Id}=\sum_{i=1}^{N}c_iv_i\otimes v_i=\begin{pmatrix}| & & |\\ \sqrt{c_1}v_1 & \cdots & \sqrt{c_N}v_N\\ | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}- & \sqrt{c_1}v_1 & -\\ & \vdots & \\ - & \sqrt{c_N}v_N & -\end{pmatrix}$$

נשתמש בנוסחת Cauchy-Binet:

$$\det\left(A^tA\right)=\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,N\}\\ \#I=n}}\det(A_I)^2$$

כאשר A_I הוא בחירה של השורות מתוך A שהאינדקס שלהן הוא I.

לכן

$$1=\det\left(\sum_{i=1}^{N}c_iv_i\otimes v_i\right)=\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,N\}\\ \#I=n}}d_I$$

כאשר

$$0 \leq d_I = \det\left(\sum_{j\in I} c_i v_i \otimes v_i\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\det\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i c_i v_i \otimes v_i\right) &= \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}} \left(\prod_{i\in I} \lambda_i\right) d_I \\
\text{(AM-GM)} \quad &\geq \prod_{\substack{I \subset \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}} \left(\prod_{i\in I} \lambda_i\right)^{d_I} \\
&= \prod_{i=1}^{N} \lambda_i^{\sum_{I\ni i} d_I}
\end{aligned}$$

למה $c_i = \sum_{I\ni i} d_I$?

$$\begin{aligned}
\sum_{I\ni i} d_I &= \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}} d_I - \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,N\}\setminus\{i\} \\ \#I = n}} d_I \\
&= \det\left(\sum_{j=1}^{N} c_j v_j \otimes v_j\right) - \det\left(\sum_{j\neq i} c_j v_j \otimes v_j\right) \\
&= 1 - \det\left(\mathrm{Id} - c_i v_i \otimes v_i\right) = 1 - (1 - c_i) = c_i
\end{aligned}$$

מש"ל.