

## בחינה - פונקציות ממשיות, מועד א

סמסטר א, תשע"ד, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

מתרגל: אורי גרופל

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל ארבע השאלות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

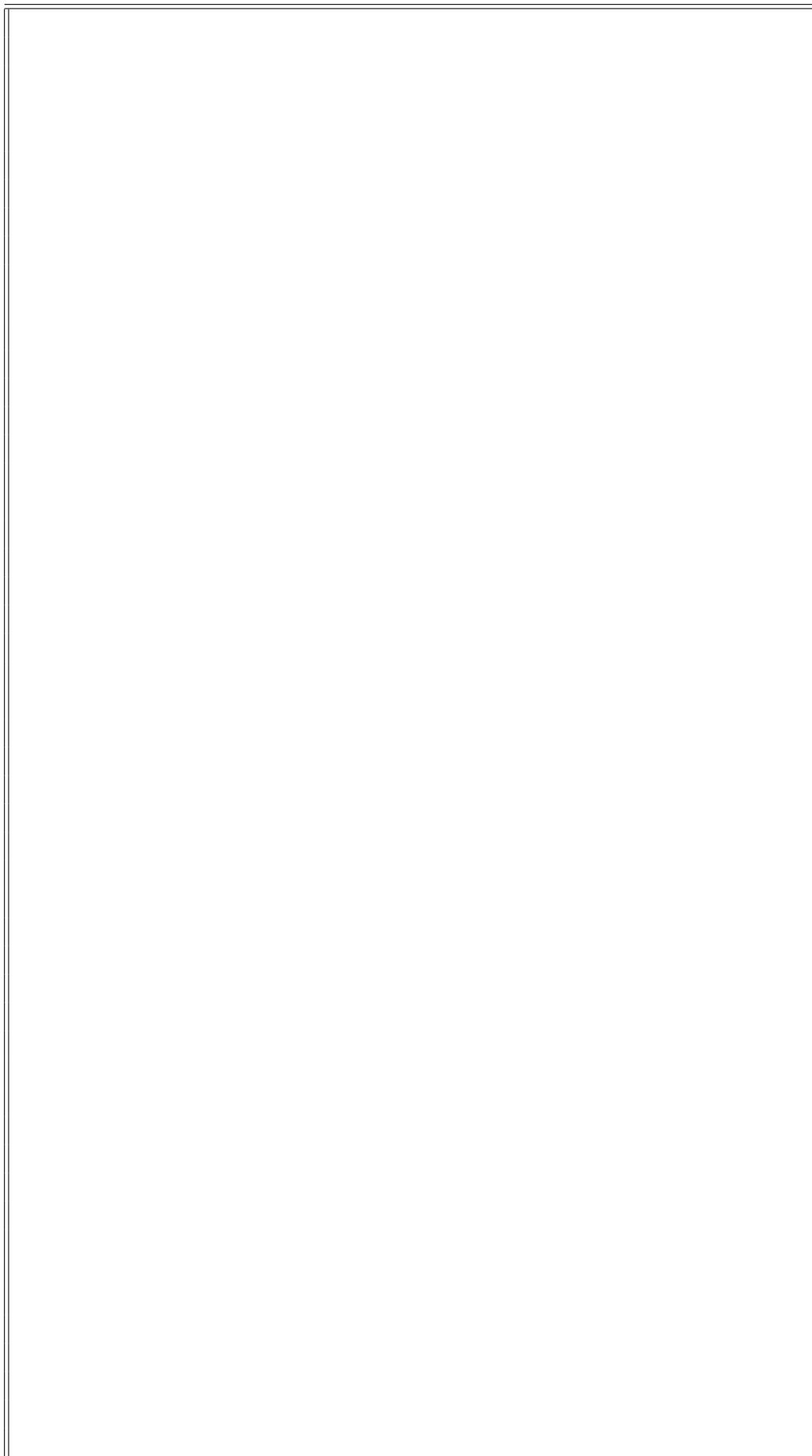
השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

# בהצלחה!

1. נסחו והוכיחו את אי־שוויון הפונקציה המקסימלית של Hardy ו־Littlewood.



2. תהי  $A \subset \mathbb{R}$  קבוצה בעלת מידה סופית. יהיו  $f, f_1, f_2, \dots$  פונקציות אינטגרביליות ואי-שליליות על  $A$  כך ש-  $f_n \rightarrow f$  כמעט בכל מקום. נתון גם ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

הראו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n - f| = 0.$$

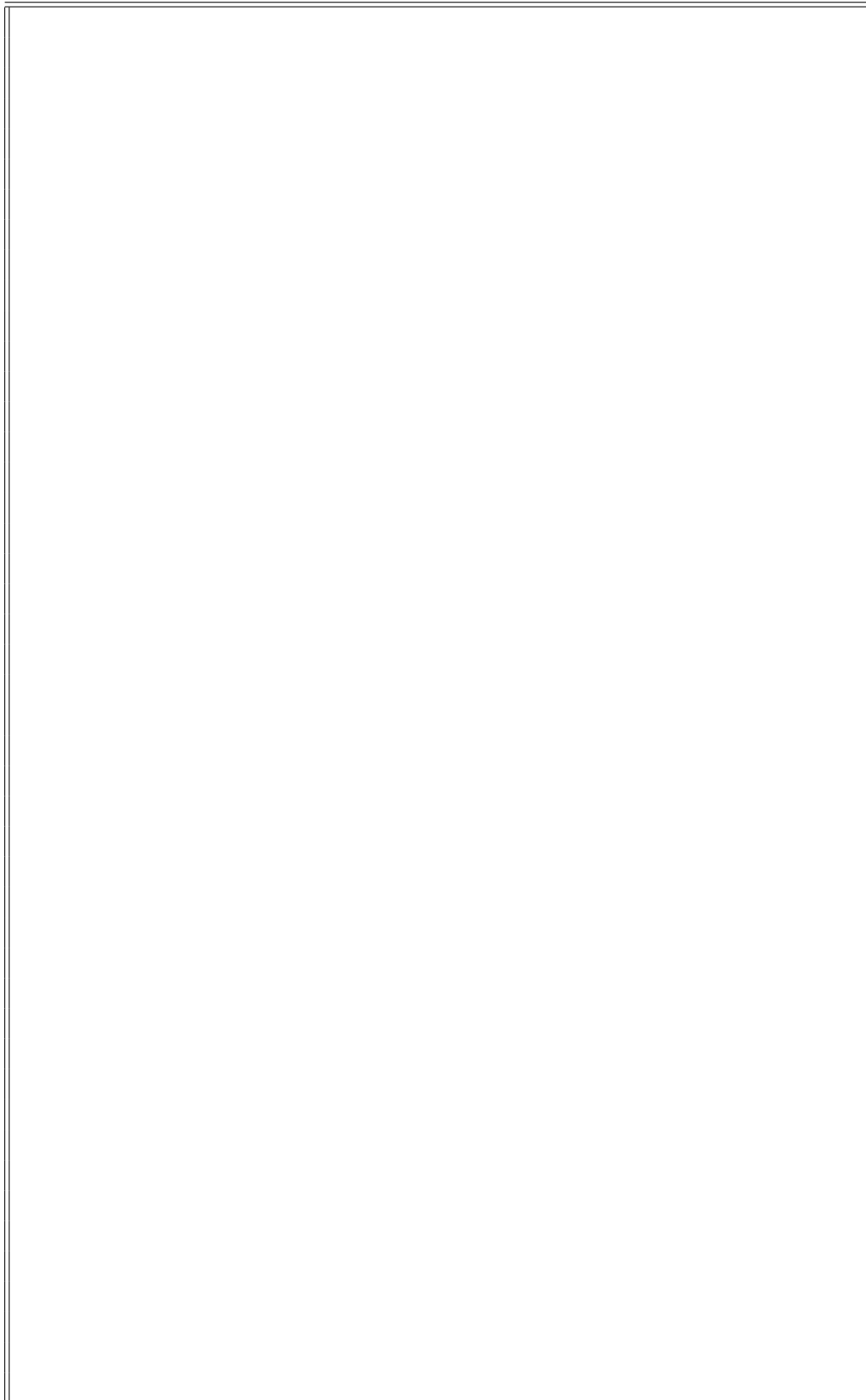
(רמז: הראו ש-  $\int_A \min\{f_n, f\} \rightarrow \int_A f$ .)

3. תהי  $A \subseteq (0, \infty)$  קבוצה מדידה בעלת מידה חיובית. תהי  $F \subset \mathbb{R}$  קבוצה סופית. הוכיחו כי קיימים  $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \neq \beta \in \mathbb{R}$  כך שהקבוצה

$$\alpha + \beta F := \{\alpha + \beta x; x \in F\}$$

מוכלת ב- $A$ .

(רמז: מצאו קטע  $I \subset \mathbb{R}$  כך ש- $m(A \cap I) > \lambda m(I)$  עם  $\lambda$  מספיק קרוב ל-1)



4. תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה בהחלט.

(א) נסמן ב-  $1_{\{x < t < y\}}$  את הפונקציה השווה ל-1 כאשר  $x < t < y$  ושווה לאפס אחרת. הוכיחו כי

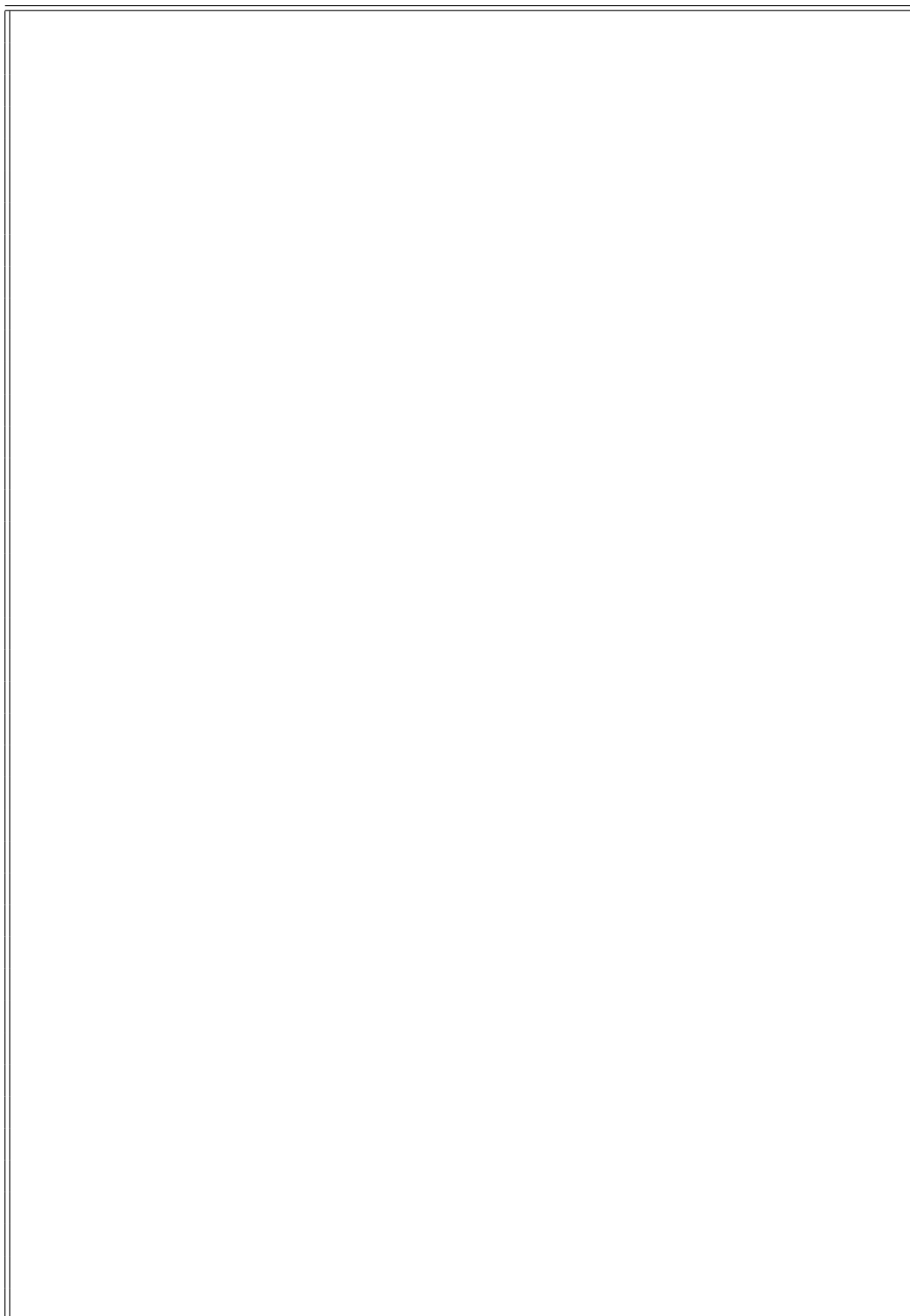
(13 נקודות)

$$\int_{[0,1]^2} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| dm(x, y) \leq 2 \int_{[0,1]^3} \frac{|f'(t)|}{|y - x|} 1_{\{x < t < y\}} dm(x, y, t).$$

(ב) הוכיחו את אי-השוויון

(12 נקודות)

$$\int_{[0,1]^2} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| dm(x, y) \leq 2 \int_{[0,1]} |f'|.$$





במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

