

## בחינה - פונקציות ממשיות, מועד ב

סמסטר א, תשע"ד, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

מתרגל: אורי גרופל

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל ארבע השאלות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

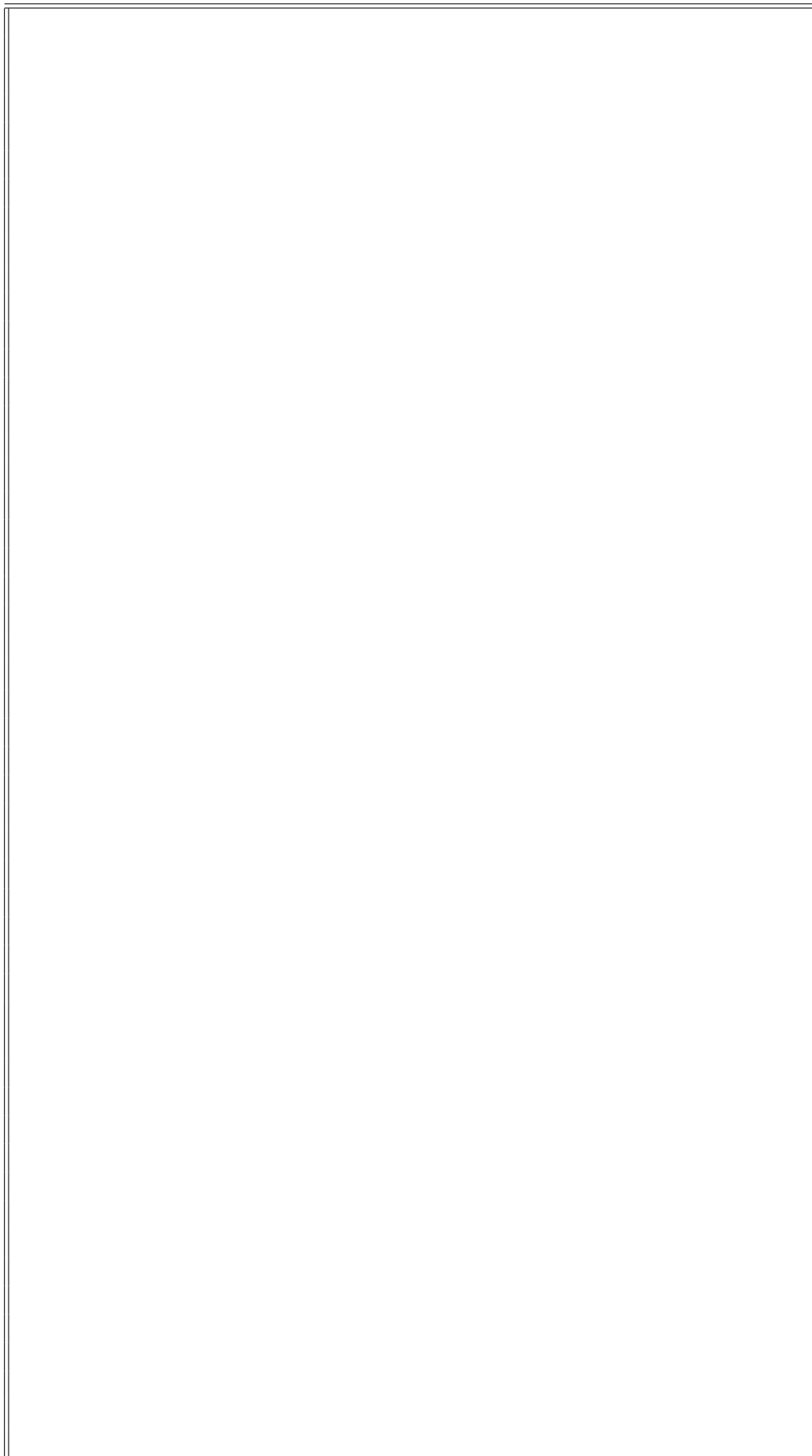
השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

# בהצלחה!

1. נסחו והוכיחו את משפט Egorov על התכנסות במידה שווה.



2. תהי  $A \subset \mathbb{R}$  מדידה עם  $m(A) > 0$ .

(א) הראו שלכל  $0 < \lambda < 1$  קיים קטע  $I$  כך ש-  $m(A \cap I) \geq \lambda m(I)$ .  
(ב) הראו ש-  $A - A = \{x - y; x, y \in A\}$  מכילה קטע לא מנוון סביב 0.

(5 נקודות)

(20 נקודות)

3. תהי  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה בעלת השתנות חסומה. הוכיחו כי קיים  $A > 0$  (שתלוי בפונקציה  $f$ ) כך שלכל  $0 < h < 1$ ,

$$\int_{[0,1]} |f(x+h) - f(x)| dm(x) \leq hA$$

(רמז: הוכיחו תחילה עבור פונקציות מונוטוניות)

4. תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מדידה. הוכיחו כי קיימת פונקציה  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = +\infty$$

כך ש-  $g(t) = \omega(f(t))$  פונקציה אינטגרבילית ב-  $[0, 1]$ .  
(רמז: הביטו, למשל, בקבוצות מהצורה  $\{x; k \leq f(x) \leq k + 1\}$ )

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

