מספר סטודנט: ____________

4 בספטמבר 2016

בחינה ־ פונקציות ממשיות, מועד ב

סמסטר א, תשע"ו, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג

מתרגל: ינון ספינקה

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל ארבע השאלות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

(25 נקודות) 1. הוכיחו שבמרחב מידה סופי, לכל סדרת פונקציות מדידות המתכנסת במידה, יש תת־סדרה המתכנסת כב"מ.

(25 נקודות) 2. תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה בעלת מידת לבג אפס. מצאו פונקציה לא־יורדת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש־ $f'(x) = +\infty$ לכל $x \in A$.

מספר סטודנט: ___________

(25 נקודות) 3. תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציית קנטור, ונסמן $g(x) = f(x) + x$. תהי $C \subseteq [0,1]$ קבוצת קנטור. הוכיחו כי $g(C)$ קבוצה מדידה עם $m(g(C)) = 1$.

4. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. נסמן $U=[0,1]^2\subseteq\mathbb{R}^2$. נניח ש־ $\partial f/\partial x$ ו־ $\partial f/\partial y$ פונקציות ליפשיץ המתאפסות על שפת U.

(10 נקודות) (א) נסמן $h=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. הוכיחו כי h מוגדרת כב"מ ב־ U, ולכל $(x,y)\in U$,

$$f(x,y)=f(x,0)+\int_{[0,x]\times[0,y]}h.$$

(10 נקודות) (ב) הוכיחו כי כמעט לכל $(x,y)\in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\int_{[0,y]}h(x,s)ds.$$

(5 נקודות) (ג) הוכיחו כי הפונקציות $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ו־ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ קיימות ושוות כב"מ ב־ U.

מספר סטודנט: ___________

מספר סטודנט: ____________

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):