

4 בספטמבר 2016

בחינה - פונקציות ממשיות, מועד ב

סמסטר א, תשע"ו, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג

מתרגל: ינון ספינקא

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל ארבע השאלות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

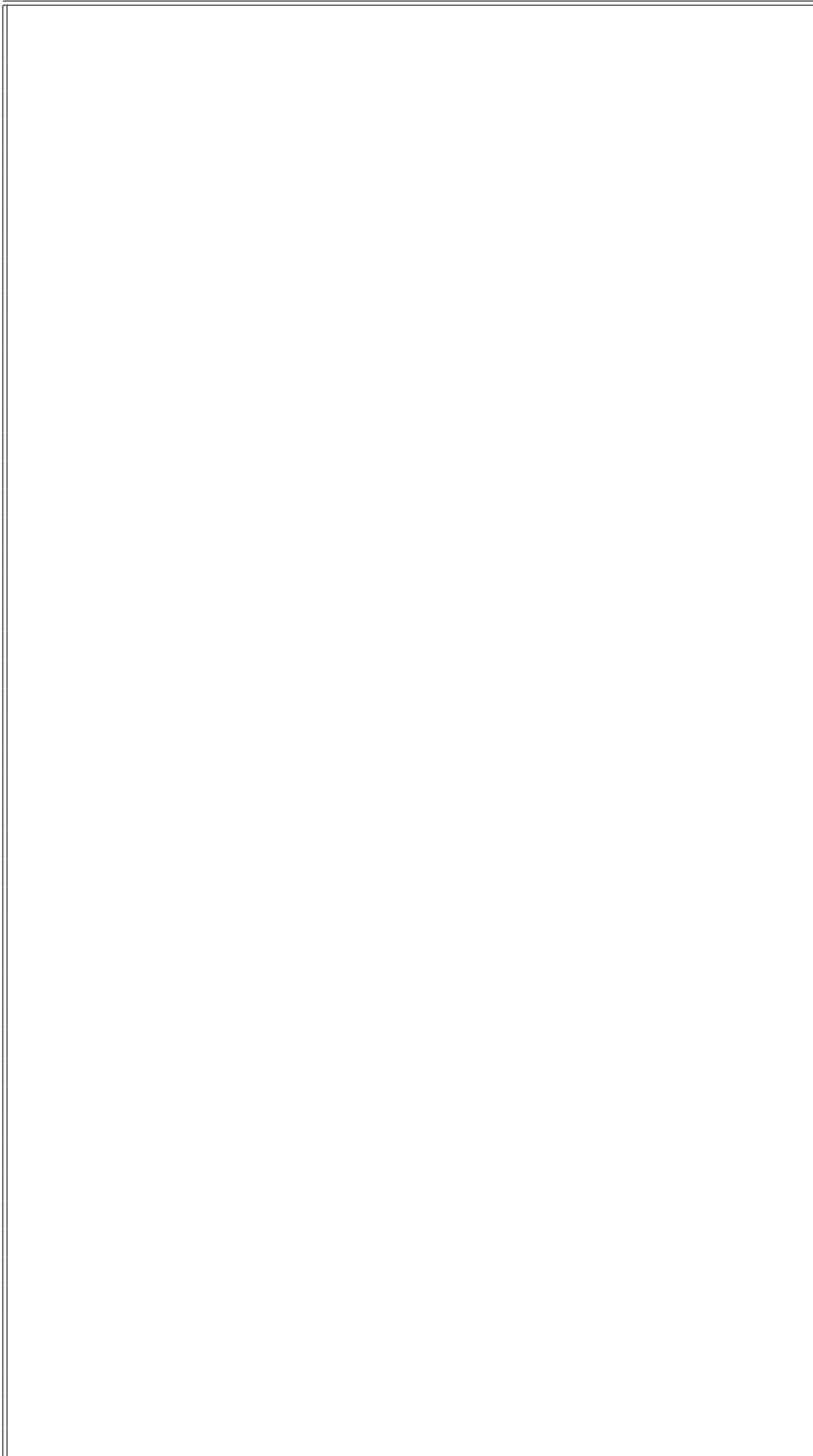
פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. הוכיחו שבמרחב מידה סופי, לכל סדרת פונקציות מדידות המתכנסת במידה, יש תת־סדרה המתכנסת כב"מ.

(25 נקודות)



(25 נקודות) 2. תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה בעלת מידת לבג אפס. מצאו פונקציה לא־יורדת $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש־
 $f'(x) = +\infty$ לכל $x \in A$.

3. תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית קנטור, ונסמן $g(x) = f(x) + x$. תהי קבוצת $C \subseteq [0, 1]$ קבוצת קנטור. הוכיחו כי $m(g(C)) = 1$ עם קבוצה מדידה עם $m(g(C)) = 1$. (25 נקודות)

4. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. נסמן $U = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. נניח ש-
 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ פונקציות ליפשיץ המתאפסות על שפת U .

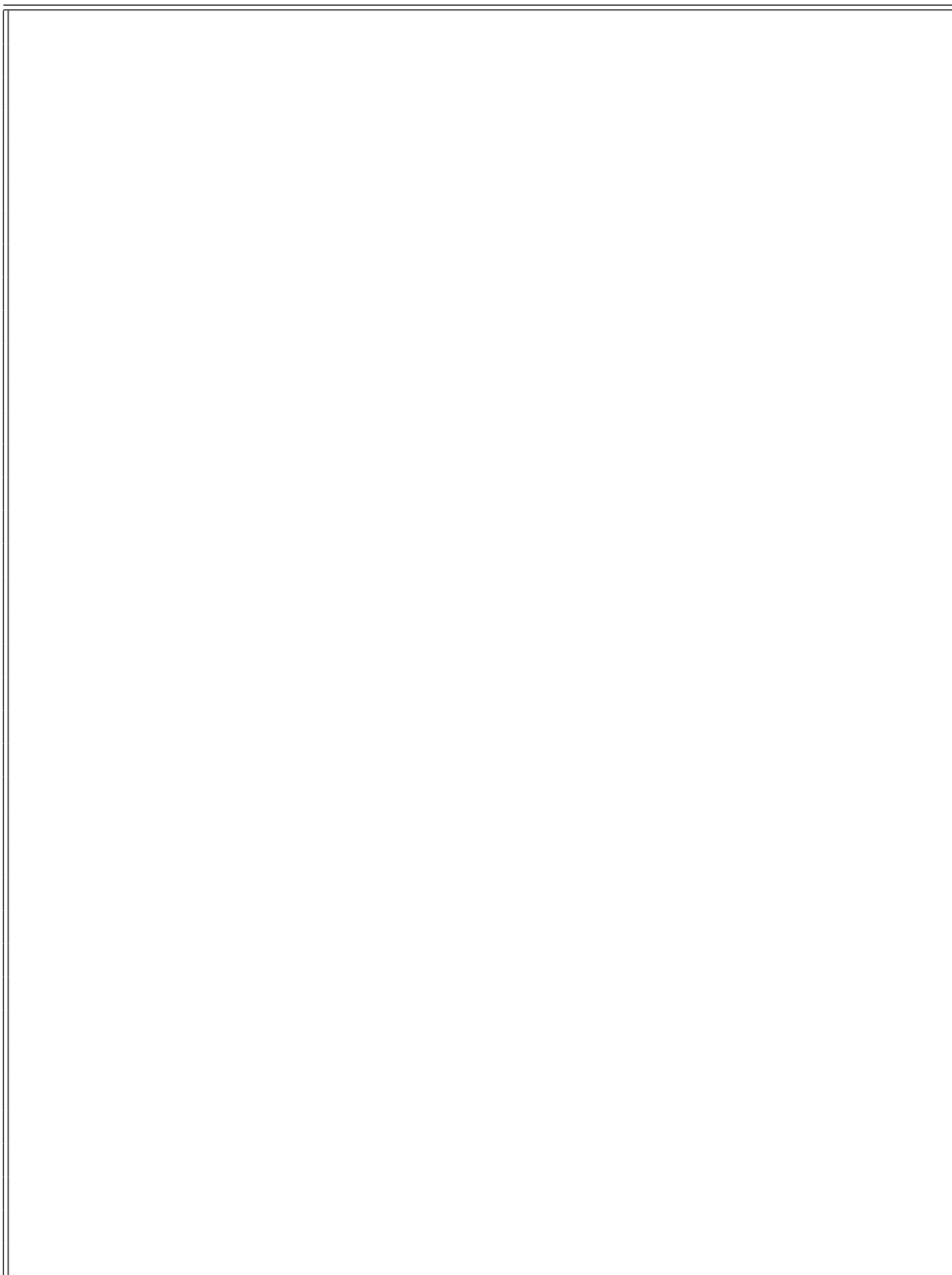
(א) נסמן $h = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$. הוכיחו כי h מוגדרת כב"מ ב- U , ולכל $(x, y) \in U$ (10 נקודות)

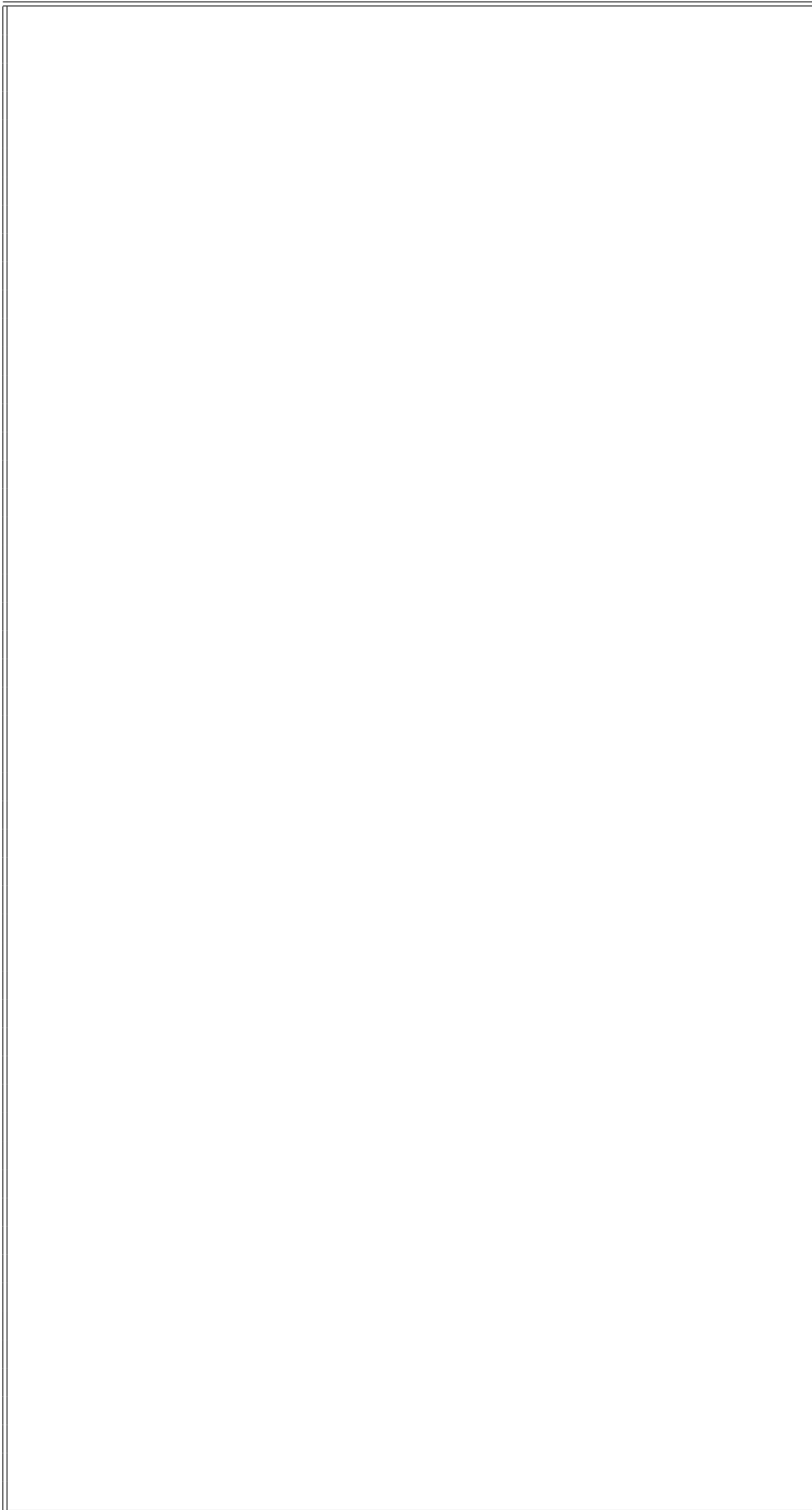
$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_{[0,x] \times [0,y]} h.$$

(ב) הוכיחו כי כמעט לכל $(x, y) \in U$ (10 נקודות)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_{[0,y]} h(x, s) ds.$$

(ג) הוכיחו כי הפונקציות $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ו- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ קיימות ושוות כב"מ ב- U . (5 נקודות)





במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

