תרגיל: תהי Ω קבוצה, $\mathcal{F}$ סיגמא־אלגברה על Ω. נתון ש־ $\mathcal{F}$ אינסופית. הוכיחו שעוצמת $\mathcal{F}$ היא לפחות רצף.

פיתרון: נשים לב שמספיק למצוא סדרת קבוצות זרות ולא ריקות $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$: עבור $A \subset \Omega$, נסמן לרגע $A^0 = \emptyset$ ו־ $A^1 = A$. במידה ואכן מצאנו סדרה כנ"ל, נביט באוסף הקבוצות

$$\left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{\varepsilon_j} \; ; \; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \in \{0,1\} \right\}$$

זהו אוסף של קבוצות שונות, שכולן ב־ $\mathcal{F}$. לכן עוצמת $\mathcal{F}$ היא רצף לכל הפחות.

נותר רק למצוא סדרת קבוצות זרות ולא ריקות ב־ $\mathcal{F}$. לשם כך נבנה סדרת חלוקות מדידות (ביחס ל־ $\mathcal{F}$) של Ω. החלוקות תהיינה סופיות, והחלוקה $\mathcal{P}_n$ תחלק את Ω ל־ n קבוצות מדידות (כלומר, שייכות ל־ $\mathcal{F}$), לא־ריקות, זרות, שאיחודן Ω. נתחיל מ־ $\mathcal{P}_1 = \{\Omega\}$. בשלב ה־ $n+1$, נביט בחלוקה $\mathcal{P}_n = \{A_1, \ldots, A_n\}$. מכיוון ש־ $\mathcal{F}$ אינסופית, קיימת $B \in \mathcal{F}$ ו־ $1 \leq j \leq n$ כך ש־

$$\emptyset \subsetneq B \cap A_j \subsetneq A_j$$

כדי ליצור את החלוקה ה־ $n+1$, פשוט נחליף את A_j בשתי הקבוצות הזרות $B \cap A_j$ ו־ $B^c \cap A_j$. קיבלנו חלוקה עדינה יותר, ל־ $n+1$ חתיכות מדידות ולא־ריקות. (עד כה, השתמשנו רק בעובדה ש־ $\mathcal{F}$ אלגברה).

עתה, יהי $x \in \Omega$. נסמן ב־ $\mathcal{P}_n(x) \in \mathcal{P}_n$ את הקבוצה $A \in \mathcal{P}_n$ שמקיימת $x \in A$ - יש בדיוק אחת כזו, כי $\mathcal{P}_n$ היא חלוקה. לקבוצה

$$\mathcal{C}(x) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(x)$$

קוראים התא של x. זו קבוצה מדידה (חיתוך בן מנייה) ולא ריקה - היא מכילה את x. נשים לב שלכל $x, y \in \Omega$,

$$\mathcal{C}(y) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \forall n, \mathcal{P}_n(x) = \mathcal{P}_n(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$$

אכן, אילו $\mathcal{P}_n(x) \neq \mathcal{P}_n(y)$ עבור איזשהו n, בהכרח $\mathcal{P}_n(x) \cap \mathcal{P}_n(y) = \emptyset$ (כי $\mathcal{P}_n$ חלוקה), ובוודאי ש־ $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$. כלומר, אם שני תאים נחתכים, הם בהכרח שווים. נביט באוסף התאים

$$X = \{\mathcal{C}(x); x \in \Omega\}$$

זה אוסף של קבוצות זרות, לא ריקות ומדידות. נותר רק להבין כמה תאים יש ב־ X. נשים לב שלכל n ולכל $A \in \mathcal{P}_n$, יש תא שמוכל ב־ A. מכאן שב־ X יש לפחות n תאים - וזאת לכל n, ולכן X אינסופית. על כן מצאנו סדרת קבוצות זרות ולא ריקות ב־ $\mathcal{F}$, כמבוקש.