תרגיל מודרך: הוכיחו שפונקציה חסומה בקטע חסום היא אינטגרבילית רימן אם ורק אם היא רציפה כמעט בכל מקום.

הדרכה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. הוכיחו שכל אחד משלושת התנאים הבאים שקול לאינטגרביליות רימן:

1. לכל $\varepsilon>0$ קיימות פונקציות מדרגות $h,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש־ $g\le f\le h$ ו־

$$\|h-g\|_1=\int_{[a,b]}|h-g|<\varepsilon$$

2. קיימות שתי סדרות של פונקציות מדרגות $g_n,h_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש־

$$g_1\le g_2\le\dots$$

$$h_1\ge h_2\ge\dots$$

ועם זאת $g_n\le f\le h_n$ לכל $n$, ומתקיים

$$\|h_n-g_n\|_1\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

3. יש שתי סדרות של פונקציות מדרגות $g_n,h_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש־

$$g_1\le g_2\le\dots$$

$$h_1\ge h_2\ge\dots$$

ועם זאת $g_n\le f\le h_n$ לכל $n$, וכמעט לכל $x\in[a,b]$,

$$h_n(x)-g_n(x)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

עתה, נניח ש־ $f$ אינטגרבילית רימן, ותהיינה $g_n,h_n$ כמו בסעיף 3. תהי $x\in[a,b]$ נקודה שבה $h_n(x)-g_n(x)\to0$, ונניח ש־ $x$ אינה נקודת אי־רציפות של אף אחת מפונקציות המדרגות. הוכיחו ש־ $f$ רציפה ב־ $x$ (מי שמתקשה, מוזמן להציץ בהוכחת משפט דיני מחדו"א 2). הסיקו ש־ $f$ רציפה כב"מ.

לגבי הכיוון השני: תהי $f$ פונקציה חסומה כלשהי. בנו סדרות פונקציות כמו בסעיף 3, כך ש־

$$h_n(x)-g_n(x)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

לכל $x\in[a,b]$ שבה $f$ רציפה. הסיקו שאם $f$ רציפה כב"מ, היא אינטגרבילית רימן.